Глава 7.
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Первообразная функции и неопределенный интеграл.

В прошлой главе мы ввели понятие производной и научились находить производные элементарных функций. Теперь мы научимся решать обратную задачу, а именно по известной производной $f'(x)$ от функции, найти саму функцию $f(x)$.

Определение. Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x)=f(x)$.

Примеры. Функция x^5 является первообразной для $5x^4$ на $(-\infty,+\infty)$, т.к. $(x^5)'=5x^4$. $F(x)=\sqrt{x}$ есть первообразная для функции $f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ на $(0,\infty)$, т.к. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Иногда требуется найти первообразную на определенном промежутке, поскольку функция может быть не определена на всей числовой оси.

Теорема 1. Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную. (Без доказательства)

Теорема 2. Если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на (a,b), то $F(x)+C$ - также первообразная, где С – любое число.

Доказательство: Имеем $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$. $\lhd$

Теорема 3. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на (a,b), то они на этом промежутке отличаются на постоянную (т.е. $F_1(x)-F_2(x)=C$).

Доказательство: По условию $F_1'(x)=F_2'(x)=f(x)$. Составим функцию $\Phi(x)=F_1(x)-F_2(x)$. Очевидно, что $\Phi'(x)=F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0$ $\forall x\in(a,b)\Rightarrow \Phi(x)\equiv C$ (согласно следствию из теоремы Лагранжа). $\lhd$

Из данных теорем вытекает что, если $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$ на (a,b), то любая другая первообразная имеет вид $\Phi(x)=F(x)+C$. Например, для функции $f(x)=3x^2$ первообразной является не только функция x^3, но и x^3+1, x^3+4, x^3+12 и т.д.

Определение. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на (a,b) называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом: $\int f(x)dx$.

$$\boxed{\int f(x)dx=F(x)+C}$$

$f(x)$ - подынтегральная функция, dx - дифференциал независимой переменной, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение.

Примеры: $\int e^x dx=e^x+C$; $\int \cos x dx=\sin x+C$; $\int x dx=\dfrac{x^2}{2}+C$;

$\int \dfrac{dx}{x}=\ln x+C,\ \ x>0$;. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln(-x)+C,\ \ x<0$.

Основные свойства неопределенного интеграла.

1°. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $d\int f(x)dx = f(x)dx$ или $dF(x) = f(x)dx$, где $F(x)$ первообразная функции $f(x)$.

2°. Неопределенный интеграл от дифференциала непрерывно дифференцируемой функции равен самой этой функции с точностью до постоянной:

$\int dF(x) = F(x) + C$ или

$\int F'(x)dx = F(x) + C$.

3°. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx + C$, где $a = const$.

4°. Неопределенный интеграл от суммы двух непрерывных функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$\int \left(f_1(x) + f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.

5°. Если $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$, то

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$.

Данные свойства вытекают непосредственно из определения неопределенного интеграла.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить ***таблицу основных неопределенных интегралов*****:**

1. $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C,\ a \neq -1$.
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, на интервале не содержащем $x = 0$.
3. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,\ \int e^x dx = e^x + C$.
4. $\int \cos x dx = \sin x + C,\ \int \sin x dx = -\cos x + C$.
5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$.
6. $\int shxdx = chx + C,\ \int chxdx = shx + C$.
7. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C,\ \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C$.
8. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}arcctg\frac{x}{a} + C$.
9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C$.
10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$.
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| tg\,\frac{x}{2} \right| + C$, $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$.

<u>Методы интегрирования.</u>

<u>Непосредственное интегрирование функций.</u>

Непосредственным интегрированием называется способ вычисления неопределенных интегралов с помощью тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств 3º-5º.

Пример 1. $\int \left(4x^3 + 2/x^3 - 1\right)dx = 4\int x^3 dx + 2\int x^{-3} dx - \int dx = x^4 - \frac{1}{x^2} - x + C$

Пример 2. $\int 3^x e^{2x} dx = \int \left(3e^2\right)^x dx = \frac{\left(3e^2\right)^x}{\ln 3e^2} + C$

<u>Интегрирование методом замены переменной (подстановки).</u>

В основе метода лежит утверждение о независимости вида неопределенного интеграла от выбора аргумента, то есть если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то для любой непрерывно дифференцируемой функции $u = \varphi(x)$ также существует неопределенный интеграл, причем $\int f(u)du = F(u) + C$.

Доказательство: $dF(u) = d\left[\int f(u)du\right] = f(u)du$ (свойство 1º), таким образом $\frac{dF(u)}{du} = f(u)$, то есть $F'(u) = f(u)$ и $F(u)$ является первообразной функции $f(u)$.

Можно также записать $\frac{d}{dx}\left[F(\varphi(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[F(u)\right] = \frac{dF(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f(u)u' = f(\varphi(x))\varphi'(x)$. Таким образом получаем формулу интегрирования подстановкой:

$$\boxed{\int f(u)du = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx, \text{ где } u = \varphi(x)}$$

Пример 1. $\int \sqrt{5\sin x + 2}\cos x dx = \begin{bmatrix} u = 5\sin x + 2 \\ du = 5\cos x dx \\ \cos x dx = \frac{1}{5}du \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + C$

Делаем обратную подстановку и таким образом

$\int \sqrt{5\sin x + 2}\cos x dx = \frac{2}{15}\left(\sqrt{5\sin x + 2}\right)^3 + C$.

Пример 2. $\int x\sqrt{x+5}dx = \begin{bmatrix} x + 5 = t^2 \\ x = t^2 - 5 \\ dx = 2tdt \end{bmatrix} = \int (t^2 - 5)\cdot t \cdot 2tdt = \int (2t^4 - 10t^2)dt =$

$= 2\frac{t^5}{5} - 10\frac{t^3}{3} + C = \frac{2}{5}(\sqrt{x+5})^5 - \frac{10}{3}(\sqrt{x+5})^3 + C$.

Во многих случаях бывает удобно вместо обозначения новой переменной интегрирования, ввести функцию под знак дифференциала: $f'(x)dx = df(x)$. При этом оказываются полезны следующие соотношения:

1. $dx = d(x+b)$	6. $e^{kx} = \frac{1}{k} de^{kx}$
2. $adx = d(ax+b)$	7. $\cos xdx = d\sin x$
3. $xdx = \frac{1}{2}dx^2$	8. $\sin xdx = -\cos xdx$
4. $x^a dx = \frac{1}{a+1}dx^{a+1}$	9. $\frac{dx}{\cos^2 x} = dtgx$
5. $\frac{dx}{x} = d\ln x$	10. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -dctgx$

Пример 3. $\int \frac{xdx}{x^4+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dx^2}{(x^2)^2+1} = \left[x^2 = t\right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}arctgx^2 + C$.

Заметим, что для любой дифференцируемой функции $f(x)$ имеем следующие соотношения:

$$\int \frac{f'(x)dx}{f(x)} = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln\left|f(x)\right| + C;$$

$$\int \frac{f'(x)dx}{\sqrt{f(x)}} = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = 2\sqrt{f(x)} + C$$

Применим первое из данных соотношений для вычисления интегралов от тригонометрический функций.

Пример 4. $\int tgxdx = \int \frac{\sin xdx}{\cos x} = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C$.

Пример 5. $\int ctgxdx = \int \frac{cos\, dx}{sin\, x} = \int \frac{d\, sin\, x}{sin\, x} = ln\left|sin\, x\right| + C$.

Данные интегралы не являются табличными, но их рекомендуется запомнить, так как они часто встречаются в задачах.

Интегрирование по частям.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ функции аргумента x, имеющие производные u' и v'. $(uv)' = u'v + v'u \Rightarrow \int (u'v + v'u)dx = uv + C \Rightarrow \int u'vdx + \int v'udx = uv + C$

т.к. $u'dx = du$, $v'dx = dv$ то $\int vdu + \int udv = uv + C \Rightarrow \int udv = uv - \int vdu + C$. Получаем формулу интегрирования по частям.

$$\boxed{\int udv = uv - \int vdu}$$

Применять ее целесообразно, когда интеграл в правой части формулы более прост для нахождения, нежели исходный. Отметим, что в некоторых случаях данную формулу необходимо применять несколько раз. Этот метод интегрирования рекомендуется использовать, когда имеется произведение алгебраического многочлена $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ на одну из следующих элементарных функций:

1. Тригонометрические функции ($\sin x$, $\cos x$);
2. Трансцендентные функции (e^x, $\ln x$);
3. Обратные тригонометрические функции ($\arcsin x$, $arctgx$ и т.д.).

