Введение в линейную алгебру

Матрицы.

Определение. Таблица $m\times n$ чисел a_{ij} вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

состоящая из m строк и n столбцов называется ***матрицей***.

Элементы матрицы a_{ij} нумеруются аналогично элементам определителя т.е. i – номер строки, j – номер столбца.

Обозначение: A, B, C. $m\times n$ – ***размерность матрицы***

Системы линейных уравнений. Основные понятия.

Определение. Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

называется ***системой линейных уравнений***, содержащей ***m*** уравнений и ***n*** неизвестных.

Числа a_{ij} – ***коэффициенты системы,*** b_i – ***свободные члены*** системы, x_i – ***неизвестные.***

Определение. Коэффициенты, стоящие перед неизвестными, записанные в виде матрицы называются ***матрицей системы***.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

вектор – столбец неизвестных

вектор – столбец свободных членов

Матричная форма записи: $\boxed{A \times X = B.}$

Если в матрицу системы добавить столбец свободных членов, то получим ***расширенную матрицу системы***.

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Определение. Совокупность из n чисел называется ***решением системы*** (1) если каждое уравнение системы обращается в числовое равенство после подстановки в него этих чисел вместо соответствующих неизвестных.

Система уравнения называется ***совместной*****,** если она имеет хотя бы одно решение, и ***несовместной***, если она не имеет ни одного решения.

Пример.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -8 \\ 4x_1 - 7x_2 + 6x_3 = 3 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Матрица системы:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -7 & 6 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Столбец свободных членов

Расширенная матрица системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & -8 \\ 4 & -7 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Определители

Определение 1. Пусть задана квадратная таблица из 4-х чисел:

a_1, a_2, b_1, b_2.

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$$

Это ***матрица*** 2-го порядка.

$a_1b_2 - a_2b_1$ ***определитель*** 2 –го порядка.

Обозначение: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

a_1, a_2, b_1, b_2 - ***элементы определителя***.

Строки 1-я и 2-я,

Столбцы 1-й и 2-й.

Главная диагональ

Побочная диагональ

Общее обозначение элементов определителя с двумя индексами

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

i – номер строки

j – номер столбца

a_{ij} – элементы определителя.

a_{12} – элемент в первой строке и втором столбце.

Определитель 2-го порядка:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Примеры:

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-3) - 1\cdot 2 = -17$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 7\cdot 0 - 2\cdot(-4) = 8$$

Замечание: Элементами определителя могут быть не только числа, но и любые алегебраические выражения.

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

Определитель третьего порядка

Соответствует таблица из 9-ти чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Это число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Разложение по первой строке определителя.

Правило Саррюса

$$
\begin{array}{ccc}
 & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \\
- & \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix} & +
\end{array}
$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Примеры

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 2 \cdot (-8) - 1 \cdot 41 = -7$$

По правилу Саррюса:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \\ 7 & 5 & -2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) \cdot (-2) + 4 \cdot 5 \cdot (-1) + 7 \cdot 2 \cdot 0 -$$

$$\begin{matrix} 3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 0 \end{matrix}$$

$$-(-1) \cdot (-3) \cdot 7 - 0 \cdot 5 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 \cdot 4 =$$

$$= 18 - 20 - 21 + 16 = -7$$

Методы решения систем линейных уравнений.

Метод Крамера.

Рассмотрим систему из *n* уравнений с *n* неизвестными,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (2)$$

и пусть $detA \neq 0$.

Метод Крамера.

Теорема (правило Крамера). Система из n уравнений с n неизвестными (2) в случае, когда определитель системы не равен 0 ($detA \neq 0$), имеет единственное решение, вычисляемое по формулам:

$$\boxed{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}} \longleftarrow \text{формула Крамера}$$

где Δ – определитель системы, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы, заменой i – того столбца столбцом свободных членов.

Примеры: 1. Решим систему методом Крамера

$$\begin{cases} 7x_1 - 6x_2 = 5 \\ 8x_1 - 7x_2 = -10 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & -6 \\ 8 & -7 \end{vmatrix} = -1 \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & -6 \\ 10 & -7 \end{vmatrix} = -95 \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 8 & -10 \end{vmatrix} = -110$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-95}{-1} = 95 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-110}{-1} = 110$$

2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\3\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}3\\1\\2\end{matrix}} \end{vmatrix} = -18$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -7$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{5}{-18} = -\frac{5}{18} \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-1}{-18} = \frac{1}{18} \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-7}{-18} = \frac{7}{18}$$

Метод Гаусса.

