Функции нескольких переменных

Функции нескольких переменных

- Поверхности второго порядка.
- Определение функции 2х переменных. Геометрическая интерпретация.
- Частные приращения функции. Частные производные.
- Производные высших порядков.
- Скалярное и векторное поле. Градиент.
- Уравнение касательной плоскости и нормали.
- Экстремум функции нескольких переменных.

Поверхности второго порядка

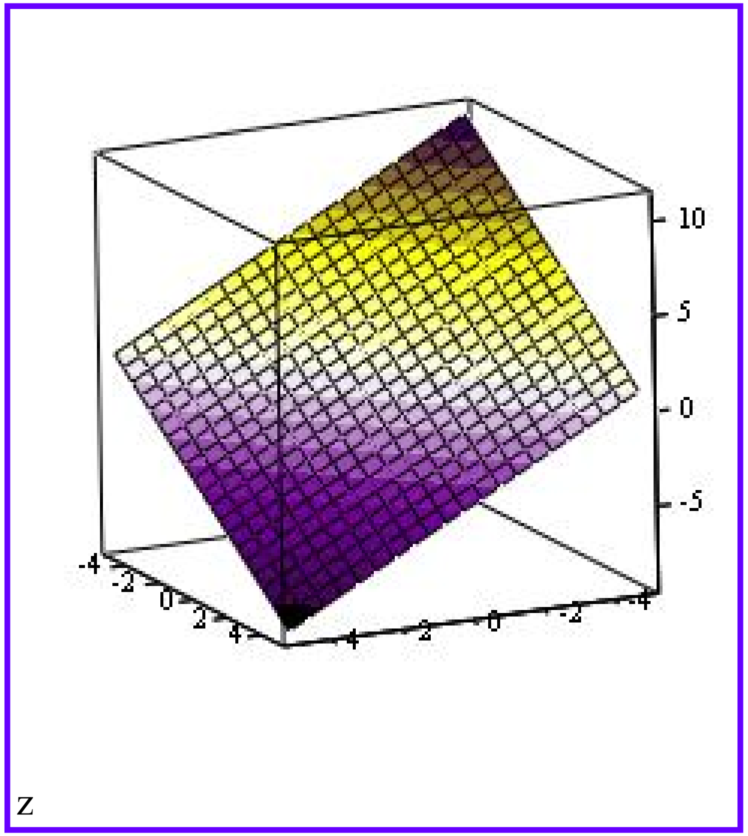
Определение. ***Поверхностью*** в пространстве называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $F(x, y, z) = 0$.

Самый простой вид поверхности, изученный в курсе аналитической геометрии – ***плоскость***.

Ее уравнение: $Ax + By + Cz + D = 0$.

Пример:

$x + y + z + 1 = 0$



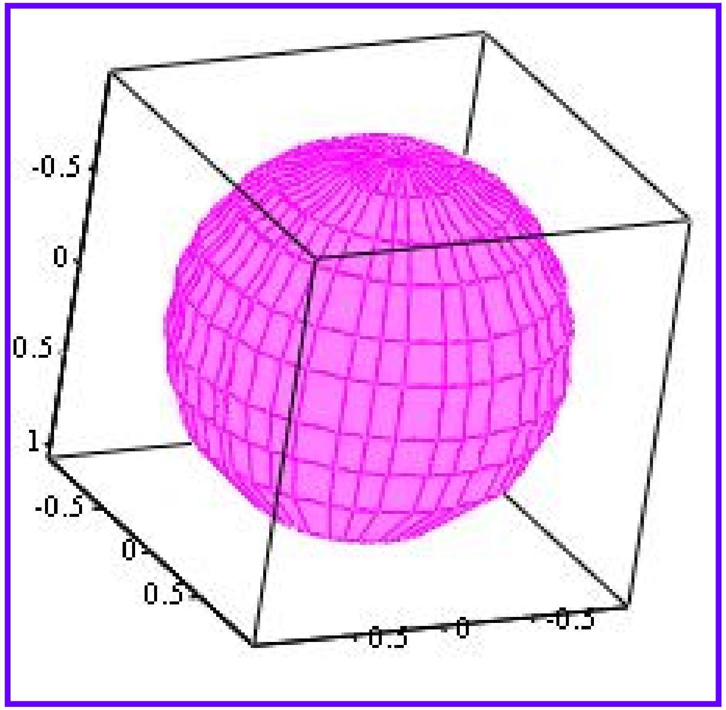
Сфера

Уравнение $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ определяет сферу радиуса R с центром в точке $S(a, b, c)$.

