Гл. 11. Дифференциальные уравнения.

§ 1.1 Дифференциальные уравнения.

Определение 1. *Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную, её функцию и производные различных порядков этой функции.*

Общий вид дифференциального уравнения n-ого порядка:

$$F(x,y,y',y''...y^{(n)})=0$$

(1)

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной в него входящей.

Примеры:

$y'+2\sin y\cdot x=2$ - дифференциальное уравнение I-го порядка

$y''+\cos x\cdot y'+\sin y=0$ - дифференциальное уравнение II-го порядка

Определение 2. *Любая функция* $y=\varphi(x)$*, которая удовлетворяет данному дифференциальному уравнению (1), т.е. обращает его в тождество при замене* y *и его производных на* $\varphi(x)$ *и её производные называется решением дифференциального уравнения*

Замечание 1. *Если искомая функция* $y=\varphi(x)$ *зависит от одной переменной то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.*

Замечание 2. *Если искомое решение получено в неявном виде, то это интеграл уравнения.*

График решения обыкновенного дифференциального уравнения I - ого порядка называется интегральной кривой этого уравнения.

Термин проинтегрировать дифференциальное уравнение означает найти те или иные его решения.

Определение 3. *Общим решением дифференциального уравнения (1) называется такое его решение:* $y=\varphi(x,C_1,C_2,...,C_n)$ *которое содержит столько независимых произвольных постоянных* $C_1,C_2,...,C_n$*, каков порядок этого уравнения.*

Если общее решение задано в неявном виде $\Phi(x,y,C_1,C_2,...,C_n)=0$, то его называют общим интегралом.

§ 1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка:

$$F(x,y,y')=0$$

(2)

или $y' = f(x, y)$ - форма дифференциального уравнения разрешённого относительно производной,

$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ - форма дифференциального уравнения в дифференциалах.

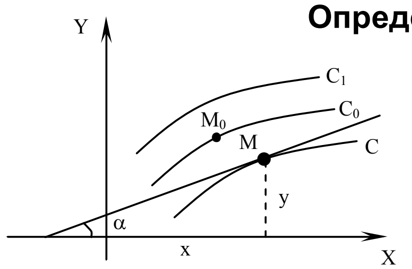

Рис.1

Определение 1. *Общим решением дифференциального уравнения (2) называется такая функция $\varphi(x,C)$ двух аргументов x и C , которая при постоянном C рассматривается как функция одного переменного. Решения $\varphi(x,C_0)$, которые получаются из общего решения $\varphi(x,C)$ при нахождении постоянной $C = C_0$, называются его частными решениями.*

На рис.1 изображено семейство кривых, т.е. совокупность линий соответствующих различным значениям постоянных C. Интегральные кривые обладают свойством, что в каждой их точке $M(x, y)$ наклон касательной удовлетворяет условию:

$tg\alpha = f(x, y)$

Если задана точка $M(x_0, y_0)$, то из бесконечного семейства интегральных кривых выделяется одна интегральная кривая, которая соответствует частному решению дифференциального уравнения. Это означает наличие начального условия $y = y_0$ при $x = x_0$.

Для известного общего решения $y = \varphi(x,C)$, можно найти $y_0 = \varphi(x_0,C)$, что позволяет определить C и найти частное решение.

Дифференциальное уравнение с заданными начальными условиями называется задача Коши:

Найти решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2), удовлетворяющее данному начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, т.е. принимающее при $x = x_0$, заданное значение $y = y_0$.

Замечание 1. *Если решение дифференциального уравнения не может быть получено из общего ни при каких начальных условиях оно называется особым.*

§ 1.3 Простейшие дифференциальные уравнения первого порядка.

1) Дифференциальные уравнения с разделёнными переменными:

$$f_1(x)dx = f_2(y)dy ,$$

где множителем при dx является функция, зависящая только от x , а множителем при dy - функция, зависящая только от y .

Решение находится методом интегрирования обеих частей.

$$\int f_1(x)dx = \int f_2(y)dy + C$$

Пример 1. $2xdx-(5y^4+\cos y)dy=0$

$$\int 2xdx=\int(5y^4+\cos y)dy$$

$x^2=y^5+\sin y+C$ **-** общий интеграл.

2) Дифференциальные уравнения вида $y'=f_1(x)f_2(y)$, где правая часть представляет собой произведение двух функций, из которых одна не зависит от x, а вторая не зависит от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Метод решения: $\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+C$

Пример 2. $2x+\frac{y'}{y}=0$

$y'=\frac{dy}{dx}$ **;** умножаем на dx обе части уравнения

$2xdx+\frac{dy}{y}=0$ $\qquad$ $\int 2xdx+\int\frac{dy}{y}=0$

$x^2+\ln y=C$ - общий интеграл

$\ln y=C-x^2$; $\qquad$ $e^{C-x^2}=y$ - общее решение

3) Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными, записанные в форме дифференциалов:

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx+f_3(x)f_4(y)dy=0 \text{ или } y'=f_1(x)\cdot f_2(y)$$

$$\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\frac{f_4(y}{f_2(y}f_3(x)f_4(y)dy=0$$

для решения таких дифференциальных уравнений их надо привести к виду 1 т.е. к дифференциальным уравнениям с разделёнными переменными.

$$\int\frac{f_1(x)}{f_3(x)}dx+\int\frac{f_4(y)}{f_2(y)}dy=C$$

Пример 3. $2x\sin ydx-(x^2+3)\cos ydy=0$

$2x\sin ydx=(x^2+3)\cos ydy$

Разделим на произведение $\sin y(x^2+3)$

$$\frac{2x\sin ydx}{\sin y(x^2+3)}=\frac{(x^2+3)\cos ydy}{\sin y(x^2+3)} \quad\to\quad \frac{2xdx}{x^2+3}=\frac{\cos ydy}{\sin y}$$

Проинтегрируем полученные выражения

$$\int\frac{2xdx}{x^2+3}=\int\frac{\cos ydy}{\sin y} \quad\to\quad \ln\left|x^2+3\right|=\ln\left|\sin y\right|+\ln C$$

по свойству логарифмов $(x^2+3)=C\cdot\sin y$ - общий интеграл дифференциального уравнения.