Наиболее универсальный и эффективный из методов решений систем линейных уравнений: ***метод Гаусса*** или ***метод последовательного исключения неизвестных***.

Пусть дана система уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_m x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Расширенная матрица системы:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Выполняя ***элементарные преобразования*** **строк** расширенной матрицы системы можно привести ее к ступенчатому виду:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \tilde{a}_{12} & \cdots & \tilde{a}_{1k} & \cdots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \cdots & \tilde{a}_{2k} & \cdots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + \tilde{a}_{12}x_2 + \ldots + \tilde{a}_{1k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ x_2 + \ldots + \tilde{a}_{2k}x_k + \cdots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \cdots \\ x_k + \cdots + \tilde{a}_{mn}x_n = \tilde{b}_m \end{cases}$$

Исключение неизвестных - ***прямой ход метода Гаусса***.

Определение неизвестных из ступенчатой системы – ***обратный ход метода Гаусса***.

Элементарные преобразования матрицы.

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение строки (столбца) на число отличное от нуля.
3. Перестановка строк (столбцов).
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Пример. 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 \quad\quad + 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + \ x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 6 & 1 \end{array}\right) \times(-1) \times(-1) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \times 2 \times 1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ & & & & \\ & & & & \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ \quad\quad x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ \quad\quad\quad\quad 4x_3 + 6x_4 = -1 \\ \quad\quad\quad\quad\quad\quad -x_4 = -2 \end{cases}$$

$$x_1 = 5 - 4x_4 - 3x_3 - 2x_2 = \frac{15}{4}$$

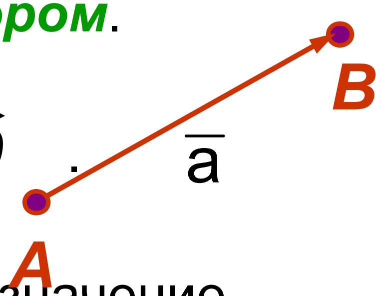
$$x_2 = 1 - 3x_4 - 2x_3 = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{-1 - 6x_4}{4} = -\frac{13}{4}$$

$$x_4 = 2$$

Векторы. Основные определения.

Определение 1. Направленный отрезок (или, что то же, упорядоченную пару точек) мы будем называть ***вектором***.



Обозначение: $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$, **a**.

Нулевой вектор (у которого начало и конец совпадают): $\vec{0}$.

Вектор характеризуется ***длиной*** и ***направлением***.

Под ***модулем*** (длиной) вектора понимаем его численное значение без учета направления.

$$|\vec{a}| = a \qquad |\vec{0}| = 0$$

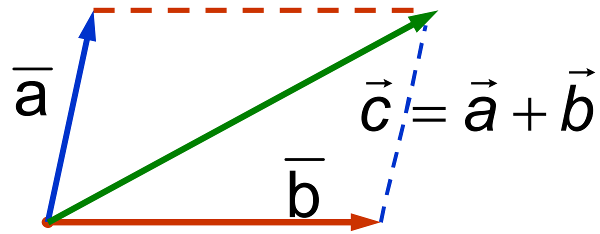
Вектор, длина которого равна 1 – единичный вектор. $|\vec{e}| = 1$.

Если ненулевой вектор $\vec{a}$ разделить на его длину получим единичный вектор (***орт***) направления. $\vec{e} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

Определение 2. Два вектора называются ***равными***, то есть не различаются как векторы, если соответствующие отрезки параллельны, имеют одинаковую длину и направление.

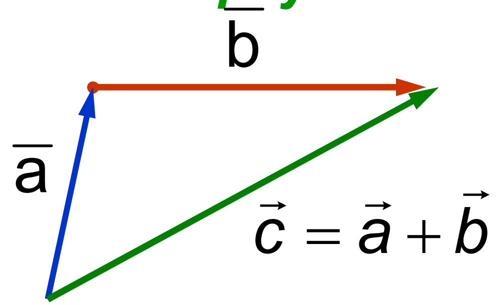
Линейные операции над векторами

Определение 3. ***Суммой*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой третий вектор $\vec{c}$, что при совмещенных началах этих трех векторов, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ служат сторонами параллелограмма, а вектор $\vec{c}$ его диагональю.