Если $a = b = c = 0$, то получаем уравнение сферы радиуса R с центром в начале координат.

Пример:

$$x^2+y^2+z^2=1$$



Цилиндрическая поверхность

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей) параллельной данному направлению и пересекающей данную линию (направляющую). Уравнение цилиндрических поверхностей, образующие которых параллельны оси *Oz* имеют вид $F(x, y) = 0$.

То есть уравнение цилиндрической поверхности с образующими параллельными *Oz* не содержат координаты z и совпадают с уравнением направляющей линии.

Примеры: Направляющая эллипс: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- ***эллиптический цилиндр.***

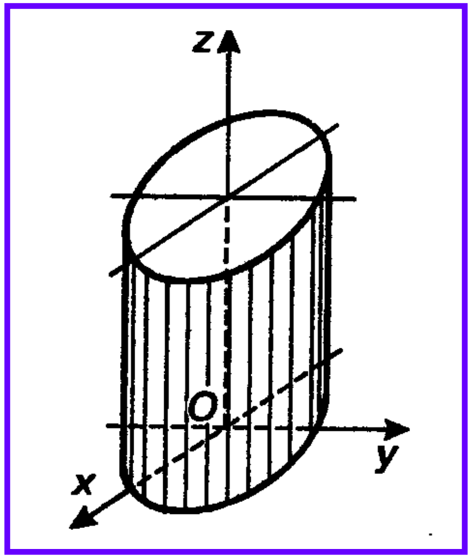
Направляющая гипербола: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

