Аналитическая геометрия

Аналитическая геометрия на плоскости.

Аналитическая геометрия – решение геометрических задач с помощью алгебры, для чего используется ***метод координат***.

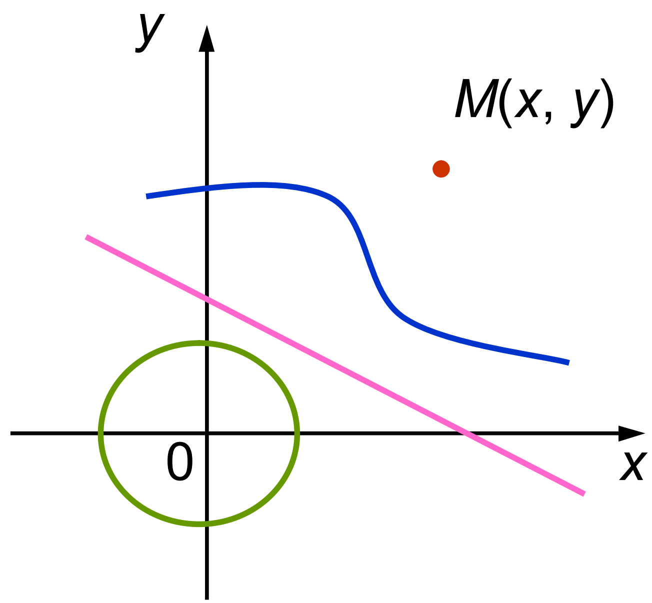
Под системой координат на плоскости понимают способ, позволяющий численно описать положение любой точки плоскости.

Любая точка M на плоскости может быть задана своими координатами: (x, y).

Множество точек на плоскости могут образовать ***линию***.

Например, прямую или окружность.

При этом точки принадлежащие линии обладают определенными геометрическими свойствами.



Определение. Уравнение линии (уравнением кривой) на плоскости Oxy нозывается уравнение $F(x, y) = 0$, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки данной линии и не удовлетворют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Если точка $M(x_1,y_1)$ лежит на кривой, то $F(x_1, y_1) = 0$,

если $N(x_2,y_2)$ не лежит на кривой то $F(x_2, y_2) \neq 0$.

Примеры: 1. Уравнение окружности: $x^2 + y^2 = 4$.

Точка A (-2, 0) лежит на окружности, так как $(-2)^2 + 0^2 = 4$,
B (1, 1) – не лежит $1^2 + 1^2 \neq 4$.

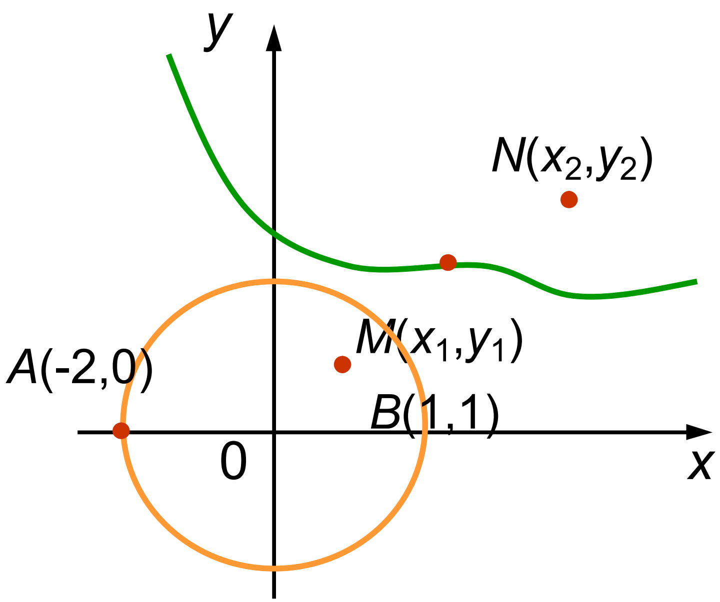
2. $xy – 8 =0$ ($xy = 8$)

$C(2, 4)$ – лежит.

D (1, 5) – не лежит.

3. $y - 3x = 0$ ($y = 3x$)

E (3, 1) – лежит, $К$ (2, 2) – не лежит.



Общее уравнение прямой

Уравнение вида: $Ax + By + C = 0$ **(1)**
с произвольными коэффициентами $A; B; C$ такими , что A и B не равны нулю одновременно, называется ***общим уравнением прямой.***

Общее уравнение прямой называется ***полным***, если все коэффициенты A, B, и C отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется ***неполным***.

Виды неполных уравнений:

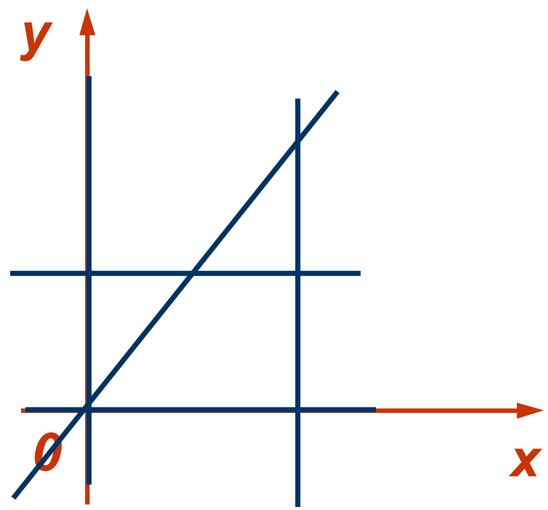
1) $C = 0; \quad Ax + By = 0$

2) $B = 0; \quad Ax + C = 0$

3) $A = 0; \quad By + C = 0$

4) $B = C = 0; \quad Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

5) $A = C = 0; \quad By = 0 \Rightarrow y = 0$



Теорема.

Вектор $\vec{n}=(A,\,B)$ является вектором перпендикулярным к прямой $Ax + By + C = 0$.