Возможна также комбинация произведения функций 1-й тип на 2-ой, 2ой на 3- ий ит.д. Например: $\int \sin x \ln x dx$, $\int arctgx \ln x dx$.

Порядок применения формулы интегрирования по частям:

1. Выбор u и dv;
2. Нахождение du и $\int dv = v$ (без учета постоянной С).
3. Применение формулы интегрирования по частям.

Поскольку под знаком интеграла стоит обычно произведение 2-х функций, то иногда бывает трудно сделать выбор u и v. В этом случае можно воспользоваться простым правилом.

Правило: а) В качестве функции u выбирается та из функций, которая при дифференцировании упрощается больше. Например: $(x+1)' = 1$, $(\sin x)' = \cos x$. Поэтому $u = x + 1$. б) Если не действует п.а), то в качестве v выбирается та из функций, которую легче внести под знак дифференциала. Например: $\int \sin x \ln x dx$. $\sin x dx = -\cos x$, но $\ln x dx = ?$. Поэтому $dv = \sin x dx$.

Пример 1. $$\int \ln x dx = \begin{bmatrix} \ln x = u \\ du = \frac{1}{x}dx \\ dx = dv \\ x = v \end{bmatrix} = x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Пример 2.

$$\int xarctgxdx = \begin{bmatrix} xdx = dv \\ arctgx = u \\ du = \frac{1}{1+x^2}dx \\ v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = arctgx\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{1+x^2}dx = arctgx\frac{x^2}{2} -$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = arctgx\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int \frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 arctgx - x + arctgx\right) + C.$$

Интеграл, приводящийся к самому себе.

Это частный случай применения формулы интегрирования по частям, когда в результате мы получаем выражение $I = uv - aI$, $a \neq -1$, а I - исходный интеграл. Тогда получаем, что $I = \frac{uv}{1+a}$.

Пример 3. $$I = \int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x d\ln x = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x}dx \\ v = \ln x \end{bmatrix} = \ln^2 x - \int \ln x \frac{1}{x}dx = \ln^2 x - I$$

$2I = \ln^2 x$; $I = \frac{\ln^2 x}{2}$.

<u>Интегралы, содержащие квадратный трехчлен в знаменателе.</u>

К такому виду относятся интегралы:

I. $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$;

II. $\int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c}$; $\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Интегрирование выражений I – го типа производится путем выделения полного квадрата в квадратном трехчлене и последующего применения формул табличных интегралов 8-11.

Напомним, если в интеграле квадратный трехчлен имеет вид ax^2+bx+c , то для выделения полного квадрата a выносят за скобки $ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$ и затем применяют формулу для приведенного квадратного трехчлена

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\frac{p^2}{4}+q\ .$$

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{x^2+3x+3}=\left[x^2+3x+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+3=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(3-\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]=$$

$$=\int \frac{dx}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}=\int \frac{d\left(x+\frac{3}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{3}}arctg\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x-25x^2}}=\left[4x-25x^2=25\left(\frac{4}{25}x-x^2\right)=25\left(\frac{4}{625}-\left(x-\frac{2}{25}\right)^2\right)\right]=\frac{1}{5}\int \frac{d\left(x-\frac{2}{25}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2}{25}\right)^2-\left(x-\frac{2}{25}\right)^2}}=$$

$$=\frac{1}{5}\arcsin\frac{25x-2}{2}+C$$

Выражения II-го типа разбиваются на сумму двух интегралов, путем выделения в числителе производной от трехчлена, стоящего в знаменателе.

Так как $\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b$, то $d(2ax+b)=d\left(ax^2+bx+c\right)$ и можно записать

$$\int \frac{(mx+n)dx}{ax^2+bx+c}=A\cdot\int \frac{(2ax+b)dx}{ax^2+bx+c}+B\cdot\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=A\cdot\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{ax^2+bx+c}+B\cdot\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}=$$

$=A\ln\left(ax^2+bx+c\right)+$ I тип интеграла. Аналогично можно представить

$\int \frac{(mx+n)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=A\cdot\int \frac{d(ax^2+bx+c)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=+B\cdot\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=A\cdot 2\sqrt{ax^2+bx+c}+$ II тип интеграла.

Пример 3.

$$\int \frac{(3x-2)dx}{x^2+4x+13}=\left[\left(x^2+4x+13\right)'=2x+4\right]=3\int \frac{(x-\frac{2}{3})}{x^2+4x+13}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{4}{3}}{x^2+4x+13}dx=$$

$$\frac{3}{2}\int \frac{2x+4-4-\frac{4}{3}}{x^2+4x+13}dx=\frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+13}dx-8\int \frac{dx}{(x+2)^2+9}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|-8\cdot\frac{1}{3}arctg\frac{x+2}{3}+C$$

Интегрирование рациональных функций.

Рациональной функцией $R(x)$ называется дробь вида: $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$ (1);

где $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ - целые рациональные многочлены соответственно m-ой и n-ой степеней. $Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_m$; $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$.

Если $m<n$, то $R(x)$ называется правильной дробью, если $m\ge n$ - неправильной дробью.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби.

Пример 1. $\dfrac{x^4+4}{x^2+3x-1}=x^2-3x+10+\dfrac{-33x+14}{x^2+3x-1}$

Таким образом, интегрирование рациональных функций сводится к интегрированию правильных дробей. Для того, чтобы рассмотреть метод интегрирования вспомним ***некоторые свойства многочленов с действительными коэффициентами.***

$P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_n$ - многочлен n-ой степени. Степенью многочлена называют максимальную степень при x. Корнем многочлена называют такое число, подстановка которого обращает многочлен в 0. Рассмотрим виды простейших многочленов.

I. Линейный: $x-a$. Корень многочлена $x=a$, его нельзя разложить на множители.

II. Квадратный трехчлен: x^2+px+q. При наличии действительных корней x_1 и x_2 можно разложить на множители. $x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2)$.

III. Многочлены степени $n\ge 3$.

Теорема. Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени выше второй может быть представлен в виде произведения линейных и квадратных сомножителей в виде $P_n(x)=(x-a)^\alpha(x-b)^\beta\cdots(x^2+px+q)^\pi(x^2+rx+s)^\rho\cdots$ (2)

где *a, b* – корни многочлена кратностей соответственно α и β. (Если α=1, то *a* – простой корень, при α>1 – *a* – кратный корень). У квадратных трехчленов действительных корней нет.

Пример 2. $P_n(x)=(x+2)(x-1)^2(x-5)^3(x^2-8x+25)(x^2+1)^4$

$x=-2$ - простой корень; $x=1$ - корень кратности 2; $x=5$ - корень кратности 3.

$x^2-8x+25$ и x^2+1 - не имеют действительных корней.

Интегрирование рациональных дробей производится путем представления данных дробей в виде суммы простейших дробей.

Простейшей дробью называется дробь одного из следующих четырех типов:

1.) $\dfrac{A}{x-a}$; 2.) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

3.) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)}$; 4.) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$.

Интегралы от этих дробей находятся легко.

1.) $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\ln|x-a|+C$, 2.) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}} + C$,

3.) Интеграл, содержащий квадратный трехчлен подробно рассмотрен в соответствующем разделе.

4.) Выделением производной от трехчлена и приведением к полному квадрату сводится к виду $\int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n}$. Интегралы такого вида находят с помощью ***рекуррентной формулы понижения степени знаменателя***:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2}\left(\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1}\right)$$ Данную формулу можно вывести с помощью интегрирования по частям.

Имеет место следующая теорема.