- ***гиперболический цилиндр.***

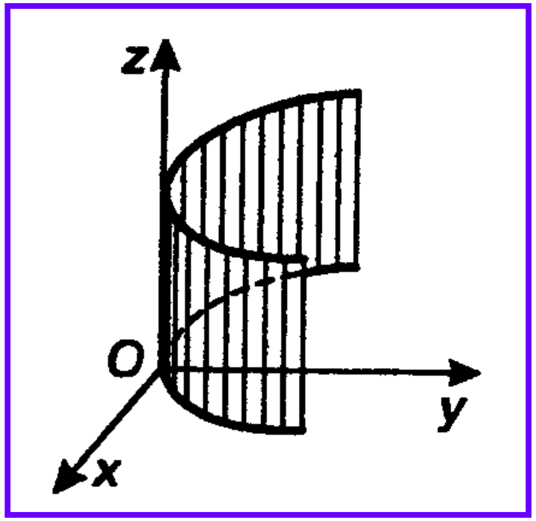
Направляющая парабола: $x^2 = 2py$

- ***параболический цилиндр.***

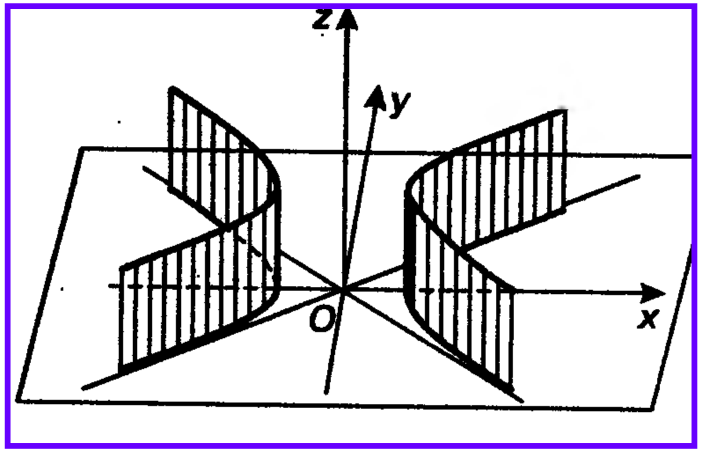
Цилиндрическая поверхность



Эллиптический цилиндр



Параболический цилиндр

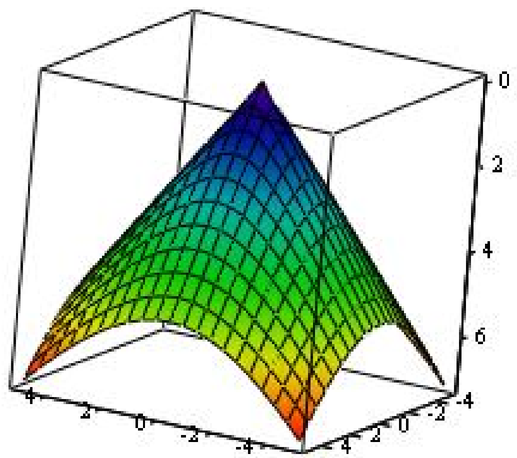


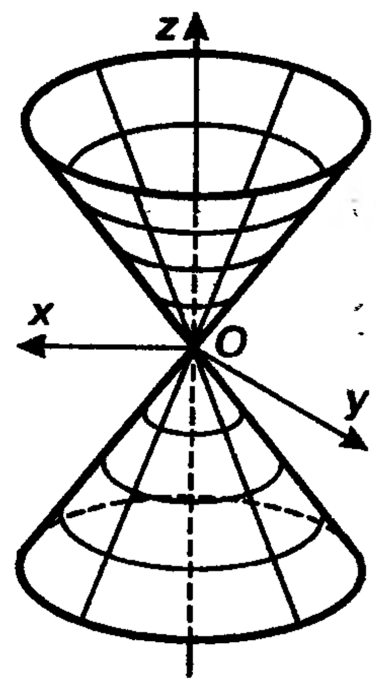
Гиперболический цилиндр

Коническая поверхность

Конической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой, проходящей через данную точку (вершину конуса) и пересекающей данную линию (направляющую) конуса.

Пример: $x^2 + y^2 = z^2$ - уравнение конуса.





Эллипсоид

Каноническое уравнение ***эллипсоида***: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

a, *b*, *c* – полуоси.

В сечении эллипсоида любой плоскостью параллельной *Oxy*, *Oyz* или *Oxz* – эллипсы.

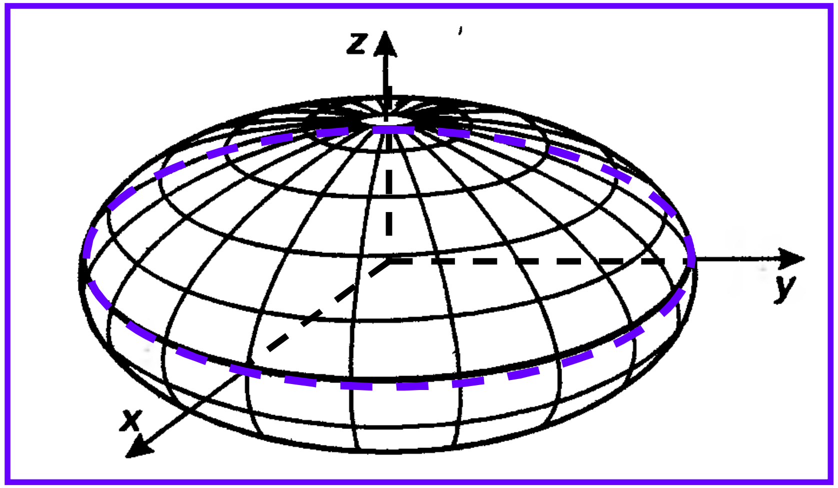
Например в сечении плоскостью $z = 0$ получаем эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

В сечении плоскостью $x = 0$

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

В сечении плоскостью $y = 0$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

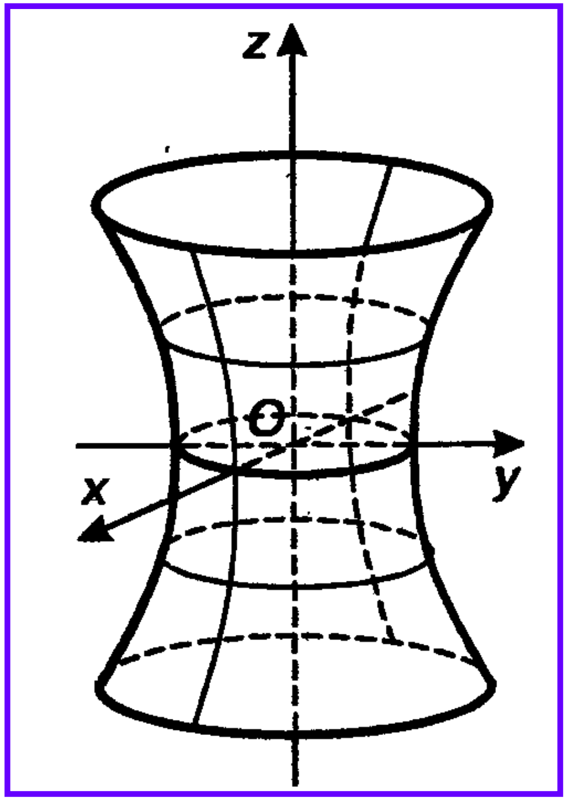


Однополостный гиперболоид

Каноническое уравнение ***однополостного гиперболоида***:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

В сечении однополостного гиперболоида плоскостями параллельными *Oxy* получаем эллипсы, *Oyz* или *Oxz* -гиперболы.