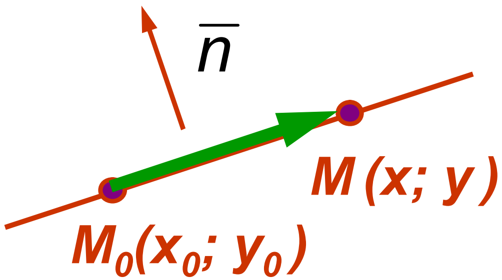
Вектор $\overline{n}=\{A;\,B\}$ - ***нормаль*** этой прямой.

Задача. Записать уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,\,y_0)$ перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\vec{n}=(A,\,B)$.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y)$ и рассмотрим вектор $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,\,y-y_0)$

$$\overline{n}\perp\overline{M_0M}\quad\Rightarrow\quad\overline{n}\cdot\overline{M_0M}=0$$

$$\vec{n}=(A,\,B)$$



$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}\qquad \textbf{(2)}$$

Его можно переписать в виде общего уравнения прямой:
$Ax + By + C = 0$.

Уравнение прямой в отрезках

Рассмотрим полное уравнение прямой:

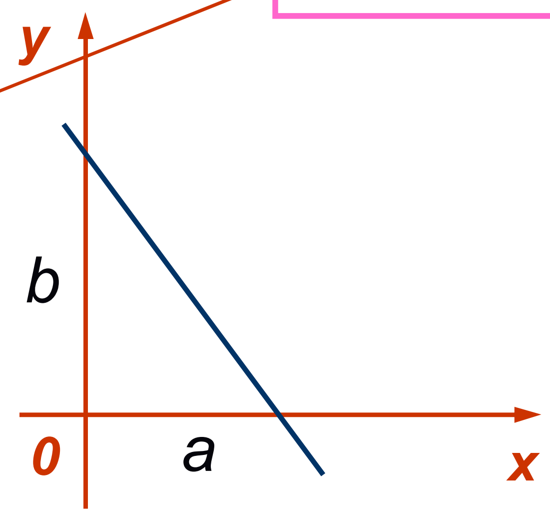
$$Ax + By + C = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By = -C \quad \Rightarrow \quad \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

Обозначим: $\frac{-C}{A} = a \qquad \frac{-C}{B} = b$ Получим: $\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$ **(3)**

Уравнение *в отрезках*

Уравнение в отрезках используется для построения прямой, при этом a и b – отрезки, которые отсекает прямая от осей координат.



Каноническое уравнение прямой

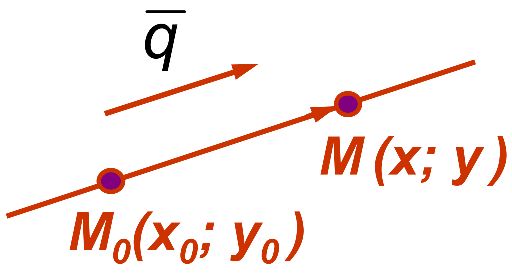
Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называется ***направляющим вектором*** этой прямой.

Требуется найти уравнение прямой, проходящей через заданную точку ***$M_0(x_0; y_0)$*** и параллельно заданному вектору $\overline{q} = \{l;\ m\}$

Очевидно, что точка ***$M(x; y)$*** лежит на прямой, только в том случае, если векторы

$$\overline{q} = \{l;\ m\} \text{ и } \overline{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0\}$$

коллинеарны.



По условию коллинеарности получаем:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}} \quad (4)$$

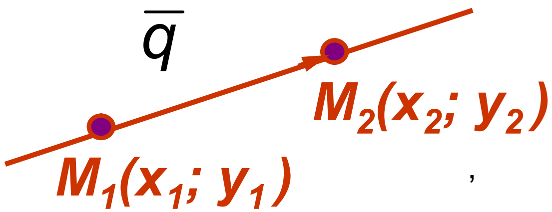
Каноническое *уравнение прямой*

Если каноническое уравнение приравнять параметру t : $\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=t$

$$\boxed{\begin{cases} x = lt + x_0 \\ y = mt + y_0 \end{cases}} \quad (5)$$

параметрическое *уравнение прямой*

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: ***$M_1(x_1; y_1)$*** и ***$M_2(x_2; y_2)$.***



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\overline{q}=\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1; y_2-y_1\}$$

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \quad (6)$$

Уравнение прямой, ***проходящей через две заданные точки***

Пример

Прямая проходит через точку *M(1; 2)* и имеет направляющий вектор: $\overline{q}=\{-1;3\}$

Записать: каноническое, общее уравнение прямой, уравнение прямой в отрезках, уравнение с угловым коэффициентом. Найти нормальный вектор прямой, отрезки, которые отсекает прямая от осей координат и угол, который составляет прямая с осью *OX.*

1. Каноническое уравнение: $\boxed{\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{3}}$

2. Общее уравнение: $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y-2}{3} \Rightarrow 3(x-1)=-(y-2) \Rightarrow$

$\boxed{3x+y-5=0}$ $\qquad \overline{N}=\{3;1\}$

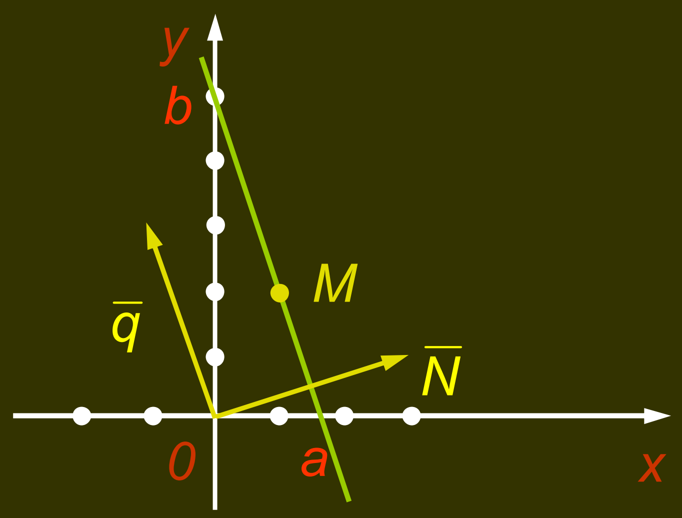
Пример

3. Уравнение в отрезках: $3x+y-5=0 \Rightarrow 3x+y=5 \Rightarrow$

$$\frac{3x}{5}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{5/3}+\frac{y}{5}=1} \qquad a=\frac{5}{3} \quad b=5$$