Теорема. Всякую правильную рациональную дробь (1) со знаменателем представленном в виде (2) , можно разложить в сумму простейших рациональных дробей типа 1.)-4.). В данном разложении каждому корню *a* кратности α множителя $(x-a)^{\alpha}$ соответствует сумма дробей вида

$$\frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}, \ (3)$$

а каждой паре комплексно-сопряженных корней кратности π множителя $\left(x^2+px+q\right)^{\pi}$ соответствует сумма дробей вида

$$\frac{M_1x+N_1}{\left(x^2+px+q\right)} + \frac{M_2x+N_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \cdots + \frac{M_\pi x+N_\pi}{\left(x^2+px+q\right)^\pi}. \ (4)$$

Для вычисления значений *A*, *M, N* в разложении функции *R(x)* на сумму простейших рациональных дробей часто используют ***метод неопределенных коэффициентов,*** суть которого заключается в следующем. С учетом формул (3), (4) данную дробь *R(x)* представим в виде суммы простейших рациональных дробей с неопределенными коэффициентами *A, M, N.* Полученное равенство является тождеством. Поэтому, если привести все дроби к общему знаменателю $P_n(x)$ в числителе получим многочлен $Q^*_{n-1}(x)$ степени *n*—1, тождественно равный многочлену $Q_m(x)$, стоящему в числителе выражения (1). Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях *x* в этих многочленах, получим систему *n* уравнений для определения *n* неизвестных коэффициентов *A, M, N* (с индексами).

В некоторых случаях с целью упрощения вычислений можно воспользоваться следующим соображением. Так как многочлены $Q_m(x)$ и $Q^*_{n-1}(x)$ тождественно равны, то их значения равны при любых числовых значениях *x.* Придавая *x* конкретные числовые значения получаем систему уравнений для определения коэффициентов. Такой метод нахождения неизвестных коэффициентов называется *методом частных значений.* Если значения *x* совпадают с действительными корнями знаменателя, получаем уравнение с одним неизвестным коэффициентом.

Данные методы рассмотрим на примерах.

Пример 3. Найти $\int \frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx$

В соответствии с формулой (3) разложение на элементарные дроби имеет вид

$$\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}=\frac{A(x-1)(x-2)+Bx(x-2)+C(x-1)x}{x(x-1)(x-2)} \quad (5)$$

Числители подынтегральных функций в левой и правой частях формулы (5) будут тождественно равными, таким образом приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+B+C \\ x^1 & 2=-3A-2B-C \\ x^0 & -3=2A \end{array}\right\}$$

решение которой: A =-3/2, B =1, С =1/2.

Теперь найдем коэффициенты разложения методом частных значений. Подставим в числитель (5) вместо x частные значения, равные корням знаменателя x=0, x=1, x=2.Получим равенства –3=2A, $-1=-B$, $1=2C$. Получим те же значения коэффициентов. Теперь можно использовать это разложения для нахождения интеграла.

$$\int\frac{2x-3}{x(x-1)(x-2)}dx=\int\left(\frac{-3/2}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1/2}{x-2}\right)dx=-\frac{3}{2}\ln|x|+\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x-2|+C$$

Пример 4. Найти $\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}$.

На основании теоремы о разложении правильной дроби в сумму простейших дробей имеем

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{x+1}\right)dx$$

Приведя дроби в обеих частях последнего равенства к общему знаменателю, имеем $x\equiv A(x+1)^2+B(x-1)+C(x^2-1)$. При $x=1$ и $x=-1$ находим, что $4A=1$, $-1=-2B$, то есть $A=1/4$ и $B=1/2$. Для нахождения C приравняем коэффициенты при x^2. Получим $0=A+C$, то есть $C=-1/4$. Окончательно имеем

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x+1)^2}=\int\frac{1/4}{x-1}dx+\int\frac{1/2}{(x+1)^2}dx+\int\frac{-1/4}{x+1}dx=\frac{1}{4}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\frac{1}{x+1}-\frac{1}{4}\ln|x+1|+C$$

Пример 5. Найти $\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}$.

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}=\int\left(\frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}dx$$ следовательно

$x\equiv A(x^2+1)+(Mx+N)(x-1)$. При $x=1$ получим $1=2A$, то есть. Далее

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & 0=A+M \\ x^0 & 0=A-N \end{array}\right\} \text{ Откуда } M=-1/2,\ N=1/2.$$

$$\int\frac{xdx}{(x-1)(x^2+1)}=\int\left(\frac{1/2}{x-1}+\frac{-1/2\,x+1/2}{x^2+1}\right)dx=\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right|+\frac{1}{2}arctgx+C.$$

Интегрирование тригонометрических выражений.

I. При нахождении интегралов вида $\int\cos^m x\sin^n xdx \quad (m,n)\in Z$ возможны следующие случаи:

1.) Одно из чисел m или n – нечетное. Тогда производится «отщепление» одной из нечетных степеней с последующим внесением под знак дифференциала.

2.) Оба числа m и n – четные. Тогда рекомендуется использовать тригонометрические формулы понижения степени.

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2},\ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Пример 1. $\int \sin^7 x \cos^3 x dx = \int \sin^7 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^7 x(1-\sin^2 x) d(\sin x) =$

$\int (\sin^7 x - \sin^9 x) d(\sin x) = \frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{10} + C$.

«Отщепление» степени лучше производить там, где показатель меньше.

Пример 2. $\int \cos^2 3x dx = \int \frac{1+\cos 6x}{2} dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 6x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$

В ряде случаев полезны следующие рекуррентные соотношения, позволяющие понизить показатель степени.

$$\boxed{\begin{aligned}
I_n &= \int \frac{dx}{\sin^n x} = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}\\
I_n &= \int \frac{dx}{\cos^n x} = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}\\
I_n &= \int \sin^n x dx = -\frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}\\
I_n &= \int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}}$$

II. Интегралы вида $\int \sin mx \sin nx dx$, $\int \cos mx \cos nx dx$, $\int \sin mx \cos nx dx$ вычисляются на основании формул тригонометрии:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right]$$

Пример 3. $\int \sin 5x \cos 3x dx = \int \frac{1}{2}\left[\sin 2x + \sin 8x\right] dx = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$

III. Интегралы вида $\int tg^n x dx$ и $\int ctg^n x dx$ вычисляются путем «отщепления» четной степени и использования тригонометрических формул $tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ и $ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$. После упрощения подынтегрального выражения пользуются методом внесения функции под знак дифференциала или вышеприведенными рекуррентными соотношениями.

Пример 4. $\int tg^5 x dx = \int tg^4 x tgx dx = \int \left(tg^2 x\right)^2 tgx dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)^2 tgx dx =$

$$\int\left(\frac{1}{cos^4 x}-\frac{2}{cos^2 x}+1\right)\frac{sin\,x}{cos\,x}dx=-\int\left(\frac{1}{cos^5 x}-\frac{2}{cos^3 x}+\frac{1}{cos\,x}\right)d(cos\,x)=\frac{1}{4cos^4 x}-\frac{1}{cos^2 x}-$$

$$-ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C$$

IV. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – рациональная функция, приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной u с помощью *универсальной тригонометрической подстановки* $tg\frac{x}{2}=u$. В этом случае

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

Пример 5. $\int\frac{1}{1+\sin x+\cos x}dx=\int\frac{2du/(1+u^2)}{1+\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}=\int\frac{du}{1+u}=\ln|1+u|+C=$

$$=\ln\left|1+tg\frac{x}{2}\right|+C$$

В случае, когда имеет место тождество $R(-\cos x,-\sin x)\equiv R(\cos x,\sin x)$, для приведения поынтегральной функции к рациональному виду можно применять *упрощенную подстановку* $tgx=u$. При этом

$$\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}},\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}},\ dx=\frac{du}{1+u^2}.$$

Пример 6. $\int\frac{dx}{3+\sin^2 x}=\int\frac{du/(1+u^2)}{3+u^2/(1+u^2)}=\int\frac{du}{3+4u^2}=\frac{1}{2\sqrt{3}}arctg\frac{2u}{\sqrt{3}}+C$

Интегрирование иррациональных функций.

Рассмотрим интегралы от некоторых иррациональных функций, которые с помощью определенных подстановок приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной.

I. Интегралы вида $\int R(x,\sqrt[m]{x^\alpha},\sqrt[n]{x^\beta})dx$ сводятся к рациональной функции подстановкой $x=t^N$, где N – наименьшее общее кратное (НОК) m и n.

Пример 1. Найти $\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3+4}}$.