Например в сечении плоскостью $z = 0$ получаем эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

В сечении плоскостью $x = 0$ гипербола

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

В сечении плоскостью $y = 0$ гипербола

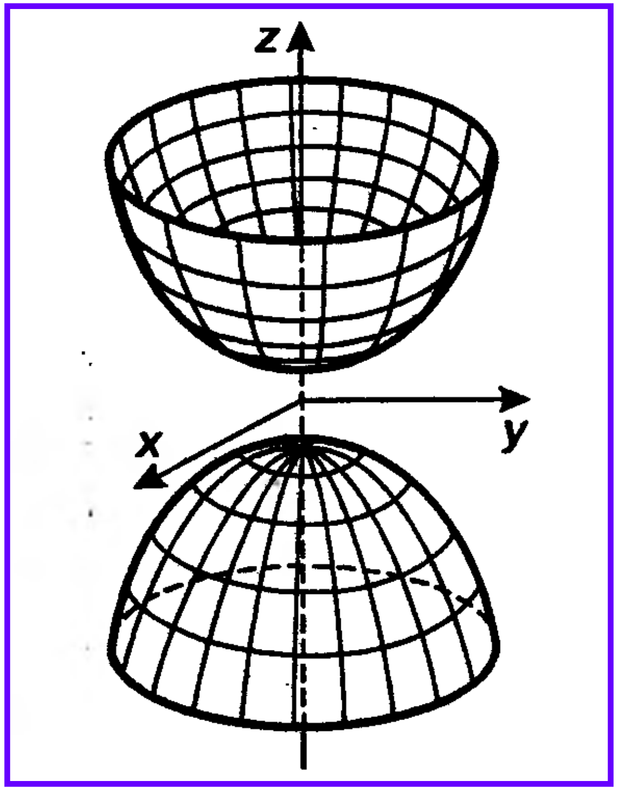
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

Двуполостный гиперболоид

Каноническое уравнение ***двуполостного гиперболоида:***

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$

В сечении двуполостного гиперболоида плоскостями параллельными *Oxy* получаем эллипсы, *Oyz* или *Oxz* - гиперболы.



При сечении плоскостями $z = h$ получим эллипсы:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1 \qquad |h|\geq c$$

В сечении плоскостями $x = 0$ и $y = 0$ - гиперболы.

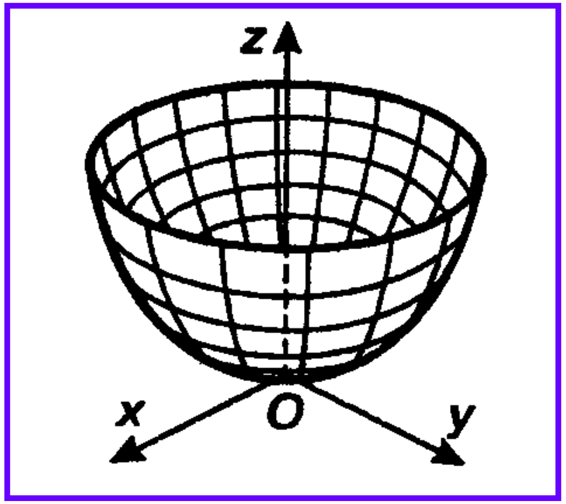
$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$$