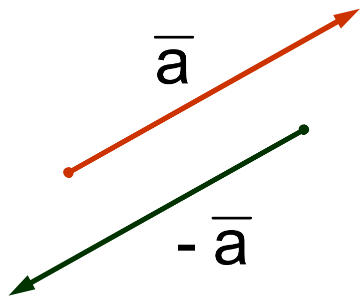
Это ***сложение по правилу параллелограмма***.

Более удобно ***правило треугольника.***



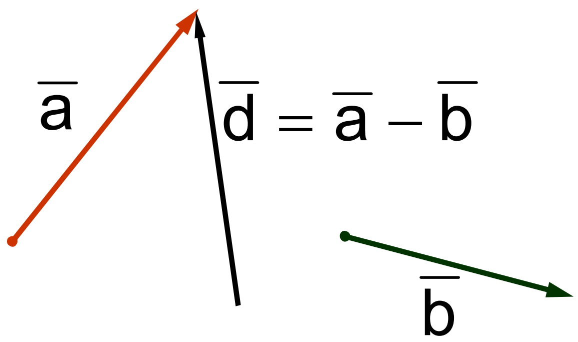
Для каждого вектора $\vec{a}$ существует вектор ему противоположный – имеющий ту же длину, но противоположный по направлению.

Обозначение: $-\vec{a}$



$$\vec{a} + \left(-\vec{a}\right) = 0$$

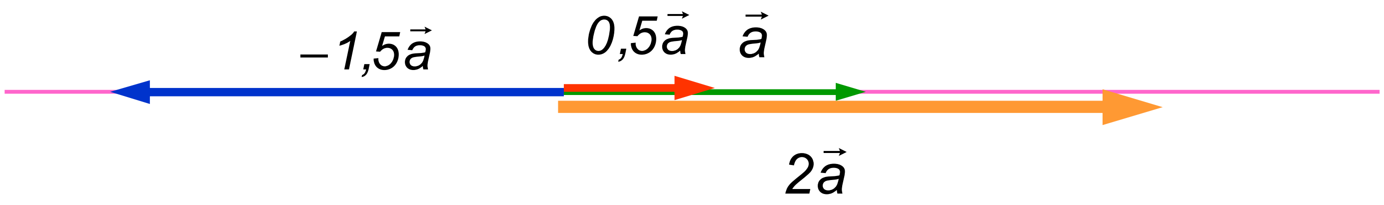
Определение 4. ***Разностью*** векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется сумма $\vec{a}$ и вектора противоположного $\vec{b}$: $\vec{a} + \left(-\vec{b}\right) = \vec{a} - \vec{b}$



Определение 5. ***Произведением*** вектора $\vec{a}$ на вещественное число α называется вектор $\vec{b}$, определяемый условием

1. $\left|\vec{b}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{a}\right|$;
2. вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$;
3. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ направлены одинаково, если $\alpha > 0$, и противоположно, если $\alpha < 0$.