4. Уравнение с угловым коэффициентом: $3x+y-5=0 \Rightarrow$

$$\boxed{y=-3x+5} \qquad k=tg\alpha=-3$$

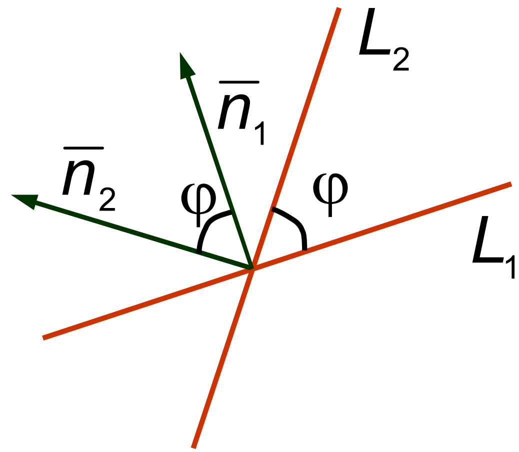


Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:

$$L_1: \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$L_2: \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$



Угол между этими прямыми определяется как угол между нормальными векторами к этим прямым:

$$\overline{n}_1 = \{A_1; B_1\} \qquad \overline{n}_2 = \{A_2; B_2\}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \cos(\overline{n}_1; \overline{n}_2) = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}}$$

$$A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 \perp L_2$$

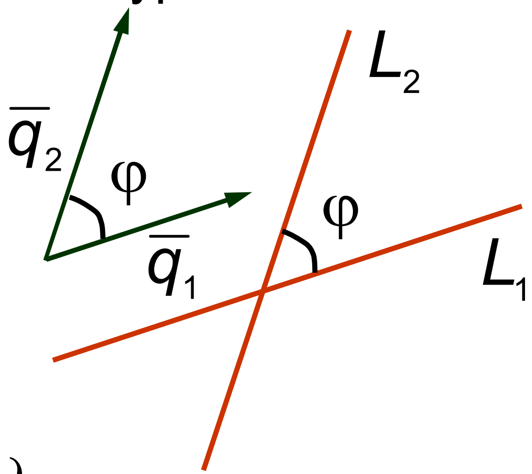
$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \Rightarrow \quad L_1 \parallel L_2$$

Угол между двумя прямыми

Пусть две прямые ***L*₁** и ***L*₂** заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \quad \frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}$$

$$L_2: \quad \frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}$$



Угол между этими прямыми определяется как угол между направляющими векторами к этим прямым: $\overline{q}_1=\{l_1;m_1\}$ $\quad \overline{q}_2=\{l_2;m_2\}$

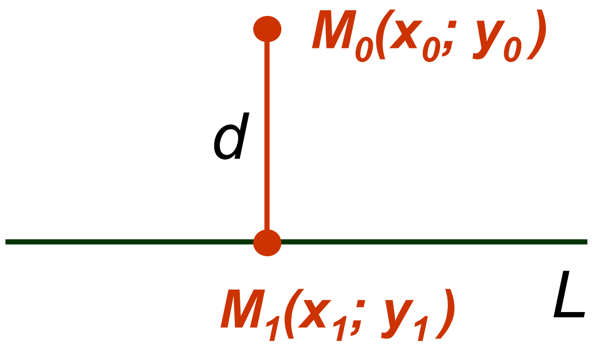
$$\cos\varphi=\cos(\overline{q}_1;\overline{q}_2)=\frac{\overline{q}_1\cdot\overline{q}_2}{|\overline{q}_1|\cdot|\overline{q}_2|}=\frac{l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

$$l_1\cdot l_2+m_1\cdot m_2=0 \quad\Rightarrow\quad L_1\perp L_2$$

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{m_1}{m_2} \quad\Rightarrow\quad L_1 \parallel L_2$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть необходимо найти расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением: $Ax + By + C = 0$



Расстояние от точки до прямой это длина перпендикуляра, опущенного на прямую из точки.

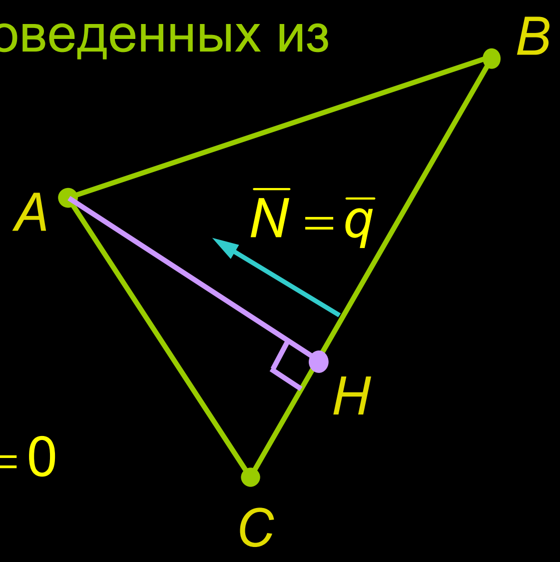
Для прямой, заданной своим общим уравнением $Ax + By + C = 0$ и точки $M_0(x_0, y_0)$ расстояние определяем по формуле:

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}}$$

Пример

Даны вершины треугольника: A(1; 1); B(10; 13); C(13; 6)

<u>Найти</u>: Уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины A.