Так как НОК(2, 4)=4, то соответствующая подстановка $x=t^4$.

$$\int\frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x^3+4}}=\begin{bmatrix}x=t^4\\ dx=4t^3dt\end{bmatrix}=\int\frac{t^2\cdot 4t^3dt}{t^3+4}=4\int\left(t^2-\frac{4t^2}{t^3+4}\right)dt=\frac{4}{3}t^3-\frac{16}{4}ln\left|t^3+4\right|+C=$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}-4ln\left|\sqrt[4]{x^3}+4\right|+C$$

II. Интегралы вида $\int R\left(x,\sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\alpha},\sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^\beta}\right)dx$, где R- рациональная функция, a, b, c, d – постоянные, приводится к интегралу от рациональной функции нового аргумента с помощью подстановки $\frac{ax+b}{cx+d}=t^N$, где N – наименьшее общее кратное m и n.

Пример 2. Найти $\int\frac{\sqrt[6]{x+1}dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$. НОК(2, 3, 6)=6.

$$\int\frac{\sqrt[6]{x+1}dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}=\begin{bmatrix}x+1=t^6\\ dx=6t^5dt\end{bmatrix}=\int\frac{t}{t^3+t^2}6t^5dt=6\int\frac{t^4}{t+1}dt=6\int\left(t^3-t^2+t-1+\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=\frac{3}{2}t^4-2t^3+3t^2-6t+6ln\left|t+1\right|+C=\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x+1)^2}-2\sqrt{x+1}+3\sqrt[3]{x+1}-6\sqrt[6]{x+1}+6ln\left|\sqrt[6]{x+1}+1\right|+C$$

III. Иррациональные функции вида $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})$ выделением полного квадрата сводятся к 3-м видам функций, для каждой из которой применяется свой вид подстановки:

1). $R(u,\sqrt{a^2-u^2})$, подстановка $u=a\sin t$;

2). $R(u,\sqrt{a^2+u^2})$, подстановка $u=atgt$;

3). $R(u,\sqrt{u^2-a^2})$, подстановка $u=\frac{a}{\cos t}$.

Пример 3. $\int\sqrt{3-2x-x^2}dx=\int\sqrt{4-(x+1)^2}dx=\begin{bmatrix}u=x+1\\ du=dx\end{bmatrix}=\int\sqrt{4-u^2}du$

$$=\begin{bmatrix}u=2\sin t\\ du=2\cos tdt\end{bmatrix}=\int\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot2\cos tdt=2\int\sqrt{\cos^2 t}\cdot2\cos tdt=4\int\cos^2 tdt=4\int\frac{1+\cos2t}{2}dt=$$

$$=2t+\sin2t+C=\left[t=\arcsin\frac{u}{2}=\arcsin\frac{x+1}{2}\right]=2\cdot\arcsin\frac{x+1}{2}+\sin\left(2\cdot\arcsin\frac{x+1}{2}\right)+C$$

Пример 4. $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}=\begin{bmatrix}x=tgt\\ dx=\frac{dt}{cos^2 t}\end{bmatrix}=\int\frac{dt/cos^2 t}{(tg^2t+1)\left(tgt+\sqrt{tg^2t+1}\right)}=$

$$=\int\frac{dt/\cos^2 t}{(1/\cos^2 t)(\sin t/\cos t+\sqrt{1/\cos^2 t})}=\int\frac{dt}{(\sin t+1)/\cos t}=\int\frac{\cos tdt}{\sin t+1}=\ln\left|\sin t+1\right|+C$$

Для того чтобы перейти от новой переменной t к переменной x, воспользуемся формулами тригонометрии. Так как $x=tgt$, то $1+x^2=1+tg^2t=\frac{1}{\cos^2 t}$. Поэтому

$$\cos^2 t=\frac{1}{1+tg^2t}=\frac{1}{1+x^2};\ \sin^2 t=1-\cos^2 t=\frac{tg^2t}{1+tg^2t}=\frac{x^2}{1+x^2};\ \sin t=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Окончательный ответ: $\int\frac{dx}{(x^2+1)(x+\sqrt{x^2+1})}=\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+1\right|+C$.

Примечание. В интегралах, содержащих выражение $\sqrt{x^2+a}$ можно применять подстановку Эйлера: $\sqrt{x^2+a}=t-x$.

Теорема Коши. Понятие о «неберущихся» интегралах.

При вычислении неопределенных интегралов возникает вопрос 1) всякая ли непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную, 2) каким образом найти неопределенный интеграл, если он существует. На первый вопрос отвечает теорема Коши.

Теорема Коши. Всякая непрерывная функция имеет первообразную.

Или другая формулировка.

Для каждой непрерывной в интервале (a, b) функции $f(x)$ существует функция $F(x)$, производная от которой в интервале (a, b) в точности равна данной функции $f(x)$. $F'(x) = f(x)$.

Однако теорема Коши не утверждает, то первообразную данной функции можно отыскать с помощью конечного числа известных операций и выразить ответ в элементарных функциях. Основные способы вычисления интегралов в элементарных функциях мы рассмотрели ранее. Под «неберущимися» интегралами подразумевают интегралы, которые не могут быть выражены через конечное число арифметических операций и суперпозиций элементарных функций.

Например, доказано, что следующие интегралы не интегрируются в элементарных функциях:

$\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона,

$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ - интегралы Френеля,

$\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм,

$\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус,

$\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус.

Указанные интегралы хотя и существуют, но не являются элементарными функциями. Имеются другие способы для их вычисления. Например, с помощью разложения в бесконечный степенной ряд. Эти способы будут рассмотрены в одной из следующих глав.

Глава 8.
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Определенный интеграл.

Определение 1. Пусть на отрезке $[a,b]$ определена функция $y = f(x)$. Отрезок $[a,b]$ разобьем на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ (разбиение R). На любом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ($[x_i, x_{i+1}]$ - частичный отрезок) выберем по произвольной точке $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$. (Рис 1.) $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ - длина отрезка. Составим сумму $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ - n-ная интегральная сумма (Римана) функции f на отрезке $[a,b]$.

Геометрический смысл суммы S_n - это есть алгебраическая сумма площадей прямоугольников, в основании которых лежат отрезки Δx_i, а высоты равны $f(\xi_i)$. (В том случае если функция неотрицательна.)

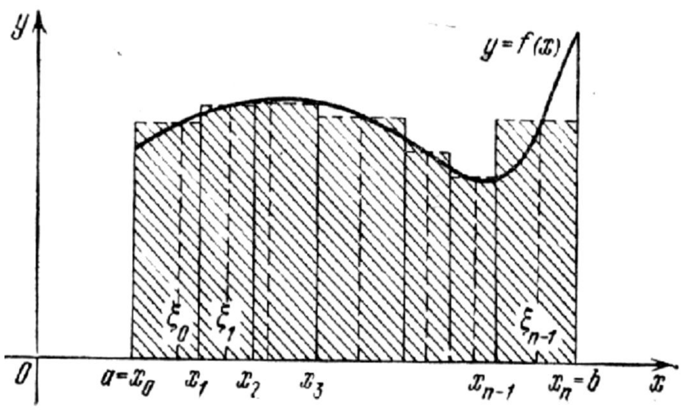

Рис. 1.

Обозначим через $\lambda_R = \max\limits_{0 \le i \le n-1} \Delta x_i$ - максимальную длину отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ разбиения R. Предел (если он существует), к которому стремится интегральная сумма S_n, когда $\lambda_R \to 0$, называется определенным интегралом от функции f на отрезке $[a,b]$ и обозначается как

$$\lim_{\lambda_R \to 0} S_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

a, b - нижний и верхний пределы интегрирования, $[a,b]$- отрезок интегрирования.

Предел (1) называют интегралом Римана и функцию, для которой этот предел существует называют интегрируемой в смысле Римана.

Данное определение эквивалентно следующему.

Определение 1'. *Определенным интегралом от функции f на отрезке $[a,b]$ называется число I, удовлетворяющее следующему свойству: для всякого $\varepsilon > 0$ можно найти число $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения R отрезка $[a,b]$, у которого $\lambda_R = \max\limits_i \Delta x_i < \delta$, выполняется неравенство*

$$|S_n - I| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

при произвольном выборе точек $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

В случае непрерывных функций понятие определенного интеграла введено Коши. Говорят, что непрерывная на $[a,b]$ функция интегрируема в смысле Коши.