Определение 1. *Функция f(x,y) называется однородной функцией n-ого измерения, если при замене в ней переменных x и y соответственно на tx и ty, где t - произвольная величина (параметр) получается та же функция, умноженная на* t^n *, т.е. если выполняется условие:* $f(tx,ty)=t^n\cdot f(x,y)$

n – степень однородности уравнения.

Однородная функция степени *n* представима в виде

$$f(x,y)=x^n\cdot\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Однородная функция нулевой степени может быть записана в виде

$$f(x,y)=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Определение 2. *Если функции M(x,y) и N(x,y) однородные одной и той же степени n, то дифференциальное уравнение*

M(x,y)dx+ N(x,y)dy=0 (3) *называется однородным.*

Например уравнение $\left(x^2+y^2\right)dx+x^2dy=0$ является однородным поскольку функции x^2+y^2 и x^2 являются однородными. (Проверьте самостоятельно).

Уравнение $y'=f(x,y)$ называется однородным, если оно имеет вид:

$$y'=\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

(4)

Очевидно, что $f(x,y)$ - однородная функция нулевого измерения.

Уравнения (3) и (4) приводятся к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки.

$t=\dfrac{y}{x}$ т.е. $y=t\cdot x$ и $y'=t'x+t$ или в дифференциалах $dy=tdx+xdt$

Пример 4. $y'=\dfrac{y}{x}+tg\dfrac{y}{x}$ $\dfrac{y}{x}=t$; $y'=\dfrac{dy}{dx}$**.** Использовав замену переменных имеем $t'x+t=t+tgt$. Далее $t'x=t+tgt-t$

$t'x=tgt$, так как $t'=\dfrac{dt}{dx}$, то $\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{tgt}{x}$. Разделив переменные получим

$\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{dt}{tgt}$ и после интегрирования $\ln x=\ln|\cos t|+\ln|C|$.

Применив свойства логарифмов получим $x=\cos t\cdot C$, вернемся к исходной функции и получим общий интеграл уравнения $x=C\cdot\cos\dfrac{y}{x}$.

Другой способ: $dy=\left(\dfrac{y}{x}+tg\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)dx$, воспользуемся заменой

$tdx+xdt=(t+tgt)dx$ приведём подобные по дифференциалам

$tdx-tdx-tgtdx=xdt=tdx+tgtdx-tdx$

$xdt=tgtdx$ разделив переменные и проинтегрировав получим тот же ответ.

§ 1.4 Линейные уравнения первого порядка.

Определение 1. *Линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка называется такое дифференциальное уравнение, в которое неизвестные функции y и y' входят в первых степенях и не перемножаются между собой.*

Общий вид линейного уравнения первого порядка:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x) \tag{5}$$

Если $Q(x) = 0$, то уравнение (5) – линейное однородное и одновременно с разделяющимися переменными.

Методы решения: метод Бернулли и метод Лагранжа

а) Метод Бернулли.

1) Будем искать решение в виде $y = U \cdot V$, тогда $y' = U'V + V'U$ или $dy = Vdu + Udv$ (это подстановка Бернулли, где V - вспомогательная функция.)

Пример 1. $xy' - 2y = 2x^4$ $\qquad x(U'V + V'U) - 2UV = 2x^4$

$$xU'V + xV'U - 2UV = 2x^4$$

2) $xU'V + U(xV' - 2V) = 2x^4$ найдём функцию V таким образом, чтобы выражение в скобках было равно нулю.

$$xV' - 2V = 0$$

$$x\frac{dV}{dx} = 2V$$

$$\int \frac{dV}{V} = 2\int \frac{dx}{x}$$

Интегрируя уравнение, получаем $\ln V = \ln x^2 \Rightarrow V = x^2$. Поскольку функция V выбрана, чтобы удовлетворять определенному условию мы опускаем постоянную C. Полученное выражение подставляем в исходное уравнение (пункт 2).

$$x \cdot \frac{dU}{dx} \cdot x^2 = 2x^4$$

$$\frac{dU}{dx} = x \Rightarrow U = \int xdx = x^2 + C$$

Объединив полученные выражения для V и U подстановке Бернулли получим окончательное общее решение уравнения $y = x^2(x^2 + C)$.

б) Метод вариации произвольной постоянной. (Метод Лагранжа)
Покажем применение метода на том же примере.

1) $xy' - 2y = 2x^4$

Сначала решаем данное уравнение без правой части: $xy' - 2y = 0$.

$$x\frac{dy}{dx} = 2y$$

$$xy' - 2y = 0 \qquad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x} \qquad \ln y = 2\ln x + \ln C \qquad y = C \cdot x^2$$

Пусть $C=C(x)$ - некоторая неизвестная функция в уравнение (1), тогда $y = x^2 \cdot C(x)$ и $y' = 2x \cdot C(x) + x^2 \cdot C'(x)$. Подставляем в исходное уравнение

$$x \cdot 2x \cdot C(x) + x \cdot x^2 \cdot C'(x) - 2x^2 C(x) = 2x^4 \qquad \div (x^2)$$

$$2C(x) + x \cdot C'(x) - 2C(x) = 2x^2$$

$$C'(x) = 2x \Rightarrow C(x) = \int 2x dx = x^2 + C$$

Подставляем полученное выражение в $y = C(x) \cdot x^2$ и получаем окончательное решение $y = x^2(x^2 + C)$.

в) Уравнение Бернулли.

Общий вид уравнения: $y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$, слева линейное выражение, а справа присутствует множитель y^n ($(n = const)$).

Умножим обе части на $\frac{1}{y^n}$

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x)$$

Применив подстановку $z(x) = \frac{1}{y^{n-1}}$ и $\frac{dz}{dx} = z' = (1-n) \cdot \frac{1}{y^n} \cdot y'$, $\frac{1}{y^n} \cdot y' = \frac{z'}{(1-n)}$ получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{z'}{(1-n)} + P(x)z(x) = Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z(x) = Q(x)(1-n)$$

Это линейное уравнение I-го порядка, для его решения применяем, например, подстановку Бернулли.