1. Уравнение высоты:

$$(BC): \frac{x-10}{13-10} = \frac{y-13}{6-13} \Rightarrow \frac{x-10}{3} = \frac{y-13}{-7}$$

$$\Rightarrow -7x+70 = 3y-39 \Rightarrow 7x+3y-109=0$$

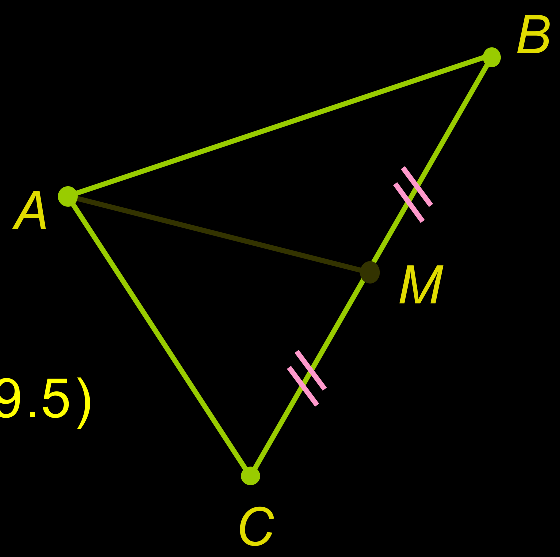
$$\overline{N} = \{7;3\}$$

$$(AH): \quad \overline{q} = \{7;3\} \quad \frac{x-1}{7} = \frac{y-1}{3} \Rightarrow 3x-3=7y-7 \Rightarrow$$

$$\boxed{3x-7y+4=0}$$

Пример

2. Уравнение медианы:



т. M: $\lambda = \frac{|BM|}{|MC|} = 1 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{10+13}{2} = 11.5 \\ y_M &= \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{13+6}{2} = 9.5 \end{aligned}\right\} \Rightarrow M(11.5; 9.5)$$

$$\frac{x-1}{11.5-1} = \frac{y-1}{9.5-1} \Rightarrow \frac{x-1}{10.5} = \frac{y-1}{8.5} \Rightarrow 8.5x - 8.5 = 10.5y - 10.5 \Rightarrow$$

$$8.5x + 10.5y + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{17x + 21y + 4 = 0}$$

Общее уравнение кривой второго порядка

Определение. Линия, определяемая уравнением второй степени относительно декартовых координат x и y:

$$\boxed{Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0}$$

Общее уравнение кривой второго порядка

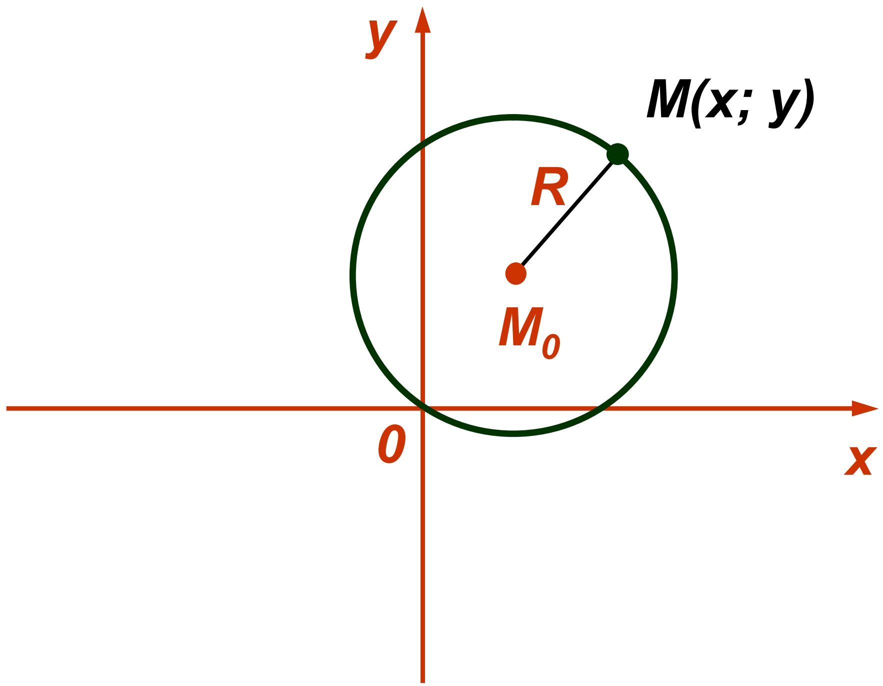
где A, B, C не равны нулю одновременно, есть кривая второго порядка.

К кривым второго порядка относятся: ***эллипс***, частным случаем которого является ***окружность***, ***гипербола*** и ***парабола***.

В некоторых частных случаях это уравнение может определять также две прямые, точку или мнимое геометрическое место.

Окружность

Окружностью называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от точки ***M_0 (a; b)*** на расстояние ***R***.



Для любой точки ***M*** справедливо:

$$\left|\overline{M_0M}\right| = R \quad \Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = R \quad \Rightarrow$$

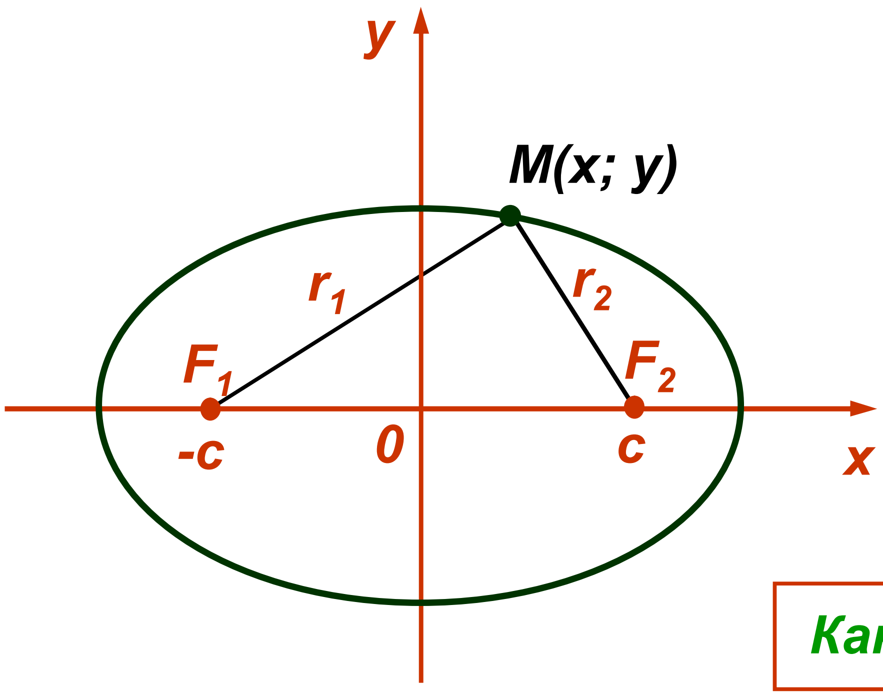
$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2}$$