Непосредственное вычисление определенного интеграла по формуле (1) связано с рядом трудностей, так как интегральные суммы имеют сложный вид, и найти их предел нелегко. До XVII века вычисление интегралов являлось трудной математической задачей. Ньютон и Лейбниц указали общий метод решения таких задач путем сведения к отысканию первообразной функции.

Вычисление определенного интеграла.

Формула Ньютона-Лейбница.

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F(x)$ - есть первообразная от функции $f(x)$

Доказательство:

$\triangleright$ Пусть R произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ отрезка $[a,b]$. Запишем $F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \cdots + [F(x_2) - F(x_1)] +$

$+ [F(x_1) - F(x_0)] = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = (*)$. Согласно теореме Лагранжа о среднем $F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$, где $\xi_i \in [x_i, x_{i-1}]$. Тогда продолжим запись

$(*) = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \xrightarrow[\lambda_R \to 0]{} \int_a^b f(x)dx$. $\triangleleft$

Ограниченность интегрируемых функций.

Теорема. Если функция интегрируема на некотором отрезке, то она ограничена на нем. (без доказательства).

Основные свойства определенного интеграла.

1). $\int_a^a f(x)dx = 0$; $\int_a^b dx = b - a$.

2). $\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$.

3). $\int_a^b [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$.

4). $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

5). Если функция f интегрируема на каждом из отрезков $[a,c]$ и $[c,b]$($a < c < b$), то она интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Интеграл как функция верхнего предела.

Замечание. Обозначение переменной интегрирования в определенном интеграле никакой роли не играет, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(t)dt.$$

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана интегрируемая функция $f(x)$. Зададим произвольное число $x \in [a, b]$. Теперь определенный интеграл $F(x) = \int_a^x f(u)du$ есть некоторая функция от x.

Теорема 1. Если функция f интегрируема на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x)$ непрерывна в любой точке $x \in [a, b]$.

Теорема 2. Если интегрируемая на $[a, b]$ функция f непрерывна в точке $x \in [a, b]$, то в этой точке существует производная от F .

$$F'(x) = f(x) \text{ или } \left[\int_a^x f(x)dx\right]' = f(x).$$

На основе вышеприведенного определения приведем еще одно доказательство формулы Ньютона-Лейбница.

$\triangleright$ Так как $F(x) = \int_a^x f(u)du$, то $F(a) = \int_a^a f(u)du = 0$ и $F(b) = \int_a^b f(u)du$.

Согласно теореме 2 $F(x)$ есть первообразная функции $f(x)$ на $[a, b]$. Если $\Phi(x)$ любая другая первообразная $f(x)$, то $\Phi(x) = F(x) + C$. То есть $\Phi(b) - \Phi(a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(u)du$. $\triangleleft$

Приведем примеры простейших случаев применения формулы Ньютона-Лейбница.

Пример 1. $\int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 0\right) = \frac{1}{3}$

Пример 2. $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = \left(-\cos\pi - (-\cos 0)\right) = \left(1 - (-1)\right) = 2$

Теорема. (о замене переменной). Имеет место равенство

$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, где $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируема на $[c, d]$, $a = \varphi(c)$, $b = \varphi(d)$ и $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$.

Пример 3. $\int_0^{4\pi} \sin^3 t dt = -\int_0^{4\pi} (1 - \cos^2 t)d(\cos t) = [x = \cos t] = -\int_1^1 (1 - x^2)dx = 0$

Верхний и нижний пределы в интеграле с новой переменной получены из условия $\cos 0 = 1$ и $\cos 4\pi = 1$.

Теорема. Справедлива формула интегрирования по частям для определенного интеграла $\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$, где u, v - непрерывно дифференцируемые на $[a, b]$ функции.

Пример 4. $\int_0^{\pi} x\cos x dx = \begin{bmatrix} u = x, du = dx \\ dv = \cos x dx, v = \sin x \end{bmatrix} = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin x dx =$

$= 0 - \cos\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2$

Теорема о среднем.

Теорема. Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента, то есть $\int_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)$, $c \in [a, b]$.

Доказательство: $\triangleright$ На основании формулы Ньютона-Лейбница

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где $F'(x) = f(x)$.

По теореме Лагранжа о конечных приращениях функции

$F(b) - F(a) = F'(c)\cdot(b-a) = f(c)\cdot(b-a)$, так как $F'(c) = f(c)$ $\triangleleft$

Геометрический смысл формулы. При $f(x) \geq 0$ формула показывает, что криволинейная трапеция $oABb$ (рис.2) имеет площадь равную некоторому прямоугольнику $oPQb$. Высота $f(c)$ этого прямоугольника носит название среднего значения функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. То есть $\mu = f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

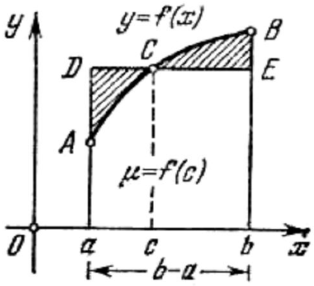

Рис. 2.

Следствие. Если $m = \min\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, $M = \max\limits_{a \leq x \leq b} f(x)$, то $m \leq f(x) \leq M$ и при $a < b$ из теоремы о среднем следует $m\cdot(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M\cdot(b-a)$. (Данное свойство позволяет оценить величину определенного интеграла.)

Теорема. При $b > a$, интеграл от неотрицательной функции, есть число неотрицательное.

$\triangleright$ Так как $f(x) \geq 0$ и $a < b \Rightarrow b - a > 0 \Rightarrow$ (по теореме о среднем) интеграл от неотрицательной функции есть число неотрицательное. $\triangleleft$

Теорема. Неравенство между непрерывными функциями модно интегрировать почленно при условии, что верхний предел больше верхнего. То есть если $b > a$ и $f(x) < g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

Доказательство: $\triangleright$ $\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$

Так как в последнем интеграле подынтегральная функция $f(x) - g(x) > 0$ то

$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx > 0$ $\triangleleft$

Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

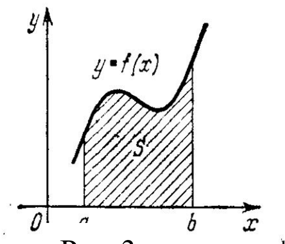

Рис. 3.

Задача 1. Найти площадь криволинейной трапеции (рис. 3.), ограниченной дугой графика функции $y = f(x)$, отрезком $a \le x \le b$ оси OX и двумя вертикалями $x = a$; $x = b$.

На основании геометрического смысла интеграла

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)dx}$$

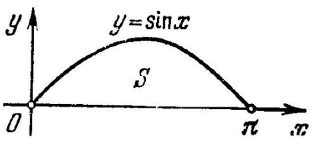

Рис. 4.

Пример 1. Вычислить площадь одной волны синусоиды $y = \sin x$ $\left(0 \le x \le \pi\right)$. (Рис 4.)

$$S = \int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = 2$$

Задача 2. Найти площадь области, ограниченной графиками непрерывных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, $f_1(x) \le f_2(x)$ и двумя прямыми $x = a$, $x = b$. (рис 5)

Искомую площадь можно рассматривать как разность двух криволинейных трапеций.

$$S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$

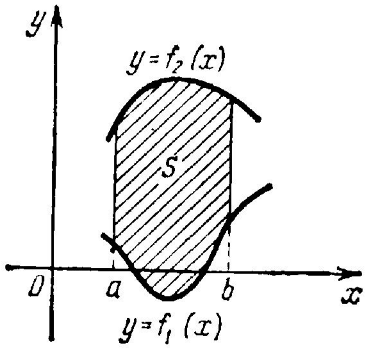

Рис. 5.

Пример 2. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

Находим точки пересечения данных кривых и строим искомую фигуру (рис. 6):

$$\left.\begin{array}{l} y = 3x - x^2 \\ y = -x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x = 3x - x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_2 = 4 \\ y_2 = -4 \end{cases}.$$

Следовательно

$$S = \int_0^4 (3x - x^2 - (-x))dx = \int_0^4 (4x - x^2) = 2x^2 - \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}.$$

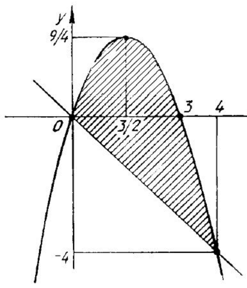

Рис. 6.