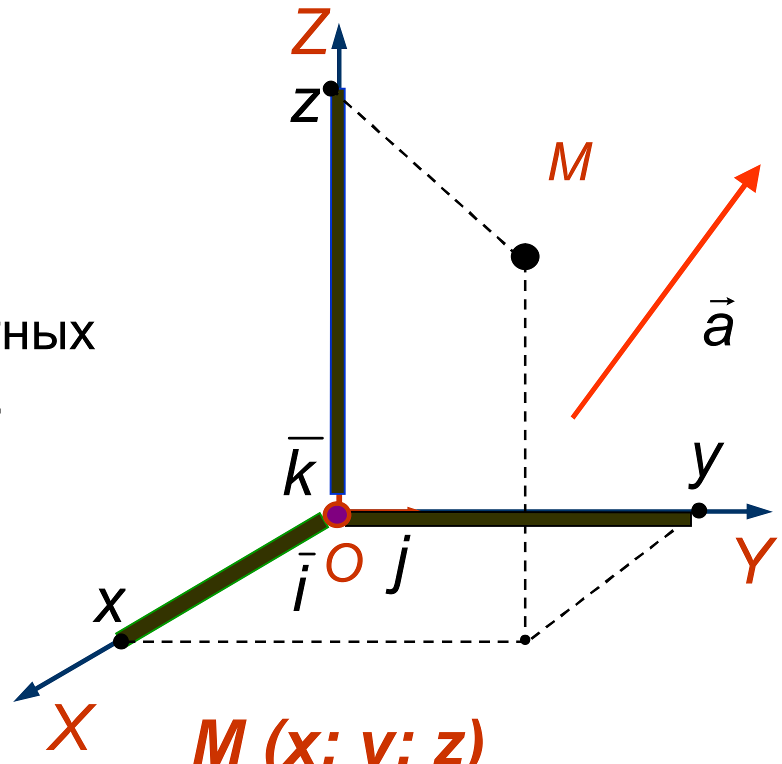
Обозначение: $\alpha\vec{a}$



Замечание. Иногда числа называют ***скалярами***. Эта операция умножения вектора на скаляр.

Декартова прямоугольная система координат

Декартова система координат в пространстве задается началом координат точкой *O* и базисом, состоящим из трех взаимно перпендикулярных единичных векторов (ортов) $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ координатных осей *OX*, *OY* и *OZ* соответственно.



Обозначим: *M -к*онец вектора.

Вектор $\overline{OM}$ радиус – вектор имеет такие же координаты, что и точка ***M***:

M (x; y; z)

абсцисса

ордината

аппликата

Вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ может быть единственным образом разложен по базису $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

$$\vec{a} = \overline{OM} = x \cdot \bar{i} + y \cdot \bar{j} + z \cdot \bar{k}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM} = (x, y, z)$$

Модуль вектора: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Линейные операции над векторами заданными в координатной форме.

Пусть векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \qquad \vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$$

Тогда

$$\boxed{\begin{gathered}\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2) \\ \alpha\vec{a} = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1)\end{gathered}}$$

.

Примеры:

$$\vec{a} = (1, -2, 3) \qquad \vec{b} = (4, 0, 5)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (1 - 4, -2 - 0, 3 - 5) = (-3, -2, -2)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (1 + 4, -2 + 0, 3 + 5) = (5, -2, 8)$$

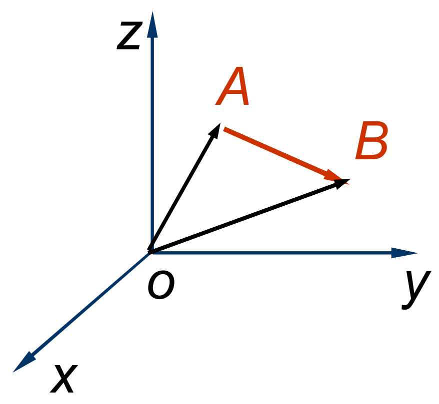
$$2\vec{a} = (2 \cdot 1, 2 \cdot (-2), 2 \cdot 3) = (2, -4, 6)$$

$$-3\vec{b} = ((-3) \cdot 4, (-3) \cdot 0, (-3) \cdot 5) = (-12, 0, -15)$$

Расстояние между двумя точками

Найдем координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Координаты вектора равны разности координат его конца и начала.

Расстояние между точками A и B:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

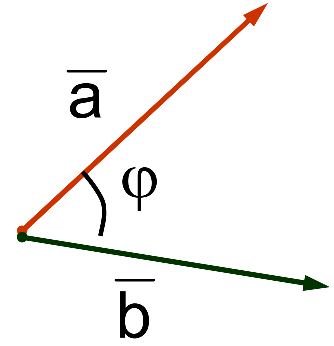
Пример: $A(1, 0, -3)$ $B(4, 2, -1)$

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 2 - 0, -1 - (-3)) = (3, 2, 2)$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{17} \approx 4,12$$

Скалярное произведение векторов.

Определение. Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют наименьший угол φ ($0 \le \varphi \le \pi$) на который нужно повернуть один из векторов, чтобы их направления совпали.



Определение: Назовем скалярным произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ число, равное произведению длин этих векторов и косинуса угла φ между ними.