Каноническое уравнение окружности

Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек той же плоскости , называемых ***фокусами***, есть величина постоянная.

$$F_1(-c;0); \quad F_2(c;0) \qquad r_1 + r_2 = 2a$$



$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

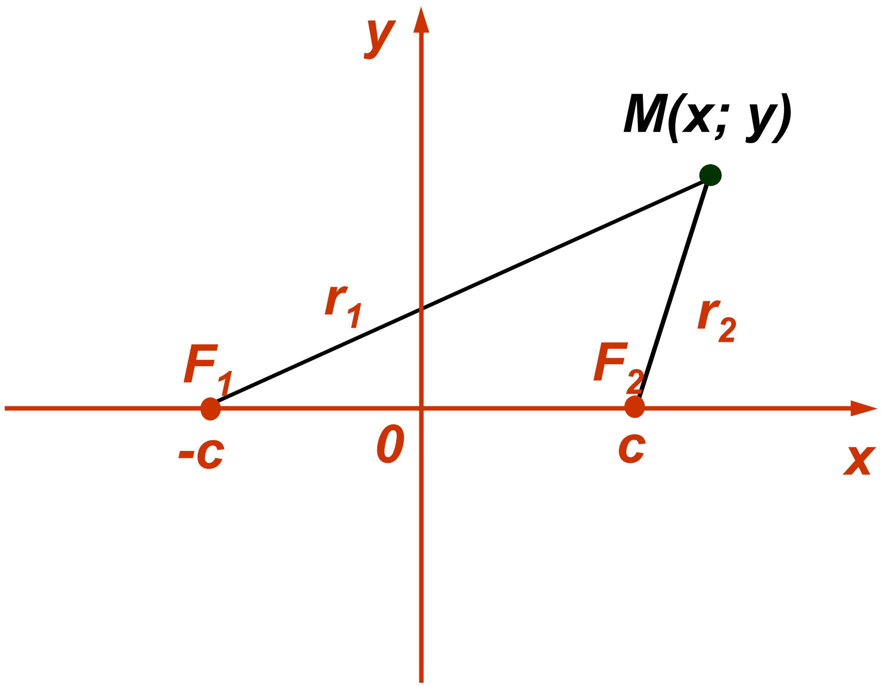
$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Каноническое уравнение эллипса

Гипербола

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух точек той же плоскости, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная.

$$F_1(-c;0); \quad F_2(c;0) \qquad |r_1 - r_2| = 2a$$



$$r_1 = \left|\overline{F_1M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$r_2 = \left|\overline{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Каноническое уравнение гиперболы

Парабола

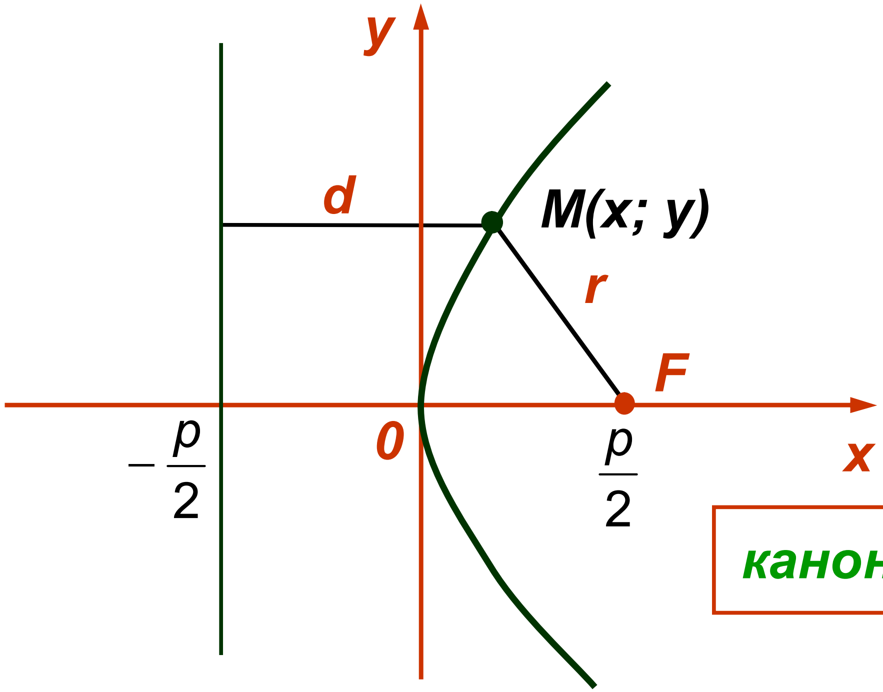
Параболой называется множество всех точек плоскости каждая из которых одинаково удалена некоторой фиксированной точки той же плоскости, называемой ***фокусом***, и данной прямой, называемой ***директрисой***.