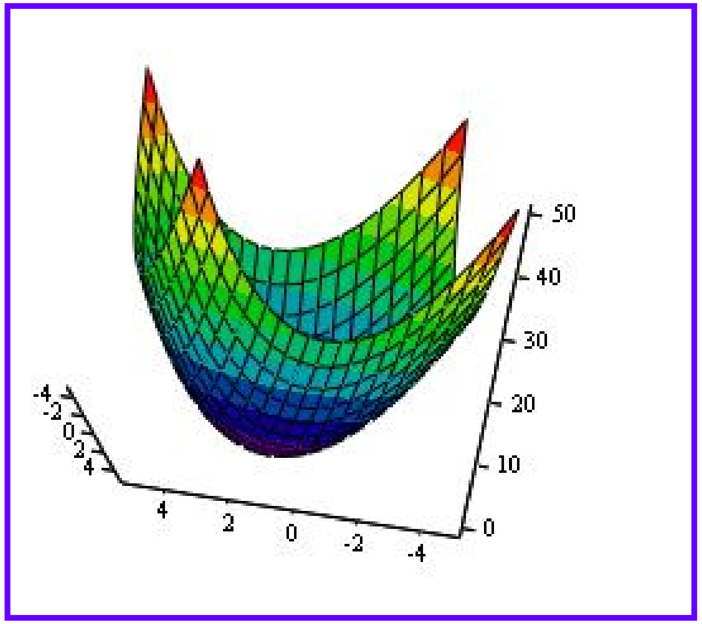
Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение ***эллиптического параболоида***:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$

В сечении эллиптического параболоида плоскостями параллельными Oxy –эллипсы, Oyz или Oxz – параболы.



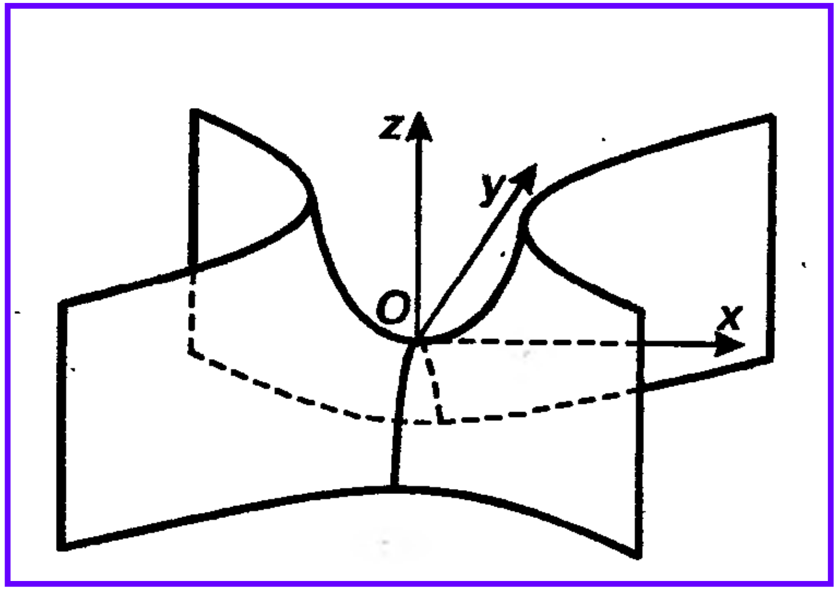


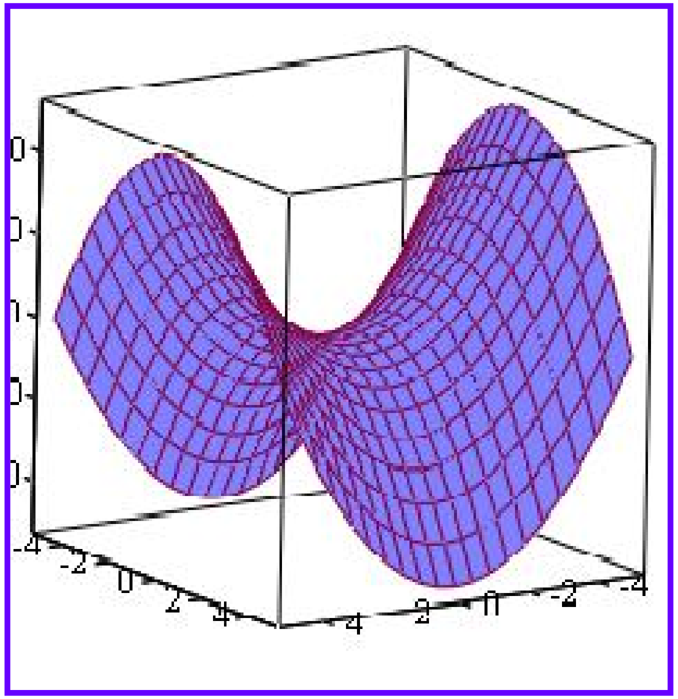
$$z = x^2 + y^2$$

Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение ***гиперболического параболоида***:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q}$$





$$z = x^2 - y^2$$

Примеры функций нескольких переменных из разных дисциплин

1. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} a \cdot h$, где *a* – основание, *h* - высота.(Это функция 2 – х переменных.)
2. Объем прямоугольного параллелепипеда $V = x \cdot y \cdot z$, где *x*, *y*, *z* - длина, ширина и высота соответственно. (Функция от 3 – х переменных.)
3. Сила притяжения двух материальных точек m_1 и m_2, занимающих положения $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$:

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

где γ – гравитационная постоянная.