Пример 1. $y' + 2y = y^{2} \cdot e^x \quad n = 2$ $(\div y^2)$

$$z = \frac{1}{y^{2-1}} = \frac{1}{y}$$

$$z' + (-1)2z(x) = e^x(-1)$$

$$z' - 2 \cdot z(x) = -e^x$$

Применяем подстановку Бернулли

$$z = U \cdot V \qquad z' = U'V + V'U$$

(1) $U'V + V'U - 2UV = -e^x$

$$V' - 2V = 0 \quad \frac{dV}{V} = 2dx$$

$$\ln|V| = 2x \quad V = e^{2x}$$

$$U'e^{2x} = -e^x \quad \rightarrow (1)$$

Замечания:

$$\frac{dU}{dx} = -e^{-x} \quad dU = e^{-x}dx \; ; \; U = e^{-x} + C$$

$$Z = e^{2x}(e^{-x} + C) \quad y = \frac{1}{Ce^{2x} + e^{x}}$$

Второй способ.

$$y' + 2y = y^{2} \cdot e^{x}$$

$$y = U \cdot V \quad y' = U'V + V'U$$

$$U'V + V'U + 2UV = e^{x} \cdot U^{2} \cdot V^{2}$$

$$V' + 2V = 0 \quad \frac{dV}{V} = -2dx \quad \ln|V| = -2x \quad V = e^{-2x}$$

$$U' \cdot e^{-2x} = e^{x} \cdot U^{2} \cdot e^{-4x}$$

$$U' = U^{2} \cdot e^{-x} \quad \frac{dU}{dx} = U^{2} \cdot e^{-x} \quad \frac{dU}{U^{2}} = e^{-x}dx$$

$$-\frac{1}{U} = -e^{-x} - C \quad U = \frac{1}{C + e^{-x}} \quad y = \frac{e^{-2x}}{C + e^{-x}} = \frac{1}{Ce^{2x} + e^{x}}$$

§ 1.5 Уравнения в полных дифференциалах.

Определение 1. *Уравнением в полных дифференциалах называется дифференциальное уравнение вида:*
M(x, y)dx+N(x, y)dy=0, где M(x, y)dx+N(x, y)dy=dU(x, y) –полный дифференциал функции U(x, y), то есть dU(x,Y)=0

если в области D определения функции M(x, y) и *N(x, y)* и существования решения дифференциального уравнения выполняется равенство

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Общий интеграл дифференциального уравнения *dU(x,Y)=0* ищем в виде а) или b)

а) $U(x,y) = \int M(x,y_0)dx + \varphi(y)$

b) $U(x,y) = \int N(x,y)dy + \varphi(x)$

неизвестные $\varphi(y)$ и $\varphi(x)$ находят из второго условия

Пример 1. $(3x^{2}y + y^{2})dx + (x^{3} + 2xy + 10y)dy = 0$

$$M(x,y) = 3x^{2}y + y^{2} \quad N(x,y) = x^{3} + 2xy + 10y$$

Общий интеграл:

$$U(x,y) = \int (3x^{2}y + y^{2})dx + \varphi(y) = x^{3}y + y^{2}x + \varphi(y)$$

ищем в виде а) $\frac{du}{dy} = 2xy + x^{3} + \varphi'(y) = x^{3} + 2xy + 10y$ значит

$\varphi'(y) = 10y$,отсюда $\varphi(y) = 5y^{2} + C$

$U(x,y) = x^{3}y + xy^{2} + 5y^{2} + C$ - решение.

§ 1.6 Уравнения высших порядков.

Определение 1. *Все дифференциальные уравнения порядка выше первого называют дифференциальными уравнениями высших порядков.*

Общий вид:

$$F(x, y, y' ... y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

В форме, разрешённой относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y' ... y^{(n-1)}) \tag{2}$$

Общее решение будет зависеть от n произвольных постоянных. Для выделения частного решения задаются дополнительные условия. Для уравнения (n)-ого порядка в качестве начальных условий задают значения искомой функции и всех её производных до (n-1) порядка включительно ,т.е.:

$$x = x_0 \ ; \ y = y_0 \ ; \ y' = y'_0 \ ; \ldots \ y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$$

$$\begin{cases} x = x_0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \tag{3}$$

Система (3) – система начальных условий.

Определение 2. *Задачу нахождения частного решения дифференциального уравнения (1), удовлетворяющую системе начальных условий (3), называют задачей Коши.*

§ 1.7 Уравнения, допускающие понижение порядка.

1) Уравнения вида:

$$y^{(n)} = f(x)$$

Порядок понижается путём непосредственного интегрирования.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$$

Пример 1. $y''' = 3x^2$

$$y'' = \int 3x^2 dx = x^3 + C_1$$

$$y' = \frac{x^4}{4} + C_1 x + C_2$$

$$y = \frac{x^5}{20} + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 \quad \text{- общее решение}$$

Заметим, что количество постоянных C_i в общем решении всегда равно порядку исходного дифференциального уравнения

2) Уравнения, не содержащие искомой функции y т.е. вида:

$$F(x, y', y'') = 0$$

Замечания:

Замечания:

Метод решения: Вводится новая неизвестная функция $\begin{matrix} z(x) = y' \\ z'(x) = y'' \end{matrix}$

получаем $F(x, z, z') = 0$ - уравнение 1-го порядка

Пример 2. $y'' - \dfrac{y'}{x} = xe^x$; $y' = z(x)$; $y'' = z'(x)$

$z' - \dfrac{z}{x} = x \cdot e^x$ - линейное дифференциальное уравнение I-го порядка решаем методом Бернулли $z = U \cdot V$

$z' = U'V + V'U$

$$U'V + V'U - \frac{UV}{x} = xe^x \quad V\left(U' - \frac{U}{x}\right) + V'U = xe^x$$

$$U'V + U\left(V' - \frac{V}{x}\right) = xe^x \quad \left(V' - \frac{V}{x}\right) = 0 \quad \frac{dV}{dx} = \frac{V}{x} \quad \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x}$$

$\ln V = \ln x \quad V = x$

найдём функцию U из условия $\left(U' - \dfrac{U}{x}\right) = 0$.

$$\frac{dU}{dx} = \frac{U}{x} \ ; \ \frac{dU}{U} = \frac{dx}{x} \ ; \ \ln U = \ln x \ ; \ U = x$$

,тогда

$U'x = xe^x$; $dU = e^x dx$; $U = e^x + C_1$

$z = UV = x(e^x + C_1)$ вернёмся к исходной функции

$y' = x(e^x + C_1)$; $dy = x(e^x + C_1)dx$

$y = \int xe^x dx + C_1 \int xdx$;

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} U = x & dU = dx \\ e^x dx = dV & V = e^x \end{vmatrix} =$$

$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1)$$

$y = e^x(x-1) + \dfrac{C_1 x^2}{2} + C_2$ - общее решение.