Замечание. Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию (рис 4), задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции $S = \int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)dt$, где α и β определяются из уравнений $\varphi(\alpha) = a$, $\psi(\beta) = b$.

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Запишем параметрическое уравнение эллипса: $x = a\cos t$, $y = b\sin t$. С учетом симметрии фигуры получаем $S = 4\int\limits_0^a ydx = 4\int\limits_{\pi/2}^0 a\sin t(-b\sin t)dt = 4ab\int\limits_0^{\pi/2}\sin^2 tdt =$

$$= 4ab\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 2t}{2}dt = 2ab\left(t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \pi ab.$$

<u>Площадь в полярных координатах.</u>

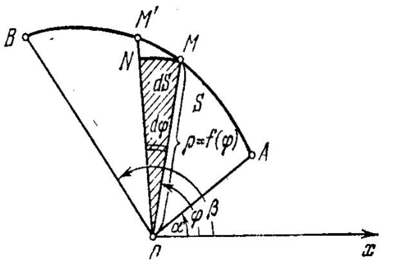

Рис. 7.

<u>Задача.</u> Найти площадь S сектора OAB, ограниченной данной линией $\rho = f(\varphi)$ и двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ (Рис. 7.) где ρ и φ - полярные координаты.

Для решения задачи разобьем сектор OAB на секторы лучами $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_0 < \cdots \varphi_{n-1} < \varphi_n = \beta$. Элемент n-ного сектора можно приближенно считать круговым сектором, ограниченным окружностью радиуса $\rho_i = f(\varphi_i)$. Площадь такого сектора $\Delta S_i = \frac{1}{2}\rho_i^2\Delta\varphi_i$. Чтобы получить общую площадь суммируем площади всех полученных секторов. $S = \sum\limits_{i=1}^n \Delta S_i = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^n \rho_i^2\Delta\varphi_i \xrightarrow[\Delta\varphi_i\to 0]{} \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi$.

Таким образом, получаем формулу для вычисления площади в полярных координатах: $\boxed{S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\varphi}$

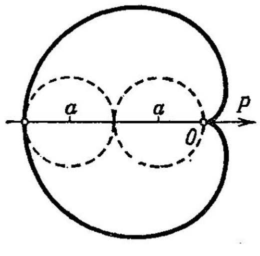

Рис. 8.

Пример 4. Вычислить площадь фигуры ограниченной кардиоидой $\rho = a(1-\cos\varphi)$ (Рис. 8)

Учитывая симметрию фигуры можно записать

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \rho^2 d\varphi = \int\limits_0^\pi \left(a(1-\cos\varphi)\right)^2 d\varphi = a^2\int\limits_0^\pi \left(1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi\right)d\varphi =$$

$$a^2\left(\varphi - 2\sin\varphi\Big|_0^\pi + \int\limits_0^\pi \frac{1+\cos\varphi}{2}d\varphi\right) = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^\pi =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\varphi$$

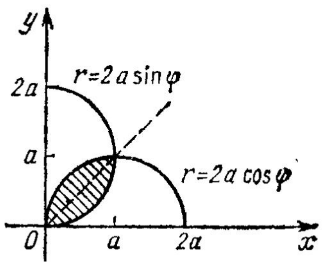

Рис. 9.

Пример 5. Найти площадь фигуры, ограниченной дугами окружностей $r = 2a\sin\varphi$ и $r = 2a\cos\varphi$.

Окружности пересекаются при $\varphi = \frac{\pi}{4}$; рассматриваемая фигура (Рис. 9) симметрична относительно луча $\varphi = \frac{\pi}{4}$, следовательно, ее площадь можно вычислить так:

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} 4a^2\sin^2\varphi d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}(1-\cos 2\varphi)d\varphi =$$

$$= 2a^2\left(\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\cdot a^2$$

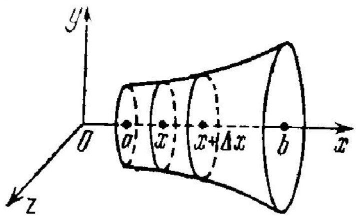

Рис. 10.

Вычисление объемов тел вращения.

Пусть Γ есть кривая $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Вычислим объем тела вращения, ограниченного плоскостями $x = a$ и $x = b$ и поверхностью вращения кривой Γ вокруг ОХ. (Рис. 10)

Производим разбиение отрезка $[a, b]$ на части

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$

Считаем, что элемент объема ΔV тела ограниченного плоскостями $x = x_i$ и $x = x_{i+1}$ приближенно равен объему цилиндра высоты $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, радиуса $y_i = f(x_i)$. То есть $\Delta V_i \cong \pi y_i^2 \Delta x_i = \pi f^2(x_i)\Delta x_i$.

Величина $V_n = \pi\sum\limits_{i=0}^{n-1} f^2(x_i)\Delta x_i$ приближенно выражает V и переходя к пределу имеем $V = \lim\limits_{\max\Delta x_i \to 0} \pi\sum\limits_{i=0}^{n-1} f^2(x_i)\Delta x_i = \pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$. Мы получили формулу объема тела вращения. Аналогично можно получить формулу объема тела вращения вокруг оси ОУ.

$$V = \pi\int\limits_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Пример 5. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, лежащей в плоскости Oxy и ограниченной линиями $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

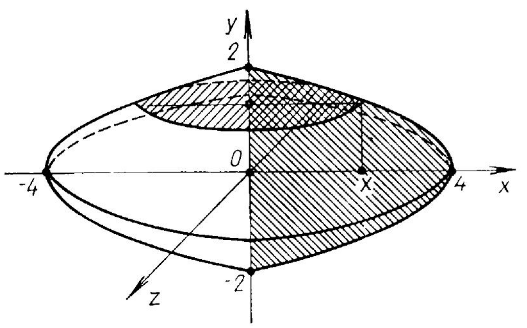

Рис. 11.

Очевидно (Рис. 11), что

$$V_y = \pi\int\limits_c^d x^2 dy = \pi\int\limits_{-2}^{2}(4-y^2)^2 dy = 2\pi\int\limits_0^2 (4-y^2)^2 dy =$$

$$= 2\pi\int\limits_0^2 (16 - 8y^2 + y^4)dy = 2\pi\left(16y - \frac{8}{3}y^3 + \frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$2\pi\left(32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}\right) = \frac{512}{15}\pi \approx 107{,}23$$

Длина дуги кривой.

Определение. Под длиной дуги АВ понимается предел, к которому стремиться длина ломаной линии, вписанной в эту дугу, когда число звеньев ломанной возрастает неограниченно, а длина наибольшего звена ее стремиться к нулю.

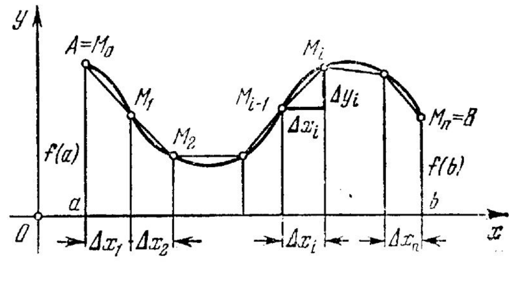

Рис. 12.

Кривая называется <u>гладкой</u>, если она непрерывна и в каждой точке имеет касательную непрерывно меняющую свое положение от точки к точке.

Рассмотрим вопрос о длине дуги l кривой, заданной $y = f(x)$, $a \le x \le b$. Впишем в данную гладкую кривую ломаную линию $A = M_0M_1M_2 \cdots M_{n-1}M_n = B$. (Рис. 12)

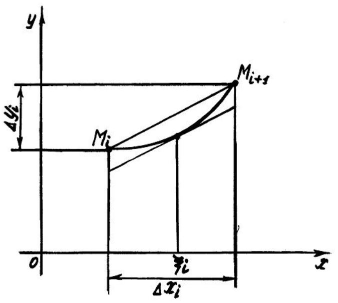

Рис. 13.

Проектируя точки M_i на Ox получим разбиение отрезка $[a, b]$ на n частей $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$. Рассмотрим i-тое звено ломаной $[M_i, M_{i+1}]$. (Рис. 13) Δy_i - приращение функции $f(x)$ на Δx_i.