$F(\frac{p}{2}; 0)$ $\underline{p > 0}$ - параметр

$x = -\frac{p}{2}$ $r = d$

$$r = |\overline{FM}| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$$

$$d = x + \frac{p}{2}$$

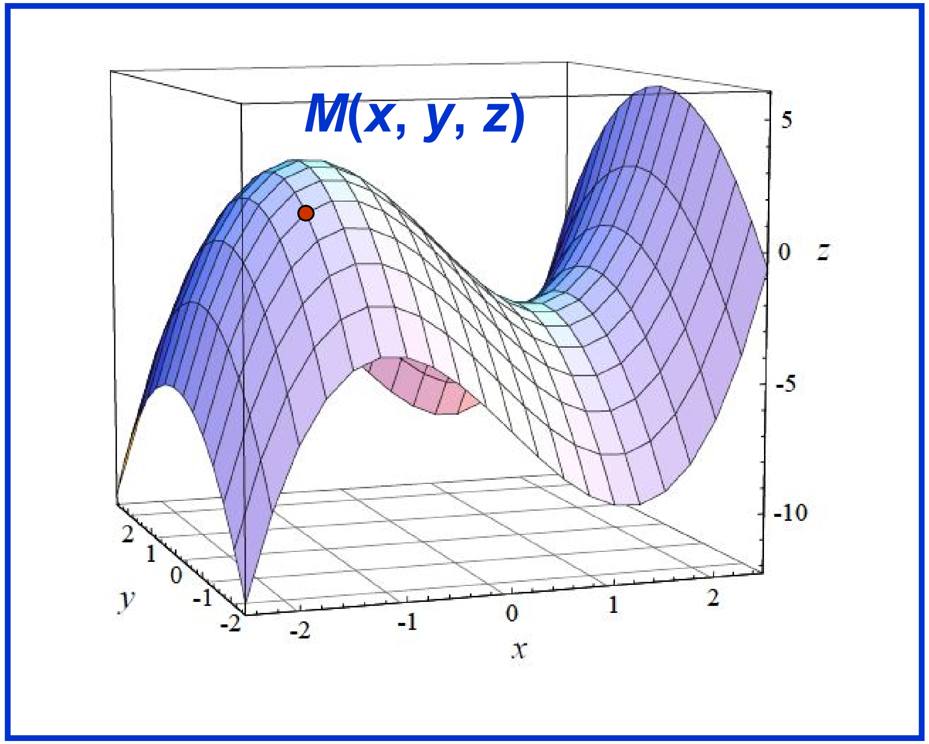


$$\boxed{y^2 = 2px}$$

канонического уравнение параболы

Аналитическая геометрия в пространстве

Определение. Уравнением поверхности в прямоугольной системе координат *Oxyz* называется такое уравнение $F(x, y, z) = 0$ с тремя переменными *x*, *y* и *z* которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на поверхности, и не удовлетворяют координаты точек не лежащими на этой поверхности.



Общее уравнение плоскости

Если в пространстве фиксирована произвольная декартова система координат *Oxyz*, то всякое уравнение первой степени с тремя переменными *x y z* определяет относительно этой системы плоскость.

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Общее уравнение плоскости

A; B; C; D – некоторые постоянные, причем из чисел *A; B; C* хотя бы одно отлично от нуля.

Вектор $\vec{n} = (A, B, C)$ является вектором перпендикулярным к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Его называют вектором ***нормальным*** данной плоскости (***вектором нормали***).

Общее уравнение плоскости называется ***полным***, если все коэффициенты *A; B; C; D* отличны от нуля.

В противном случае уравнение называется ***неполным***.

Уравнение плоскости в отрезках

Рассмотрим полное уравнение плоскости:

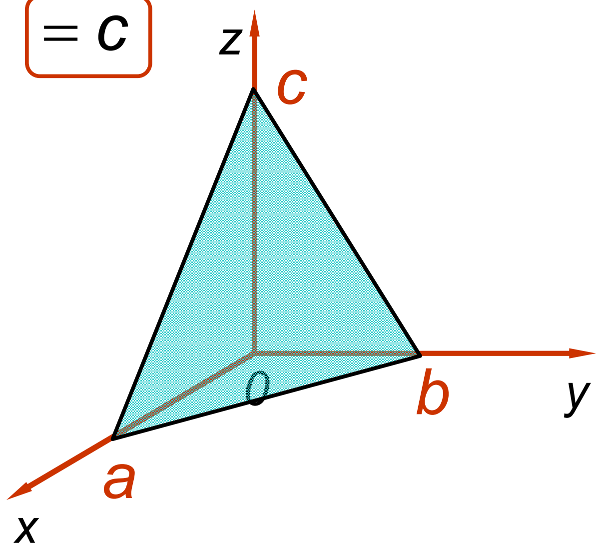
$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \Rightarrow \quad Ax + By + Cz = -D \quad \Rightarrow$$

$$\frac{Ax}{-D} + \frac{By}{-D} + \frac{Cz}{-D} = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1} \qquad \textbf{(2)}$$

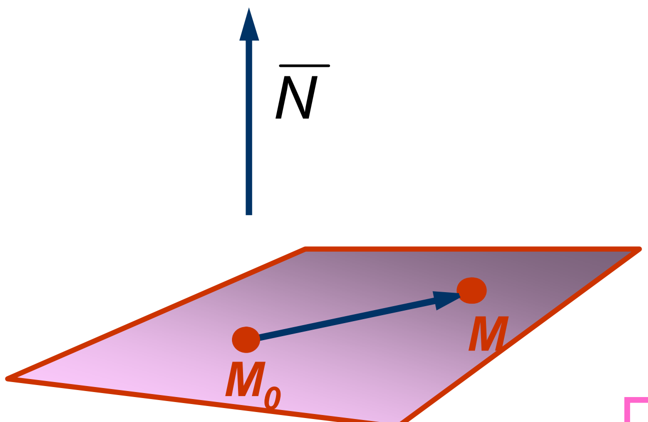
$= a$ $\quad = b$ $\quad = c$

Уравнение плоскости в отрезках

Уравнение в отрезках используется для построения плоскости, при этом a, b и c – отрезки, которые отсекает плоскость от осей координат.



Задача. Записать уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикулярно заданному ненулевому вектору $\vec{n} = (A, B, C)$



Возьмем произвольную точку $M(x; y; z)$ лежащую на плоскости и составим вектор:

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$$

$$\overline{N} = \{A; B; C\}$$

Нормальный вектор плоскости

Если точка M лежит в плоскости, то векторы $\overline{M_0M} \perp \overline{N}$.