3) Уравнение не содержащее независимой переменной x;

$$F(y, y', y'') = 0$$

Метод решения: Пусть y - новая независимая переменная, тогда

$p(y) = y'$ - новая функция

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

$$y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

Пример 3. $y^3 \cdot y'' = -1$ нач. усл. $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$

$$y^3 \cdot y'' = -1 \ ; \ y' = p(y) \ ; \ y'' = p \cdot \frac{dp}{dy}$$

$$y^3 \cdot p\frac{dp}{dy} = -1 \ ; \ pdp = -\frac{dy}{y^3}$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{1}{2y^2} + \frac{C_1}{2} \quad \text{или} \quad p^2 = \frac{1}{y^2} + C_1$$

воспользуемся н.у. $y' = p = 0 \quad y = 1$ найдём C_1

$$0 = 1 + C_1 \Rightarrow \quad C_1 = -1$$

$$p^2 = \frac{1}{y^2} - 1 \ ; \ p = \sqrt{\frac{1-y^2}{y^2}} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$p = \frac{dy}{dx} \ ; \ \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{y}$$

$$\frac{ydy}{\sqrt{1-y^2}} = dx \ ; \ \frac{1}{2}\int \frac{dy^2}{\sqrt{1-y^2}} = x + C_2$$

$$-\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-y^2} = x + C_2 \ ; \ -\sqrt{1-y^2} = x + C_2$$

найдём C_2 при $y = 1 \quad x = 1$

$$-\sqrt{1-1} = 1 + C_2 \ ; \ C_2 = -1$$

$$-\sqrt{1-y^2} = x - 1$$

Ответ: $1 - x = \sqrt{1-y^2}$ - частное решение.

Определение 1. *Линейным дифференциальным уравнением n-ого порядка называется уравнение вида:*

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = b \qquad (1),$$

где $a_1 \ldots a_n, b$ *, b - произвольные функции от x.*

Линейное – нет произведений и все функции и производные в 1-ой степени.

Если $a_0(x) \not\equiv 0$ то уравнение можно записать в “приведённом” виде.

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots p_n(x)y = f(x) \qquad (2)$$

Если *f(x)=0* , то

$$y^n + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots p_n(x)y = 0 \qquad (3)$$

Линейное однородное дифференциальное уравнение.

§ 1.8 Теоремы о свойствах частных решений линейных однородных дифференциальных уравнений.

Замечания:

Теорема 11.1. Если функция y_1 является решением уравнения (3), то и функция $C \cdot y_1$, есть решение этого уравнения.

Теорема 11.2. Если функции y_1 и y_2 являются решением уравнения (3), то и функция $y_1 + y_2$, есть решение этого уравнения.

Линейной комбинацией функций $y_1 \dots y_n$ называют выражения вида:
$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$,где $C_1, \dots, C_n$ - произвольные постоянные.

Теорема 11.3. Если $y_1 \dots y_n$ - частные решения линейного однородного дифференциального уравнения (3), то их линейная комбинация
$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ есть также решение этого уравнения.

Определение 1. *Рассмотрим систему функций $y_1, y_2 \dots y_n$ определённых и непрерывных на одном и том же отрезке $[a, b]$. Эта система функций называется линейно зависимой на отрезке $[a, b]$, если существует n таких чисел $\alpha_1 \dots \alpha_n$, что выполняется соотношение:*

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots \alpha_n y_n \equiv 0$$

(4)

для всех x на данном отрезке. При этом предполагают, что числа $\alpha_1 \dots \alpha_n$ не равны нулю одновременно.

Линейная зависимость системы функций означает, что хотя бы одна из функций системы представляет собой линейную комбинацию остальных.

Определение 2. *Если функции системы $y_1 \dots y_n$ дифференцируемы (n-1) - раз, то из них можно построить определитель n - ого порядка вида:*

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Это определитель Вронского (ВВронскиа)

Теорема 11.4 Если $y_1 \dots y_n$ линейно независимые функции, удовлетворяющие некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению n - ого порядка, то вронскиан такой системы не обращается в нуль ни в одной точке.

Теорема 5. Если функции $y_1, y_2 \dots y_n$ - линейно зависимы, то вронскиан системы тождественно равен нулю.

Определение 3. *Систему частных решений $y_1 \dots y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения n - ого порядка будем называть фундаментальной, если она состоит из n линейно независимых функций.*

Любое линейное однородное дифференциальное уравнение обладает бесконечным множеством фундаментальных систем.

Замечания:

Теорема 11.5 (об общем решении линейных однородных дифференциальных уравнении) Если функции $y_1 \dots y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (3), то их линейная комбинация $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ является общим решением однородного уравнения.

§ 1.9 Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами.

Определение 1. *Линейное однородное дифференциальное уравнение вида:*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots p_n y = 0$$

(1)

в котором все коэффициенты $p_1 \dots p_n$ *являются постоянными, есть линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами.*

Частные решения этого уравнения следует искать среди таких функций, которые в алгебраическом смысле подобны своим производным.

Будем искать частные решения в виде $y = e^{kx}$, тогда:

$$y' = ke^{kx}$$

$$y'' = k^2 e^{kx}$$

…

$y^{(n)} = k^n e^{kx}$ подставив в уравнение, получим:

$$k^n e^{kx} + p_1 \cdot k^{n-1} e^{k\lambda x} + \dots p_n e^{kx} = 0$$

$$e^{kx}(k^n + k^{n-1} p_1 + \dots p_n) = 0$$

$$e^{kx} f(k) = 0 \qquad (2)$$

где *f(k)*- характеристический многочлен данного дифференциального уравнения.

Функция e^{kx} тогда и только тогда удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянным коэффициентом (1), когда число *k* является корнем характеристического уравнения

$$f(k) = 0 \qquad (3)$$

Возможно несколько случаев корней характеристического уравнения:

1) Все корни действительные и разные.