$\Delta l_i = M_iM_{i+1} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2}$

Согласно теореме Лагранжа $\Delta y_i = \Delta x_i \cdot f'(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Тогда $\Delta l_i = M_iM_{i+1} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2 \Delta x_i}$, а длину всей ломаной можно получить суммируя все ее звенья. $l = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_i)^2)}\Delta x_i$. Перейдем к пределу, считая, что наибольшее звено стремиться к нулю.

$$l = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + (f'(\xi_i)^2)}\Delta x_i \to l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Пример 6. Найти длину дуги кривой $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$ между точками с абсциссами $x_1 = 3$ и $x_2 = 8$.

Согласно формуле имеем $l = \int\limits_3^8 \sqrt{1 + (\sqrt{x})^2}\, dx = \int\limits_3^8 \sqrt{1 + x}\,dx = \left.\frac{(1+x)^{3/2}}{3/2}\right|_3^8 = \frac{38}{3}$.

<u>Случай параметрически заданной кривой.</u>

Если линия задана в параметрическом виде, то есть $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $t_1 \le t \le t_2$, где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывно дифференцируемые на отрезке $[t_1, t_2]$ функции.

При стремлении длины отрезка ломаной к нулю можно считать, что $\Delta l_i \to dl$, то есть дифференциалу дуги. Тогда также $\Delta x_i \to dx$, $\Delta y_i \to dy$ соответствующие дифференциалы. Тогда можно записать $\Delta l_i = M_iM_{i+1} = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \to dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Это формула для вычисления дифференциала дуги. Тогда $l = \int dl$.

Так как $dx = \varphi'(t)dt$ и $dy = \psi'(t)dt$, то

$dl = \sqrt{(\varphi'(t)dt)^2 + (\psi'(t)dt)^2} = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt$ и

$$\boxed{l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt}$$

Пример 7. Найти длину дуги астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$. (Рис. 14.)

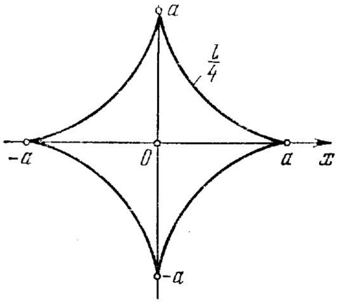

Рис. 14.

$$x'(t) = -3a\cos^2 t\sin t\,,\ \ y'(t) = 3a\sin^2 t\cos t$$

$$\frac{l}{4} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt =$$

$$= 3a\int_0^{\pi/2} \cos t\sin t dt = 3a\int_0^{\pi/2} \sin t d(\sin t) =$$

$$= 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{3a}{2} \quad l = 6a$$

Длина дуги в полярных координатах.

Выведем сначала дифференциал dl дуги в полярных координатах. Из предыдущего раздела известно, что $(dl)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, где x н y— прямоугольные декартовы координаты точки дуги.

Как известно, формулы перехода от полярных координат ρ и φ к прямоугольным x и y следующие: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Тогда

$$dx = x'(\varphi)d\varphi = (\rho'_\varphi\cos\varphi - \rho\sin\varphi)d\varphi$$

$$dy = y'(\varphi)d\varphi = (\rho'_\varphi\sin\varphi + \rho\cos\varphi)d\varphi\,.$$

Возведя в квадрат и складывая, получим

$$(dl)^2 = (\rho'^2\cos^2\varphi - 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + \rho'^2\sin^2\varphi + 2\rho'\rho\cos\varphi\sin\varphi +$$

$$+ \rho^2\cos^2\varphi)(d\varphi)^2 = (\rho'^2 + \rho^2)(d\varphi)^2$$

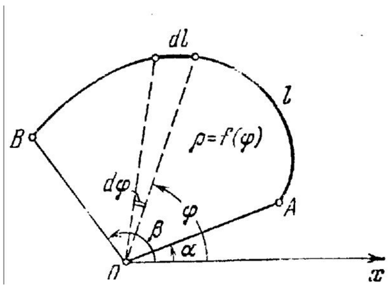

Рис. 15.

Следовательно, $dl = \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\varphi$. (1)

Для того чтобы найти длину дуги непрерывно дифференцируемой кривой
$\rho = \rho(\varphi)$ между точками А и В (Рис. 15) необходимо проинтегрировать равенство (1) в пределах от $\rho = \alpha$ до $\rho = \beta$.

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\varphi$$

Пример 8.. Вычислить полную длину дуги кардиоиды (Рис. 8.) $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

$$\rho' = a\sin\varphi$$

$$\frac{1}{2}l = \int_0^\pi \sqrt{a^2(1-\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}d\varphi =$$

$$= a\int_0^\pi \sqrt{2(1-\cos\varphi)}d\varphi = a\int_0^\pi \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\varphi}{2}}d\varphi = a\int_0^\pi 2\sin\frac{\varphi}{2}d\varphi = -4a\cos\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^\pi = 4a$$

$$l = 8a$$

Физические и механические приложения определенного интеграла.

Одно из основных применений определенного интеграла – для вычисления работы переменной силы.

Задача. Найти работу А непрерывной переменной силы *F(x),* приложенной к материальной точке М, при перемещении последней вдоль оси *Ox* из положения $x = a$ в положение $x = b$, предполагая, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

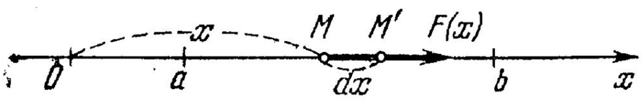

Рис. 16

Пусть точка М переместилась из положения *x* в положение *x* + *dx* (Рис. 16.). На бесконечно малом промежутке $[x, x+dx]$длины *dx* силу *F(x)* приближенно можно считать постоянной. Поэтому *элементарная работа силы* равна

$$dA = F(x)dx$$

Интегрируя данное выражение в пределах от *x=a* до *x=b*, получим всю работу

$$A = \int_a^b F(x)dx$$

Кроме того, определенный интеграл применяется для вычисления некоторых механических величин, таких как: статистические моменты, моменты инерции и координаты центра масс.

Несобственный интеграл.

При определении интеграла $\int_a^b f(x)dx$ предполагалось, что 1) промежуток интегрирования $[a,b]$ конечен и 2) подынтегральная функция $f(x)$- определена и непрерывна на $[a,b]$. Иногда от одного (или обоих) этих предположений можно отказаться в этом случае интеграл имеет название несобственный интеграл.

I. Интеграл по бесконечному промежутку.

Определение. Пусть функция $f(x)$ задана и непрерывна на полуинтервале $a \le x < +\infty$. Тогда для любого $x < B$ существует интеграл $\int_a^B f(x)dx$. Если существует предел $\lim\limits_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx$, то этот предел называют *несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования* функции $f(x)$ на интервале $[a, +\infty]$ и записывают в виде

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{B\to+\infty}\int_a^B f(x)dx.$$

При этом говорят, что интеграл сходится. В противном случае (предел не существует или равен ∞) говорят, что он расходится или не существует как несобственный интеграл.

Примеры.

1. $\int\limits_0^{+\infty} \cos x dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_0^B \cos x dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \sin B$ -Предела нет. Несобственный интеграл не существует.

2. $\int\limits_0^{+\infty} 2x dx = x^2\Big|_0^{+\infty} = +\infty$ - Несобственный интеграл расходится.

3. $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_1^B \frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{B\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^B = \lim\limits_{B\to+\infty} \left(-\frac{1}{B}+1\right) = 1$ Интеграл сходится.

Утверждение: Если $f(x) > 0$, то интеграл $\int\limits_a^B f(x)dx$ возрастает вместе с B.

Доказательство: Пусть $B' > B$, так как $\int\limits_B^{B'} f(x)dx > 0$ (интеграл от положительной функции), то $\int\limits_a^{B'} f(x)dx = \int\limits_a^B f(x)dx + \int\limits_B^{B'} f(x)dx > \int\limits_a^B f(x)dx$ ⊲

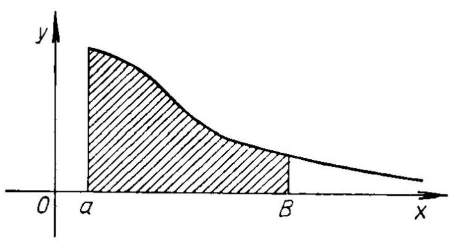

Рис. 17.