(Функция от 6 - ти переменных.)

Функция двух переменных

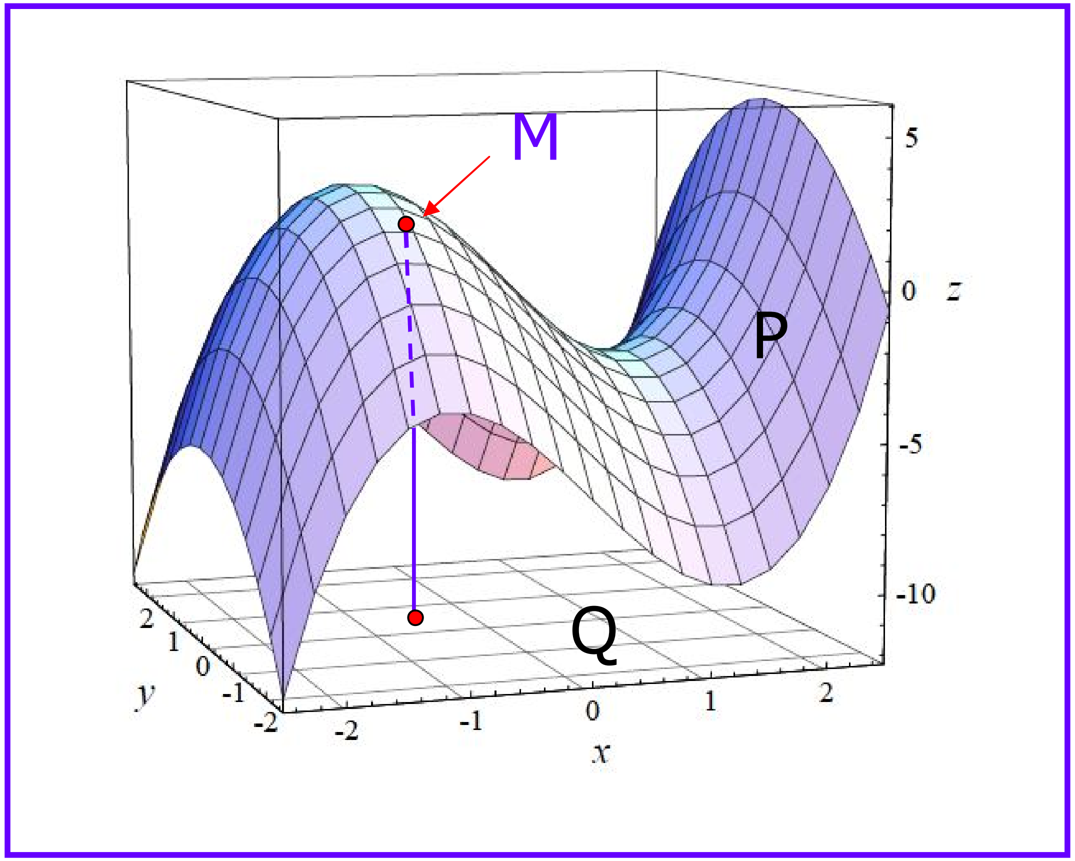
Определение. Рассматриваем множество E пар чисел (x, y). (Имеются в виду упорядоченные пары. То есть 2 пары (x_1, y_1) и (x_2, y_2) считаются равными тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.) Если в силу некоторого закона каждой паре приведено в соответствие число z, то говорят что этим определена на множестве E функция $z = f(x, y)$ от двух переменных x и y.

Так как каждой паре чисел (x, y) соответствует точка координатной плоскости, то можно говорить, что функция $f(x, y)$ задана на множестве E точек плоскости.

Геометрическое изображение функции 2-х переменных

Геометрическим изображением (графиком) функции двух переменных $z = f(x, y)$ является, вообще говоря, поверхность в пространстве $Oxyz$.

То есть каждой паре значений $(x, y) \in Q$ будет соответствовать точка $M(x, y, z(x, y)) \in P$ и функция опишет в пространстве некоторую поверхность P, «нависающую» над областью Q.