Имеем *n* действительных корней $k_1, \dots, k_n$, каждому соответствует частное решение: $\left.\begin{array}{l} k_1 \to y_1 = e^{k_1 x} \\ k_2 \to y_2 = e^{k_2 x} \\ k_n \to y_n = e^{k_n x} \end{array}\right\}$ фундаментальная система решений.

Общее решение: $y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} + \dots c_n e^{k_n x}$

Докажем, что функции $e^{k_1 x}$, $e^{k_2 x}, \dots, c_n e^{k_n x}$ являются фундаментальной системой решений.

Замечания:

Для этого составим из них определитель Вронского:

$$\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} & \dots & e^{k_nx} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} & \dots & k_ne^{k_nx} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1}e^{k_1x} & k_2^{n-1}e^{k_2x} & \dots & k_n^{n-1}e^{k_nx} \end{vmatrix}$$

$$= e^{(k_1+k_2+\dots+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0$$

2) Все корни различны, но среди них имеются комплексные.

Если $k = a + bi$ - один из корней, то

$\bar{k} = a - bi$ - комплексно-сопряжённый ему и им соответствуют

2 частных решения.

$$y_k = e^{(a+ib)x} \text{ и } y_s = e^{(a-ib)x}$$

Рассмотрим линейные комбинации этих решений, которые также являются решениями.

$$\tilde{y}_k = \frac{y_k + y_s}{2} \text{ и } \tilde{y}_s = \frac{y_k - y_s}{2}$$

Применим формулы Эйлера: $\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}$$

тогда $\tilde{y}_k = \dfrac{e^{(a+ibx)} + e^{(a-ib)x}}{2} = e^{ax} \cdot \dfrac{e^{ib} + e^{-ib}}{2} = e^{ax}\cos bx$

$$\tilde{y}_s = \frac{e^{(a+ibx)} - e^{(a-ib)x}}{2} = e^{ax} \cdot \frac{e^{ib} - e^{-ib}}{2} = e^{ax}\sin bx$$

аналогично $\tilde{y}_s = e^{ax}\sin bx$

т.е. паре комплексных корней $k_{1,2} = a \pm ib$ соответствуют решения

$$\tilde{y}_k = e^{ax}\cos bx$$
$$\tilde{y}_s = e^{ax}\sin bx$$

3) Среди корней характеристического уравнения есть кратные.

Если $\tilde{k}$ есть корень кратности *s*, то ему соответствуют *s* – линейно независимых решений: $y_1 = e^{\tilde{k}x}$

$y_2 = xe^{\tilde{k}x}$

...

$y_s = x^{s-1} \cdot e^{\tilde{k}x}$, при каждом совпадении корня в решение добавляется множитель x.

Пример 1. $y'' - 12y' + 35y = 0$

Замечания:

$k^2 - 12k + 35 = 0$

$k_1 = 5 \;\; k_2 = 7$

$$y_1 = e^{5x} \;,\; y_2 = e^{7x}$$

$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{7x}$

Пример 2. $y'' - 2y = 0$

$k^2 - 2k = 0 \quad k_1 = 0 \;\; k_2 = 2$

$$y_1 = e^{0x} = e^0 = 1 \;,\; y_2 = e^{2x}$$

$y = C_1 + C_2 e^{2x}$

Пример 3. $y'' - 6y' + 9y = 0$

$k^2 - 6k + 9 = 0 \qquad k_{1,2} = 3$

$$y_1 = e^{3x} \;,\; y_2 = xe^{3x}$$

$y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$

Пример 4. $y'' - 6y' + 25 = 0$

$k^2 - 6k + 25 = 0 \quad D = 36 - 100 = -64 \quad k_{1,2} = 3 \pm 4i$

$$y_1 = e^{3x}\cos 4x \;,\; y_2 = e^{3x}\sin 4x \,.$$

$y = C_1 e^{3x} \mathit{cos} 4x + C_2 e^{3x} \mathit{sin} 4x$

§ 1.10 Неоднородные линейные дифференциальные уравнения.

Неоднородным линейным дифференциальным уравнением называют уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots p_n(x)y = f(x) \qquad (1)$$

Теорема 11.6 Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного.

$y = Y_0 + \widetilde{Y}$.

Теорема 11.7 Если правая часть неоднородного уравнения есть сумма двух функций $f_1(x) + f_2(x)$, то частное решение такого уравнения можно получить как сумму частных решений аналогичных уравнений с правыми частями соответственно $f_1(x)$ и $f_2(x)$. (принцип наложения)

Способ неопределённых коэффициентов.

Применяется для нахождения частного решения неоднородного дифференциального уравнения

Способ применим для уравнений с постоянными коэффициентами и специальным видом правой части: показательные функции, синусы, косинусы, многочлены или их целые рациональные комбинации.

Частное решение следует искать в форме, аналогичной форме правой части.

Случай 1:

$f(x)=P_n(x)$-многочлен n-ной степени.

$\tilde{y}=Q_n(x)$ - если среди корней характеристического уравнения нет $k_i=0$

$\tilde{y}=xQ_n(x)$ - если среди корней характеристического уравнения есть 1 корень $k_i=0$

$\tilde{y}=x^{\alpha}\cdot Q_n(x)$, если среди корней есть $k_i=0$, α - кратность корня

Q_n - многочлен степени n с неизвестными коэффициентами, которые находятся после подстановки $\tilde{y}$ в уравнение (1).

Пример 1. $y''+y'=2x-1$

$k_1=0 \quad k_2=-1 \quad \alpha=1$

$$\tilde{y}=xQ_1(x)=x(Ax+B)=Ax^2+Bx$$
$$\tilde{y}'=2Ax+B$$
$$\tilde{y}''=2A$$
$$2A+2Ax+B=2x-1$$
$$2A=2\Rightarrow A=1$$
$$2A+B=-1\Rightarrow B=-3$$
$$\tilde{y}=x(x-3)=x^2-3x$$
$$y=C_1+C_2e^{-x}+x^2-3x$$

Случай 2:

Вид правой части $f(x)=e^{ax}$ или более общий $f(x)=P_n(x)\cdot e^{ax}$

Если a не является корнем характеристического уравнения для уравнения (1), то частное решение ищем в виде

$$\tilde{y}=Q_n(x)\cdot e^{ax}$$

Если a - корень характеристического уравнения (1) то

$$\tilde{y}=x^{\alpha}Q_n(x)e^{ax} \quad \alpha \text{ - кратность корня}$$

За $Q_n(x)$ нужно взять многочлен с буквенными коэффициентами n-ой степени, коэффициенты определяются после подстановки y^* в уравнение (1).