Из условия перпендикулярности векторов:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \qquad \textbf{(3)}$$

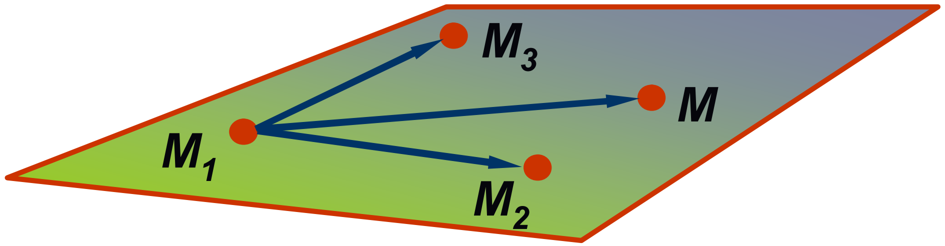
Его можно переписать в виде общего уравнения плоскости:
$Ax + By + Cz + D = 0$.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$ не лежат на одной прямой.

Тогда векторы: $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ не коллинеарны.

Точка $M(x; y; z)$ лежит в одной плоскости с точками M_1, M_2 и M_3 только в том случае, если векторы:



$\overline{M_1M_2}; \overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ компланарны.

$$\left(\overline{M_1M} \times \overline{M_1M_2}\right) \cdot \overline{M_1M_3} = \boxed{\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \mathbf{(4)}}$$

Уравнение плоскости, проходящей через 3 точки

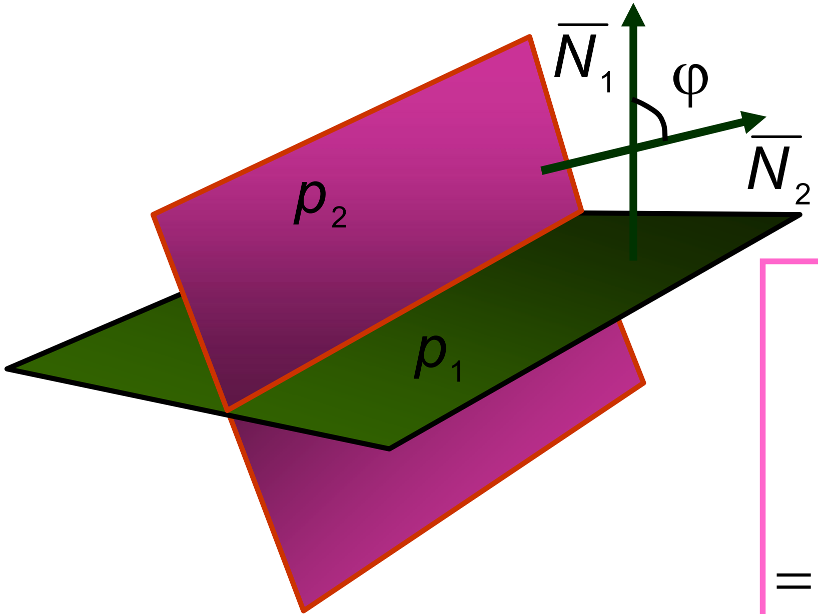
Угол между двумя плоскостями

Пусть две плоскости заданы общими уравнениями:

$$p_1: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$p_2: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Углом между этими плоскостями называется угол между нормальными векторами к этим плоскостям.



$$\overline{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$$

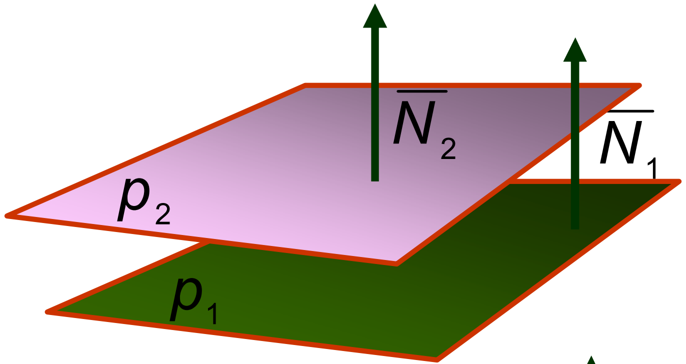
$$\overline{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$$

$$\cos\varphi = \frac{\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2}{\left|\overline{N}_1\right| \cdot \left|\overline{N}_2\right|} =$$

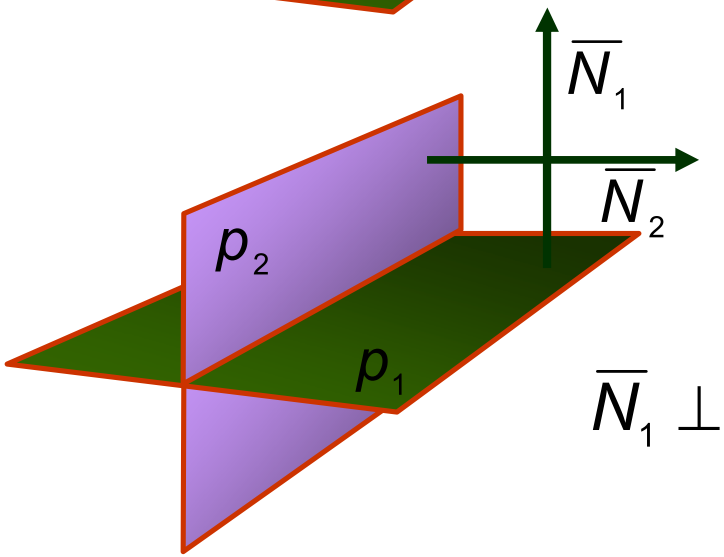
$$= \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Угол между двумя плоскостями

Условия параллельности и перпендикулярности плоскостей аналогичны условию параллельности и перпендикулярности нормальных векторов:



$$\overline{N}_1 \parallel \overline{N}_2 \Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}$$



$$\overline{N}_1 \perp \overline{N}_2 \Rightarrow \boxed{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2 = 0}$$