Большее число переменных

Для функции 3 – х переменных: Если каждой тройке чисел из E ($(x, y, z) \in E$) в силу некоторого закона поставлено в соответствие число u, то говорят, что этим на E определена функция $u = f(x, y, z)$.

Пример: переменная масса (плотность) тела, температура неравномерно нагретого тела.

Для случая n переменных:

Рассмотрим множество E упорядоченных систем из n чисел ($x_1, x_2, \cdots, x_n$). Если каждой точке в такой системе соответствует число u, то говорят, что u есть функция от n переменных.

$$u = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Приращение функции

Определение. Пусть $z = f(x, y)$ есть функция двух переменных. Дадим переменной x приращение Δx, оставляя y неизменной. Тогда разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется ***частным приращением функции f(x, y) по переменной x.***

Аналогично частное приращение по переменной y –

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если обе переменные получили приращения Δx, Δy то $\Delta f(x, y) = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется ***полным приращением функции f(x, y)*** или просто ***приращением функции.***

Сразу отметим, что полное приращение функции, вообще говоря, не равно сумме частных приращений этой же функции.

$$\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$$

Частные производные первого порядка.

Определение. Пусть дана функция $z = f(x, y)$. Будем предполагать, что функция определена для каждой рассматриваемой точки (x, y) в некоторой окрестности. Рассмотрим отношение частного по x приращения функции $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ к приращению Δx этой переменной.

Если существует предел $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$,

то он называется частной производной функции $f(x, y)$ по переменной x и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$ или $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x, f'_x.

Аналогично определяется частная производная по y:

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Частные производные первого порядка.

Определение. Частной производной функции от нескольких переменных по одной из этих переменных называется предел отношения соответствующего частного приращения функции к приращению рассматриваемой независимой переменной при условии, что последнее стремится к нулю.

Правило дифференцирования функций двух и более переменных: Частная производная функции от нескольких переменных равна производной той функции одной переменной, которая получится, если все независимые переменные данной функции, кроме соответствующей одной, считать постоянными, то есть

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left[f\left(x, y\right)\right] \text{, где } y = const.$$

Все правила дифференцирования функций многих переменных совпадают с правилами дифференцирования функции одной переменной

Примеры

1. $z = x^3 \sin y + y^4$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 \sin y \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 \cos y + 4y^3$$

2. $u = x^6 + y^3 + 3z^5$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^5 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 \qquad \frac{\partial u}{\partial z} = 15z^4$$

3. $z = ln\left(x^3 + 2y\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^3 + 2y} \cdot 3x^2 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x^3 + 2y} \cdot 2$$

Примеры

4. $z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

5. $u = \sqrt{x + y^2 + z^3}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}} \cdot 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x+y^2+z^3}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2+z^3}} \cdot 3z^2 = \frac{3z^2}{2\sqrt{x+y^2+z^3}}$$

Частные производные высших порядков

Рассмотрим функцию $z = 8x^3y^2 + 16xy^2 - 9x$, можно найти ее частные производные по *x* и по *y*.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 24x^2y^2 + 16y^2 - 9 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 16x^3y + 32xy$$

Они также являются функциями от двух переменных *x* и *y*, которые в свою очередь можно дифференцировать по этим переменным.

Обозначение:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} \qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy}$$

Частные производные высших порядков

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = 48xy^2 \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = 48x^2y + 32y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = 48x^2y + 32y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = 16x^3 + 32x$$

Это ***смешанные производные***.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Смешанные производные не зависят от того, в каком порядке производится дифференцирование.

Частные производные высших порядков

Замечание верно для производных любого порядка.

Например: $$\frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = 96xy \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y \partial x} = 96y \qquad \frac{\partial^5 z}{\partial x^2 \partial y \partial x \partial y} = 96$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = 48y^2 \qquad \frac{\partial^4 z}{\partial x^3 \partial y} = 96y \qquad \frac{\partial^5 z}{\partial x^3 \partial y^2} = 96$$

Скалярное и векторное поле

Определение 1. Говорят, что в данной области D определено скалярное поле, если каждой точке $M \in D$ ставится в соответствие некоторое скалярное число (скаляр) $u = f(M)$.

Если для положения точки M в пространстве ввести декартову систему координат, то получим $u = f(x, y, z)$ (или $u = f(x, y)$) то есть функцию трех или двух переменных.

Пример: Распределение температуры в неравномерно нагретом теле, распределение плотностей, концентраций вещества.

Можно сказать, что понятия скалярного поля есть физическая трактовка функции нескольких переменных.