Пример 2. $y''-2y'+y=x\cdot e^{3x} \quad k_1=k_2=1\neq 3$

$$\tilde{y}=e^{3x}(Ax+B)$$
$$\tilde{y}'=3e^{3x}(Ax+B)+Ae^{3x}=e^{3x}(3Ax+3B+A)$$

$$\tilde{y}''=3e^{3x}(3Ax+3B+A)+3Ae^{3x}=e^{3x}(9Ax+9B+6A)$$
$$e^{3x}(9Ax+9B+6A)-2e^{3x}(3Ax+3B+A)+e^{3x}(Ax+B)=xe^{3x}$$
$$9Ax+9B+6A-2(3Ax+3B+A)+Ax+B=x$$
$$(9A-6A+A)x+9B+6A-6B-2A+B=x$$

$$4Ax+4B+4A=x$$
$$4A=1\Rightarrow A=\frac{1}{4}$$
$$4B+4A=0\Rightarrow B=-\frac{1}{4} \qquad \tilde{y}=\frac{1}{4}e^{3x}(x-1)$$
$$Y_0=C_1e^x+C_2xe^x$$
$$y=C_1e^x+C_2xe^x+\frac{1}{4}e^{3x}(x-1)$$

Пример 3. $y''-y=2e^x \qquad k_1=1 \;\; k_2=-1 \;\; \alpha=1$

$$\tilde{y}=e^x\cdot A\cdot x$$
$$\tilde{y}'=e^x\cdot A\cdot x+Ae^x$$
$$\tilde{y}''=e^x\cdot A\cdot x+Ae^x+Ae^x$$
$$e^x\cdot A\cdot x+2Ae^x-e^x\cdot A\cdot x=2e^x$$
$$2A=2\Rightarrow A=1$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{y}=xe^x$$
$$Y_0=C_1e^x+C_2e^{-x}$$
$$y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x$$

Случай 3:

$f(x)=P_r(x)\cos bx+Q_s(x)\cdot\sin bx$,где

$P_r(x)$ и $Q_s(x)$ $\rightarrow$ многочлены степени r и s соответственно.

Частное решение ищем в виде (если bi не корень характеристического уравнения)

$$\tilde{y}=P_m(x)\cdot\cos bx+Q_m(x)\sin bx$$
$$m=\max(r,s)$$

Если bi - корень характеристического уравнения, то

$\tilde{y}=x^{\alpha}(P_m(x)\cos bx+Q_m(x)\sin bx)$ α - кратность корня.

Пример 4

$$y''+4y'+4y=2\sin 2x+3\cos 2x$$
$$k_{1,2}=2\neq 2i$$
$$\tilde{y}=A\cos 2x+B\sin 2x$$
$$\tilde{y}'=-2A\sin 2x+2B\cos 2x$$
$$\tilde{y}''=-4A\cos 2x-4B\sin 2x$$
$$-4A\cos 2x-4B\sin 2x+4\left(-2A\sin 2x+2B\cos 2x\right)+$$
$$+4\left(A\cos 2x+B\sin 2x\right)=2\sin 2x+3\cos 2x$$
$$\cos 2x\left(-4A+8B+4A\right)+\sin 2x\left(-4B-8A+4B\right)=$$
$$=2\sin 2x+3\cos 2x$$
$$8B=3\Rightarrow B=\frac{3}{8}$$
$$-8A=2\Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$

Замечания:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x$$

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} - \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{3}{8}\sin 2x$$

Пример 5. $y'' + 9y = 6\cos 3x - 30\sin 3x$ $k_{1,2} = \pm 3i$, $3i = b$

частное решение $\tilde{y} = x(A\cos 3x + B\sin 3x)$

$$\tilde{y}' = A\cos 3x + B\sin 3x + x(-3A\sin 3x + 3B\cos 3x)$$

$$\tilde{y}'' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x - 3A\sin 3x + 3B\cos 3x +$$

$$+ x(-9A\cos 3x - 9B\sin 3x)$$

$$-6A\sin 3x + 6B\cos 3x - 9x(A\cos 3x + 9B\sin 3x) +$$

$$+ 9x(A\cos 3x + B\sin 3x) = 6\cos 3x - 30\sin 3x$$

$$-6A = -30 \Rightarrow A = 5$$

$$6B = 6 \Rightarrow B = 1$$

$$\tilde{y} = x(5\cos 3x + \sin 3x)$$

$$Y_0 = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$$

$$y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + x(5\cos 3x + \sin 3x)$$

$A = 5$, $B = 1$

Случай 4:

$$f(x) = e^{ax}\cdot(P_r(x)\cos bx + Q_s(x)\sin bx)$$

$$\tilde{y} = x^{\alpha} e^{ax}(P_m(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$

$\alpha = 0$ α=0 если среди корней характеристического уравнения нет числа $z = a \pm bi$

$\alpha = 1$ α =1 если один из корней равен z

$\alpha = 2$ α =2 если 2 корня совпадают

Рассмотрим еще один пример решения линейного неоднородного уравнения:

Пример 6. $y'' + 9y = 9x^4 + 12x^2 - 27$ $k_{1,2} = \pm 3i$

$n = 4$ $\tilde{y} = Q_4(x) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E$

$$\tilde{y}' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx + D$$

$$\tilde{y}'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C$$

$$12Ax^2 + 6Bx + 2C + 9\left(Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E\right) =$$

$$= 9x^4 + 12x^2 - 27$$

$$x^4\big|\ 9A = 9 \Rightarrow A = 1$$

$$x^3\big|\ 9B = 0 \Rightarrow B = 0$$

$$x^2\big|\ 12A + 9C = 12 \Rightarrow C = 0$$

$$x^1\big|\ 6B + 9D = 0 \Rightarrow D = 0$$

$$x^0\big|\ 2C + 9E = -27 \Rightarrow E = -3$$

$$\tilde{y} = x^4 - 3$$

$$Y_0 = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$
$$y = Y_0 + \tilde{Y}$$
$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + x^4 - 3$$

§ 1.11 Метод вариации произвольных постоянных. (Метод Лагранжа)

Применим к любому виду неоднородного линейного дифференциального уравнения.