Пример

Записать уравнение плоскости, проходящей через 3 точки
B(0; 2; 5), C(3; -1; 4), D(4; 2; 1)

Уравнение плоскости *BCD*:

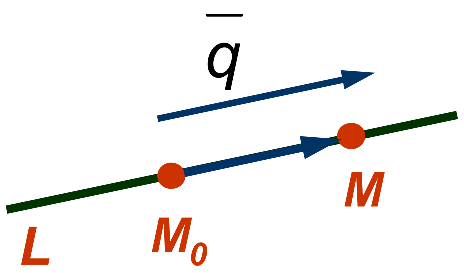
$$\begin{vmatrix} x-0 & y-2 & z-5 \\ 3-0 & -1-2 & 4-5 \\ 4-0 & 2-2 & 1-5 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-5 \\ 3 & -3 & -1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -4 \end{vmatrix} + (z-5) \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$12x + 8(y-2) + 12(z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{3x + 2y + 3z - 19 = 0}$$

Каноническое уравнение прямой

Пусть прямая L проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ параллельно вектору: $\bar{q} = \{m; n; p\}$



Тогда точка $M(x; y; z)$ лежит на прямой только в том случае, если векторы $\bar{q} = \{m; n; p\}$ и $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ коллинеарны

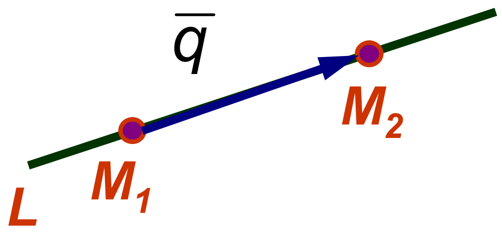
По условию коллинеарности двух векторов:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}} \qquad (1)$$

Каноническое уравнение прямой

$\bar{q} = \{m; n; p\}$ - направляющий вектор прямой

Пусть прямая проходит через две заданные и отличные друг от друга точки: ***$M_1(x_1; y_1; z_1)$*** и ***$M_2(x_2; y_2; z_2)$.***



Тогда в качестве направляющего вектора в каноническом уравнении можно взять вектор:

$$\overline{q} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}} \qquad \textbf{(3)}$$

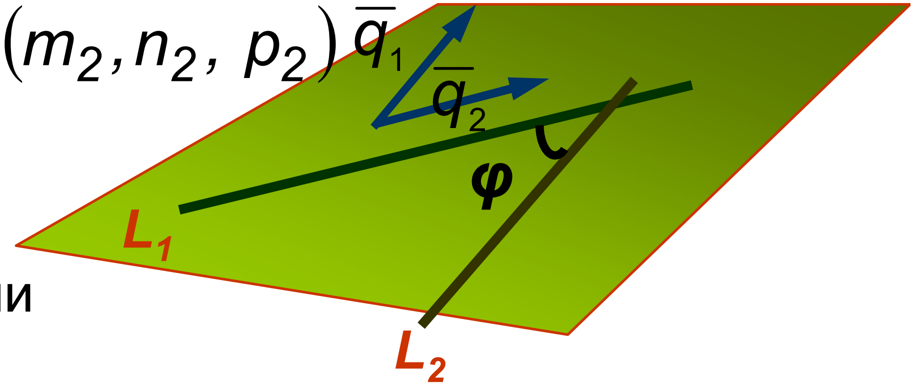
Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Угол между прямыми

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы каноническими уравнениями:

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \Rightarrow \overrightarrow{q_1}=(m_1,\, n_1,\, p_1)$$

$$L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \Rightarrow \overrightarrow{q_2}=(m_2, n_2,\, p_2)$$



Под углом между прямыми понимают угол между направляющими векторами

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{q_1}\cdot\overrightarrow{q_2}}{\left|\overrightarrow{q_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{q_2}\right|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_1^2+p_2^2}}$$

$$L_1 \| L_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$$

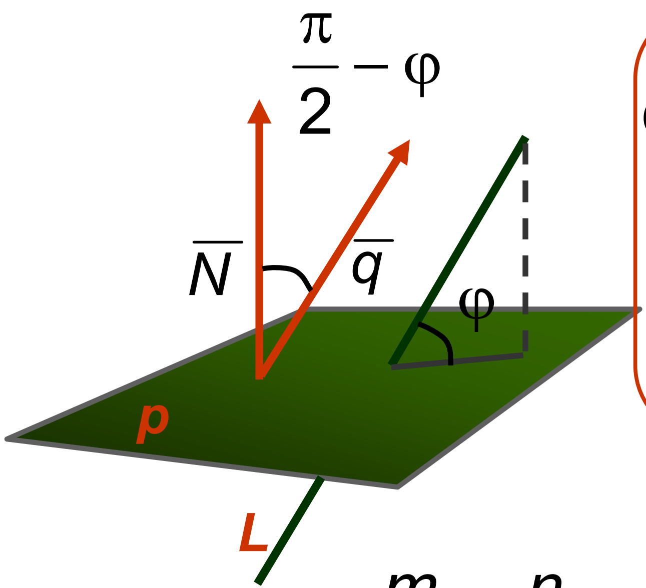
$$L_1 \perp L_2 \Rightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$$

Угол между прямой и плоскостью

Пусть прямая ***L*** задана каноническим уравнением: $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

Плоскость ***p*** задана общим уравнением: $Ax+By+Cz+D=0$

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и проекцией этой прямой на плоскость.



$$\cos(\overline{q},\overline{N})=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi=\frac{\left|\overline{q}\cdot\overline{N}\right|}{\left|\overline{q}\right|\cdot\left|\overline{N}\right|}=$$
$$=\frac{\left|m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C\right|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$L\perp p\iff\frac{m}{A}=\frac{n}{B}=\frac{p}{C}$$

$$L\parallel p\iff m\cdot A+n\cdot B+p\cdot C=0$$