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\quad \vec{a}\vec{b}$ $\quad \left(\vec{a}, \vec{b}\right)$

Выражение скалярного произведения через координаты векторов:

$$\boxed{\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}$$

$$\boxed{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0}$$

Условие перпендикулярности векторов

Примеры: 1. Даны векторы: $\vec{a}=(4,-2,-4)$ $\vec{b}=(6,-3,2)$

Вычислить: $\vec{a}\vec{b}$ $(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})$

$$(\vec{a},\vec{b})=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=4\cdot 6+(-2)\cdot(-3)+(-4)\cdot 2=24+6-8=22$$

$$(2\vec{a}-3\vec{b})\cdot(\vec{a}+3\vec{b})=2\vec{a}^2+6\vec{a}\vec{b}-3\vec{b}\vec{a}-9\vec{b}^2=2\vec{a}^2+3\vec{a}\vec{b}-9\vec{b}^2=$$

$$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2=\left(\sqrt{4^2+(-2)^2+(-4)^2}\right)^2=36$$

$$\vec{b}^2=|\vec{b}|^2=\left(\sqrt{6^2+(-3)^2+2^2}\right)^2=49$$

$$=2\cdot 36+3\cdot 22-9\cdot 49=-303$$

2. Даны вершины четырехугольника *A*(1, -2, 2), *B*(1, 4, 0), *C*(-4, 1, 1), *D*(-5, -5, 3). Доказать, что его диагонали взаимно перпендикулярны.

Нужно доказать, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярны.

$$\overrightarrow{AC}=(-5,3,-1) \qquad \overrightarrow{BD}=(-6,-9,3)$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(-5)\cdot(-6)+3\cdot(-9)+(-1)\cdot 3=0$$

Угол между векторами

Определим угол φ между векторами $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$.

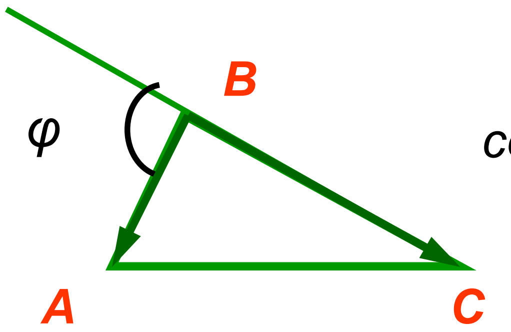
Из определения скалярного произведения:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

Пример. Даны вершины треугольника ABC: *A*(-1, -2, 4), *B*(-4, -2, 0), *C*(3, -2, 1). Вычислить внешний угол при вершине B.

Внешний угол будет определяться как угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $-\overrightarrow{BC}$.



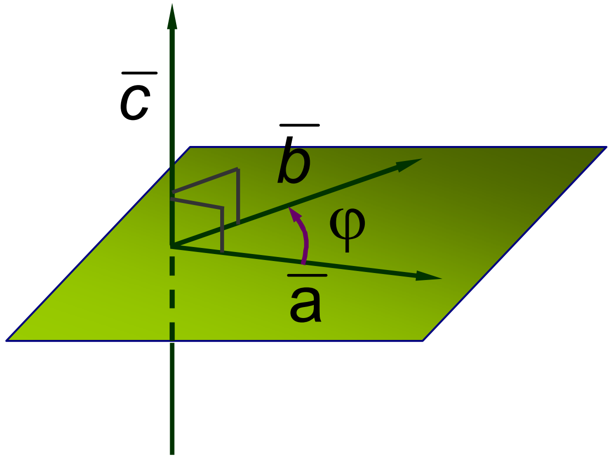
$$\overrightarrow{BA} = (-3, 0, -4) \qquad \overrightarrow{BC} = (7, 0, 1)$$

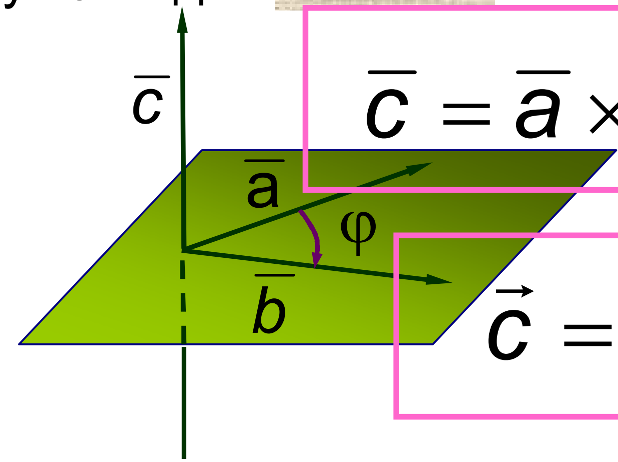
$$\cos\varphi = \frac{(-3)\cdot 7 + (-4)\cdot 1}{\sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}\cdot\sqrt{7^2 + 1^2}} = \frac{-25}{\sqrt{25}\cdot\sqrt{50}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\varphi = 3\pi/4$