Пусть известно общее решение соответствующего (1) однородного уравнения.

$$y_0(x) = C_1 y_1(x) + ... + C_n y_n(x)$$,тогда

решение неоднородного уравнения ищется в виде

$$y(x) = C_1(x) \cdot y_1(x) + C_2(x) \cdot y_2(x) + ... + C_n(x) \cdot y_n(x)$$

где от

функций $C_1(x)...C_n(x)$ требуем, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\begin{cases} y_1 C_1' + y_2 C_2' + ... y_n C_n' = 0 \\ y_1' C_1' + y_2' C_2' + ... y_n' C_n' = 0 \\ ... \\ y_1^{(n-1)} C_1' + y_2^{(n-1)} C_2' + ... y_n^{(n-1)} C_n' = f(x) \end{cases}$$

Эта неоднородная система уравнений.

т.к. определитель системы есть вронскиан фундаментальной системы решений $\neq 0$, то система имеет единственное решение относительно $C_1'...C_n'$.

Рассмотрим уравнение 2-ого порядка.

$$y''(x) + p(x)y' + q(x) = f(x)$$

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ - фундаментальная система решений.

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \quad C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}}{W}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}}{W}$$

Пример 1. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$; $k^2 - 2k + 1 = 0 \quad k_{1,2} = 1$

$$y_1(x) = e^x \quad y_2(x) = xe^x$$
$$y = C_1(x)e^x + C_2(x)xe^x$$
$$W = \begin{vmatrix} e^x & e^x x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + xe^x) - e^{2x} = xe^{2x}$$

Замечания:

Замечания:

$$\Delta C_1'(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^x x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + xe^x \end{vmatrix} = -\frac{e^x \cdot x \cdot e^x}{x} = -e^{2x}$$

$$\Delta C_2'(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x} \quad C_1'(x) = \frac{-e^{2x}}{xe^{2x}} = -\frac{1}{x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{xe^{2x}} = \frac{1}{x^2}$$

$$C_1(x) = -\int \frac{dx}{x} = -ln|x| + C_1$$

$$C_2(x) = \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + C_2$$

$$y = (C_2 - ln|x|)e^x + (C_4 - \frac{1}{x})xe^x = C_1 e^x + C_2 xe^x - e^x(ln|x| - 1)$$

§ 1.12 Системы линейных уравнений.

Для описания некоторых процессов и явлений требуется несколько функций.

Отыскание этих функций может привести к нескольким дифференциальным уравнениям, образующим систему.

Система дифференциальных уравнений n - ого порядка вида:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1 \ldots y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1 \ldots y_n) \\ \ldots \\ y_n' = f_n(x, y_1 \ldots y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

называется нормальной системой дифференциальных уравнений.

В векторной форме $\vec{y} = \overrightarrow{f(x, \vec{y})}$

Решение такой системы сводится к решению одного дифференциального уравнения n - ого порядка.

Решением системы (1) называется совокупность n функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, удовлетворяющая всем уравнениям системы.

Нахождение решения системы дифференциальных уравнений (1), удовлетворяющие начальным условиям.
$y_1(x_0) = y_{10}$; $y_2(x_0) = y_{20}$ … $y_n(x_0) = y_{n0}$, где $x_0, y_0 \ldots y_{n0}$ - заданные числа называемые начальными данными, называется задачей Коши.

В прикладных задачах (физики, механики и пр.) независимая переменная очень часто интерпретируется как время (t).

Система тогда принимает вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1 ... y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1 ... y_n) \\ ... \\ \dfrac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1 ... y_n) \end{cases}$$

Или в векторной форме $\dot{\vec{y}} = \overline{f(t, \vec{y})}$

Начальные условия $\vec{y}(t_0) = \vec{y}_0$

Пример 1.

Решение нормальной системы сведением к уравнению n -ого порядка.

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y + 5e^{-t} \end{cases}$$

$$x = \dot{y} - y - 5e^{-t}$$

$$\dot{x} = \ddot{y} - \dot{y} + 5e^{-t}$$

$$\ddot{y} - \dot{y} + 5e^{-t} = 5\left(\dot{y} - y - 5e^{-t}\right) - 3y + 2e^{3t}$$

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 8y = 2e^{3t} - 30e^{-t}$$

$$k^2 - 6k + 8 = 0$$

$$k_1 = 2 \ \ k_2 = 4$$

$$y_0(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}$$

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)$$

$$f_1(x) = 2e^{3t} \quad \tilde{y}_1 = Ae^{3t}$$

$$f_2(x) = -30e^{-t} \quad \tilde{y}_2 = Be^{-t}$$

$$\dot{\tilde{y}}_1 = 3Ae^{3t} \quad \dot{\tilde{y}}_2 = -Be^{-t}$$

$$\ddot{\tilde{y}}_1 = 9Ae^{3t} \quad \ddot{\tilde{y}}_2 = Be^{-t}$$

$$9Ae^{3t} - 18Ae^{3t} + 8Ae^{3t} = 2e^{3t}$$

$$A = -2 \quad \tilde{y}_1 = -2e^{3t}$$

$$Be^{-t} + 6Be^{-t} + 8Be^{-t} = -30e^{-t}$$

$$15B = -30 \ \ B = -2 \ \ \tilde{y}_2 = -2e^{-t}$$

$$y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}$$

$$\dot{y} = 2C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{4t} - 6e^{3t} + 2e^{-t}$$

$$x = \dot{y} - y - 5e^{-t}$$

$$x = 2C_1 e^{2t} + 4C_2 e^{4t} - 6e^{3t} + 2e^{-t} - \left(C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t} - 2e^{3t} - 2e^{-t}\right) - 5e^{-t}$$

$$x = C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{4t} - e^{-t} - 4e^{3t}$$

Замечания:

Выражения, представляющие собой конечные соотношения между искомыми функциями и независимыми переменными называют первыми интегралами системы.

Знание интегралов облегчает решение задачи, каждый первый интеграл позволяет понизить порядок уравнения на единицу.

§ 1.13 Линейные системы с постоянными коэффициентами.

Нормальная система дифференциальных уравнений (1) называется линейной, если функции $f_1 ... f_n$ - линейны относительно искомых функций.