Известно, что всякая возрастающая переменная имеет предел (конечный или бесконечный), то есть при $f(x) > 0$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ имеет (конечное или бесконечное числовое значение. Геометрически – это площадь фигуры, ограниченной слева прямой $x = a$, снизу осью Ox, сверху графиком $y = f(x)$ и неограниченно простирающейся направо. (Рис. 17.)

Пусть $F(x)$ первообразная для $f(x)$, тогда

$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \int\limits_a^B f(x)dx = \lim\limits_{B\to+\infty} \left[F(B) - F(a)\right]$. Если ввести обозначение

$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = F(+\infty)$, то приходим к обобщенной формуле Ньютона-Лейбница

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a)}$$

Мы подробно рассмотрели вычисление интеграла $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Аналогично можно определить интегралы *с бесконечным нижним пределом* и *с обоими бесконечными пределами*:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{b} f(x)dx \text{ и}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{c} f(x)dx + \lim_{B\to+\infty}\int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \text{ где } -\infty < c < +\infty .$$

Пример 4. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to-\infty}\int_{A}^{0}\frac{1}{1+x^2}dx + \lim_{B\to+\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{A\to-\infty} arctgx\Big|_A^0 + =$

$+\lim_{B\to+\infty} arctgx\Big|_0^B = \lim_{A\to-\infty}(arctg0 - arctgA) + \lim_{B\to+\infty}(arctgB - arctg0) = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$

II. <u>Интегралы от неограниченных функций.</u>

Допустим, что отрезок $[a,b]$ - конечен, но функция $f(x)$ не ограничена на нем, а стремится к бесконечности при приближении к одной из особых точек c_1, $c_2,\cdots c_n$.

Рассмотрим сначала одну особую точку $x=b$. Во всех остальных точках функция $f(x)$ непрерывна. Пусть точка β такова, что $a<\beta<b$, тогда на отрезке $[a,\beta]$ определен интеграл $\int_a^{\beta} f(x)dx$. Если существует предел $\lim_{\beta\to b}\int_a^{\beta} f(x)dx$, то *несобственный интеграл от разрывной функции* существует (сходится). В противном случае интеграл расходится.

Аналогичным образом можно рассмотреть интеграл с особой точкой $x=a$.

Примеры.

5. $\int_0^1\frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{1}{x}dx = \lim_{\alpha\to0}\ln|x|\Big|_\alpha^1 = +\infty$. Интеграл расходится.

6. $\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\alpha\to0}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\alpha\to0}2\sqrt{x}\Big|_\alpha^1 = 2$. Интеграл сходится.

Если обе точки a и b - особые, то интеграл определяется как сумма

$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, где $a<c<b$.

<u>Несобственный интеграл с особенностями в нескольких точках.</u>

Пусть $f(x)$ непрерывна всюду на $[a,b]$ кроме точек $c_1<c_2<\cdots<c_n$, лежащих между a и b. (То есть $f(x)\to\infty$ при $x\to c_i$.) Тогда под интегралом от a до b понимается сумма

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots\int_{c_n}^{b} f(x)dx .$$

Если не учитывать неограниченность функции на отрезке интегрирования можно получить ошибочное значение интеграла.

Пример. Применим формулу Ньютона-Лейбница для интеграла $\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1} = -2$. Полученный результат неверен, поскольку подынтегральная функция положительна.

Ошибка получена, так как не учтено, что не отрезке интегрирования $[-1,1]$ существует особая точка $x=0$, в которой функция $f(x)=\frac{1}{x^2}$ неограниченна. Необходимо вычислить данный интеграл как несобственный, а именно:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx+\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{\beta\to 0}\int_{-1}^{\beta}\frac{1}{x^2}dx+\lim_{\alpha\to 0}\int_{\alpha}^{1}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{\beta\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{-1}^{\alpha}+\lim_{\alpha\to 0}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{\alpha}^{1}=+\infty$$

Приближенное вычисление определенных интегралов.

Часть интегралов ,как уже было сказано, не имеют первообразных в элементарных функциях, поэтому для их нахождения применяют приближенные вычисления.

I. *Формула трапеций.*

Чтобы приближенно вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ воспользуемся его геометрическим смыслом. Как известно такой интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции ограниченной линией $y=f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x=a$ и $x=b$ (рис. 18).

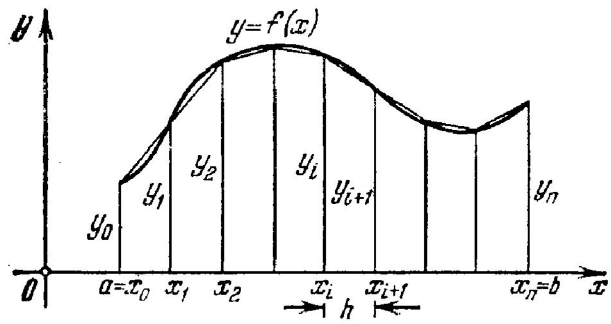

Рис. 18.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n частей длины $h=\frac{b-a}{n}$. (h - шаг разбиения.) $x_1,x_2,\cdots x_n$ - абсциссы точек деления и $y_1,y_2,\cdots y_n$ - соответствующие ординаты кривой. Имеем расчетные формулы: $y_i=f(x_i)$, где $x_i=x_0+ih$. ($i=0,1,\cdots,n$). В результате построения наша криволинейная трапеция разбилась на ряд вертикальных полосок одной и той же ширины h, каждую из которых приближенно можно принять за трапецию. Суммируя площади этих трапеций, будем иметь:

$$\int_a^b f(x)dx\approx h\left(\frac{y_0}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{y_n}{2}\right)$$ (Формула трапеций.)

Пример 1. Вычислить приближенно $\int_0^1\sqrt{1+x^2}dx=I$.

Разобьем промежуток интегрирования на 10 частей ($n=10$), следовательно $h=0{,}1$.

Абсциссы точек деления x_i и соответствующие им ординаты $y_i=\sqrt{1+x_i^2}$, запишем в таблице. Причем для удобства в начальной и конечной точке умножим значение на $\frac{1}{2}$

.

i	x_i	y_i
0	0,0	0,5000*
1	0,1	1,0050
2	0,2	1,0198
3	0,3	1,0440
4	0,4	1,0770
5	0,5	1,1180
6	0,6	1,1662
7	0,7	1,2207
8	0,8	1,2806
9	0,9	1,3454
10	1,0	0,7071*

Находим $\sum_{i=0}^{10} y_i = 11{,}4838$. И по формуле трапеций имеем $I \approx 1{,}148$. Точное значение этого же интеграла, полученное по формуле Ньютона-Лейбница $I = \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\ln(1+\sqrt{2}) \approx 1{,}1479$.

П ***Формула Симпсона***

.

Более точную формулу можно получить, если профиль криволинейной полоски считать параболой, а не прямой линией как в формуле трапеций. В этом случае можно получить формулу Симпсона:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\{f(a) + 2[f(a+2h) + \cdots + f(a+(n-2)h)] +$$

$$+ 4[f(a+h) + \cdots + f(a+(n-1)h] + f(b)\},\ h = \frac{b-a}{n}.$$

Пример 2. Вычислить приближенно $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = I$.

Промежуток интегрирования разбиваем на 10 частей ($n = 10$), $h = 0{,}1$.

В таблицу запишем абсциссы точек деления x_i и соответствующие им ординаты $y_i = \frac{1}{1+x_i^2}$.

i	x_i	y_i
0	0,0	1,00000
1	0,1	0,99010
2	0,2	0,96153
3	0,3	0,91743
4	0,4	0,86206
5	0,5	0,80000
6	0,6	0,73529
7	0,7	0,67114
8	0,8	0,60975
9	0,9	0,55249
10	1,0	0,50000

Отдельно суммируем значения y_i, стоящие на четных местах $\sum(\text{четн}) = 0{,}96153 + 0{,}86206 + 0{,}73529 + 0{,}60975 = 3{,}16863$ и на нечетных местах $\sum(\text{нечетн}) = 0{,}9901 + 0{,}9173 + 0{,}8 + 0{,}67114 + 0{,}55249 = 3{,}93116$

$$I \approx \frac{1}{30}\left[1{,}0 + 2 \cdot 3{,}16863 + 4 \cdot 3{,}93116 + 0{,}5\right] = 0{,}78537$$

Точное значение интеграла $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}7853$.