Векторное произведение векторов

Тройка некомпланарных векторов $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ называется **левой** если наименьший поворот с конца третьего вектора $\overline{c}$ от первого вектора $\overline{a}$ ко второму вектору $\overline{b}$ виден **по** часовой стрелки





$$\boxed{\overline{c} = \overline{a} \times \overline{b}}$$

$$\boxed{\vec{c} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right]}$$

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, определяемый следующим образом:

- $|\overline{c}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \sin(\overline{a}; \overline{b})$.
- $\overline{c} \perp \overline{a}; \quad \overline{c} \perp \overline{b}$
- Вектор $\overline{c}$ направлен так, что тройка векторов $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$ - правая.

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)=$$

$$=x_1x_2\vec{i}\times\vec{i}+x_1y_2\vec{i}\times\vec{j}+x_1z_2\vec{i}\times\vec{k}+$$

$$+y_1x_2\vec{j}\times\vec{i}+y_1y_2\vec{j}\times\vec{j}+y_1z_2\vec{j}\times\vec{k}+$$

$$z_1x_2\vec{k}\times\vec{i}+z_1y_2\vec{k}\times\vec{j}+z_1z_2\vec{k}\times\vec{k}=$$

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}}$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=-\vec{j}\times\vec{i}=\vec{k}\qquad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}\qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{k}\times\vec{j}=\vec{i}$$

$$=x_1y_2\vec{k}-x_1z_2\vec{j}-y_1x_2\vec{k}+y_1z_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-z_1y_2\vec{i}=$$

$$=y_1z_2\vec{i}-z_1y_2\vec{i}+z_1x_2\vec{j}-x_1z_2\vec{j}+x_1y_2\vec{k}-y_1x_2\vec{k}=$$

$$=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\vec{i}-\left(x_1z_2-z_1x_2\right)\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\vec{k}=$$

$$=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Выражение векторного произведения в координатной форме:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

Найти векторное произведение векторов:

$$\bar{a}=2\bar{i}-3\bar{j}-\bar{k} \qquad \bar{b}=3\bar{i}-\bar{j}-4\bar{k}$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{vmatrix}$$

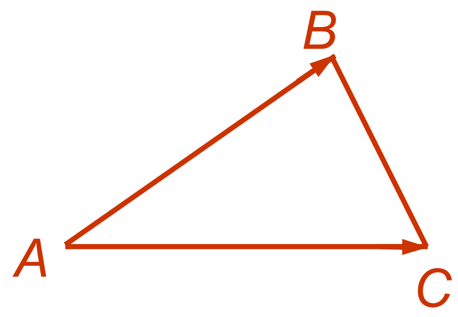
$$=\begin{vmatrix}-3 & -1\\ -1 & -4\end{vmatrix}\cdot\bar{i}-\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -4\end{vmatrix}\cdot\bar{j}+\begin{vmatrix}2 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}\cdot\bar{k}$$

$$=(12-1)\cdot\bar{i}-(-8+3)\cdot\bar{j}+(-2+9)\cdot\bar{k}=\boxed{-11\bar{i}+5\bar{j}+7\bar{k}}$$

Пример 2.

Найти площадь треугольника с вершинами:

$A(2;3;1)\quad B(5;6;3)\quad C(7;1;10)$



Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB}=\{5-2;6-3;3-1\}=\{3;3;2\}$$

$$\overline{AC}=\{7-2;1-3;10-1\}=\{5;-2;9\}$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\bar{a}\times\bar{b}\right|$$

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 3 & 3 & 2\\ 5 & -2 & 9\end{vmatrix}=31\bar{i}-17\bar{j}-21\bar{k}$$