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ... + a_{1n}y_n + b_1 \\ &\frac{dy_2}{dx} = a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{2n}y_n + b_2 \\ &... \\ &\frac{dy_n}{dx} = a_{1n}y_1 + a_{n2}y_2 + ... + a_{nn}y_n + b_n \end{aligned}\right\}$$

(2)

причём Все коэффициенты (A_{ij}) и (b_i) - вообще говоря, являются произвольными функциями от x.

Если $b_1 ... b_n = 0$, то система (2) называется однородной, если нет неоднородной.

Пусть $(a_{ij}) = const$, тогда система (2) – линейная система с постоянными коэффициентами , пусть также $b_1, ..., b_n = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n \\ &... \\ &\frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Система (3) приводится к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, поэтому будем искать решение (3) в виде показательных функций.

Частное решение системы (3) ищем в виде

$$y_1 = \gamma_1 e^{\lambda x} \ ; \ y_2 = \gamma_2 e^{\lambda x} \ ; \ldots ; \ y_n = \gamma_n e^{\lambda x} \qquad (4)$$

где, $\gamma_1 ... \gamma_n$, λ - постоянные, которые следует подобрать так, чтобы функции (4) удовлетворяли системе (3). Подставим (4) в (3), тогда

$$\begin{cases} \lambda\gamma_1 e^{\lambda x} = a_{11}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{12}\gamma_2 e^{\lambda x} + ... a_{1n}\gamma_n e^{\lambda x} \\ \lambda\gamma_2 e^{\lambda x} = a_{21}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{22}\gamma_2 e^{\lambda x} + ... a_{2n}\gamma_n e^{\lambda x} \\ ... \\ \lambda\gamma_n e^{\lambda x} = a_{n1}\gamma_1 e^{\lambda x} + a_{n2}\gamma_2 e^{\lambda x} + ... a_{nn}\gamma_n e^{\lambda x} \end{cases}$$

сокращаем на $e^{\lambda x}$ и переносим всё вправо

Замечания:	

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)\gamma_1+a_{12}\gamma_2+...+\gamma_{1n}\gamma_n=0\\ a_{21}\gamma_1+(a_{22}-\lambda)\gamma_2+...+\gamma_{2n}\gamma_n=0\\ ...\\ a_{n1}\gamma_1+...+(a_{nn}-\lambda)\gamma_n=0\end{cases}$$

(5)

Система (5) – однородная система линейных уравнений из n - уравнений с n - неизвестными. Чтобы система имела решение необходимо, чтобы определитель системы равнялся нулю.

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & ... & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & ... & a_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

(6)

Характеристическое уравнение системы (3).

Решим систему с использованием её характеристического уравнения.

Каждому простому (действительному) корню λ, соответствует решение вида:

$$y_1^{(i)}=\gamma_1^{(i)}e^{\lambda_i x}\ ;\ y_2^{(i)}=\gamma_2^{(i)}e^{\lambda_i x}\ ;\ ...\ ;\ y_n^{(i)}=\gamma_n^{(i)}e^{\lambda_i x}$$

(7)

Удобнее представить решение в виде вектора:

$$\lambda_i\to\overrightarrow{y^{(i)}}=\begin{pmatrix}\gamma_1^{(i)}\\ \gamma_2^{(i)}\\ \cdots\\ \gamma_n^{(i)}\end{pmatrix}\cdot e^{\lambda_i x}$$

Ограничимся случаем, когда все корни характеристического уравнения действительные и разные. Подставим решение вида (7) в уравнение (3) и сократим $e^{\lambda_i x}$

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda_i)\gamma_1^{(i)}+a_{12}\gamma_2^{(i)}+...+a_{1n}\gamma_n^{(i)}=0\\ a_{21}\gamma_1^{(i)}+(a_{22}-\lambda_i)\gamma_2^{(i)}+...+a_{2n}\gamma_n^{(i)}=0\\ ...\\ a_{n1}\gamma_1^{(i)}+a_{n2}\gamma_n^{(i)}+...+(a_{nn}-\lambda_i)\gamma_n^{(i)}=0\end{cases}$$

Эта однородная система уравнений, определитель которой не равен нулю. Поэтому она имеет бесконечное множество решений. Достаточно найти одно решение, (значения коэффициентов $\gamma_1^{(i)}...\gamma_n^{(i)}$). Эти коэффициенты находят для каждого корня характеристического уравнения λ_i

Все частные решения вида (7) образуют фундаментальную систему решений. Линейная комбинация всех частных решений с произвольными постоянными коэффициентами даёт общее решение системы.

В векторной форме оно будет записано в форме:

$$\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} C_i \overrightarrow{y^{(i)}} = C_1 \overrightarrow{y^{(1)}} + C_2 \overrightarrow{y^{(2)}} + \cdots + C_n \overrightarrow{y^{(n)}}$$

$$\begin{cases} y_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_1^{(i)} \\ \ldots \\ y_n = \sum\limits_{i=1}^{n} C_i y_n^{(i)} \end{cases}$$

Пример 1.

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - 5y_2 \\ y_2' = y_1 - 2y_2 \end{cases} \qquad \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda_1 = -1,$$

$$\lambda_2 = 3$$

γ_1^1, γ_2^1 находим из решения системы γ_1^2, γ_2^2 находим из решения системы

$$\begin{cases} 5\gamma_1^1 - 5\gamma_2^1 = 0 \\ 1\gamma_1^1 - \gamma_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_1^1 = 1 \\ \gamma_2^1 = 1 \end{cases} \qquad \overrightarrow{y^{(1)}} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(1)} \\ \gamma_2^{(1)} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_1 x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{-x}$$

$$\begin{cases} 1\gamma_1^2 - 5\gamma_2^2 = 0 \\ \gamma_1^2 - 5\gamma_2^2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma_1^2 = 5 \\ \gamma_2^2 = 1 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{y^{(2)}} = \begin{pmatrix} \gamma_1^{(2)} \\ \gamma_2^{(2)} \end{pmatrix} \cdot e^{\lambda_2 x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot e^{3x}$$

$$\vec{y} == C_1 \overrightarrow{y^{(1)}} + C_2 \overrightarrow{y^{(2)}}$$

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{-x} + 5C_2 e^{3x} \\ y_2 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} \end{cases} \qquad \leftarrow \text{общее решение.}$$