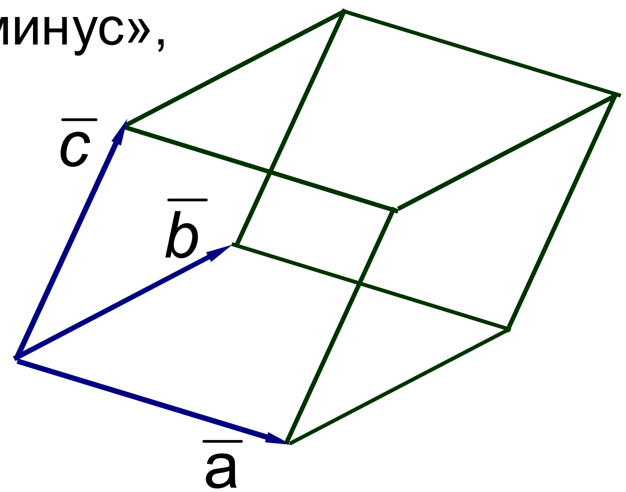
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{31^2+(-17)^2+(-21)^2}=\boxed{\frac{1}{2}\sqrt{1691}\approx 20.6}$$

Смешанное произведение векторов.

Определение. Смешанным (или векторно-скалярным) произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$, где первые два вектора перемножаются векторно, а их результат скалярно на третий вектор.

Геометрический смысл выражения $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$.

Смешанное произведение трех векторов равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.



В координатной форме:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Вычисление объемов параллелепипеда и треугольной пирамиды.

Согласно геометрическому смыслу смешанного произведения объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ вычисляется как

$$\boxed{V = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|},$$

а объем треугольной пирамиды, построенной на тех же векторах:

$$\boxed{V = \frac{1}{6}\cdot\left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|}$$

Примеры:

1. Даны $\vec{a} = (2,-1,0)$ $\vec{b} = (3,-2,4)$ $\vec{c} = (1,-2,5)$ $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = ?$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cdot\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} - (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - (-1)\cdot 11 = 15$$

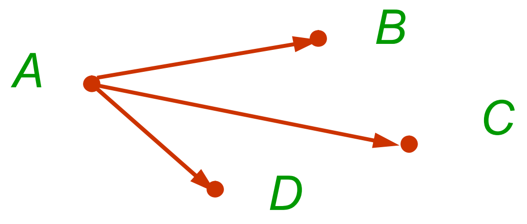
2. Проверить, лежат ли 4 точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1,5)$, $C(-1, 2, 1)$ и $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости.

Составим 3 вектора из данных точек и найдем их координаты:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -1, 6)$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AD} = (1, -1, 4)$$



Данные векторы должны лежать в одной плоскости и следовательно быть компланарными.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

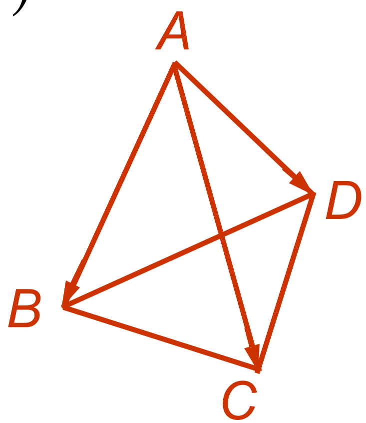
$$= (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot (-10) + 6 \cdot 2 = -2 - 10 + 12 = 0$$

Условие компланарности векторов выполняется, т.е. точки лежат в одной плоскости.

Пример 3.

Найти объем треугольной пирамиды с вершинами:

$$A\,(2;\,2;\,2)\quad B\,(4;\,3;\,3)\quad C\,(4;\,5;\,4)\quad D\,(5;\,5;\,6)$$



Найдем координаты векторов:

$$\overline{AB}=\{4-2;\,3-2;\,3-2\}=\{2;\,1;\,1\}$$

$$\overline{AC}=\{4-2;\,5-2;\,4-2\}=\{2;\,3;\,2\}$$

$$\overline{AD}=\{5-2;\,5-2;\,6-2\}=\{3;\,3;\,4\}$$

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\begin{vmatrix}2&1&1\\2&3&2\\3&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&0&1\\-2&1&2\\-5&-1&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&1\\-5&-1\end{vmatrix}=7$$

$$V=\frac{1}{6}\left|\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right|$$

Объем треугольной пирамиды равен 1/6 части параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a};\overline{b};\overline{c}$

$$V=\frac{7}{6}$$