Градиент

Определение 2. Говорят, что в данной области D определено векторное поле, если каждой точке $M \in D$ ставится в соответствие некоторый вектор $\vec{u} = \overrightarrow{f(M)}$, или перейдя к координатам $u_x = F_x(M)$, $u_y = F_y(M)$, $u_z = F_z(M)$.

Пример векторного поля: распределение скоростей в потоке газа или жидкости, распределение сил в деформированном теле.

Определение 3. Пусть $u = f(x, y)$ – плоское скалярное поле, тогда вектор $\overrightarrow{grad u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y} \right\}$ или $\overrightarrow{grad u} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \vec{j}$ называется ***градиентом поля***.

Аналогично для пространственного поля $u = f(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{grad u} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z} \right\}$$

То есть скалярное поле порождает векторное поле – поле градиентов.

Примеры

1. Найдем градиент функции $u = x^3 - 4x - y^2$

$$\overrightarrow{grad\,u} = \left\{3x^2 - 4; -2y\right\}$$

В точке с координатами (0, 0) вектор $\overrightarrow{grad\,u} = \left\{-4; 0\right\}$.

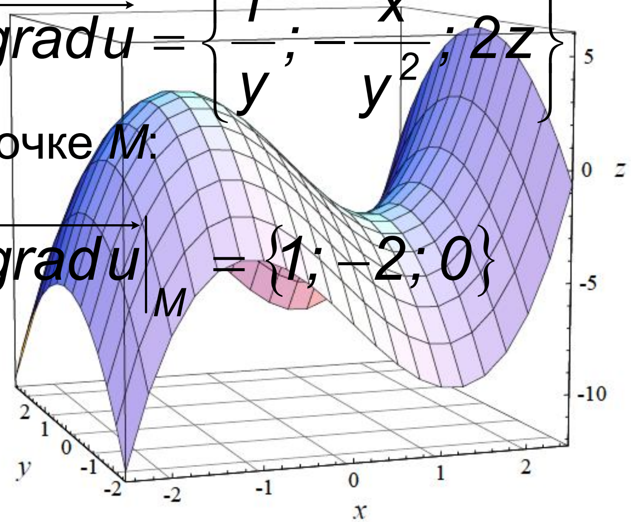
2. Найти градиент поля $u = \dfrac{x}{y} + z^2$

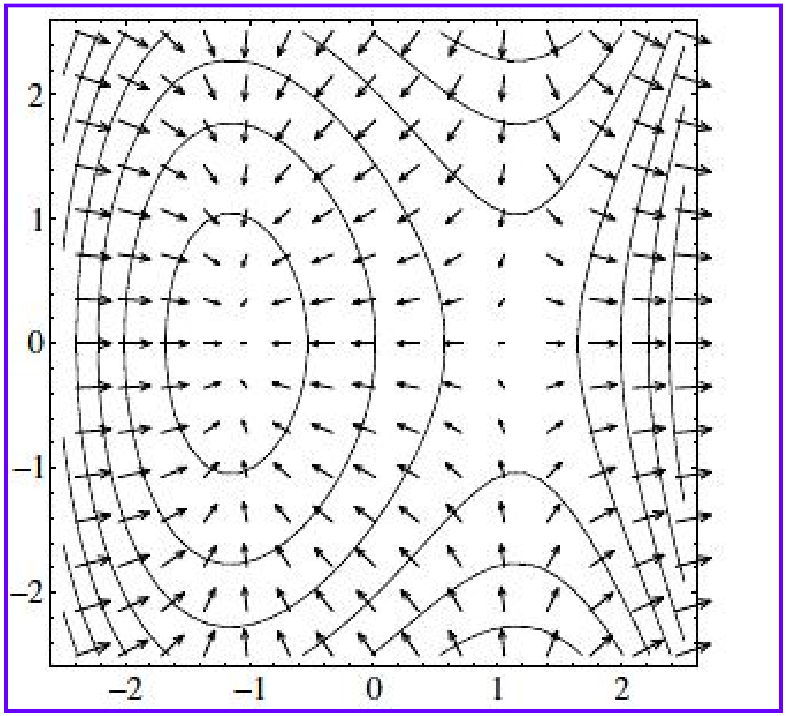
в точке $M(2, 1, 0)$.

$$\overrightarrow{grad\,u} = \left\{\frac{1}{y}; -\frac{x}{y^2}; 2z\right\}$$

В точке M:

$$\left.\overrightarrow{grad\,u}\right|_M = \left\{1; -2; 0\right\}$$

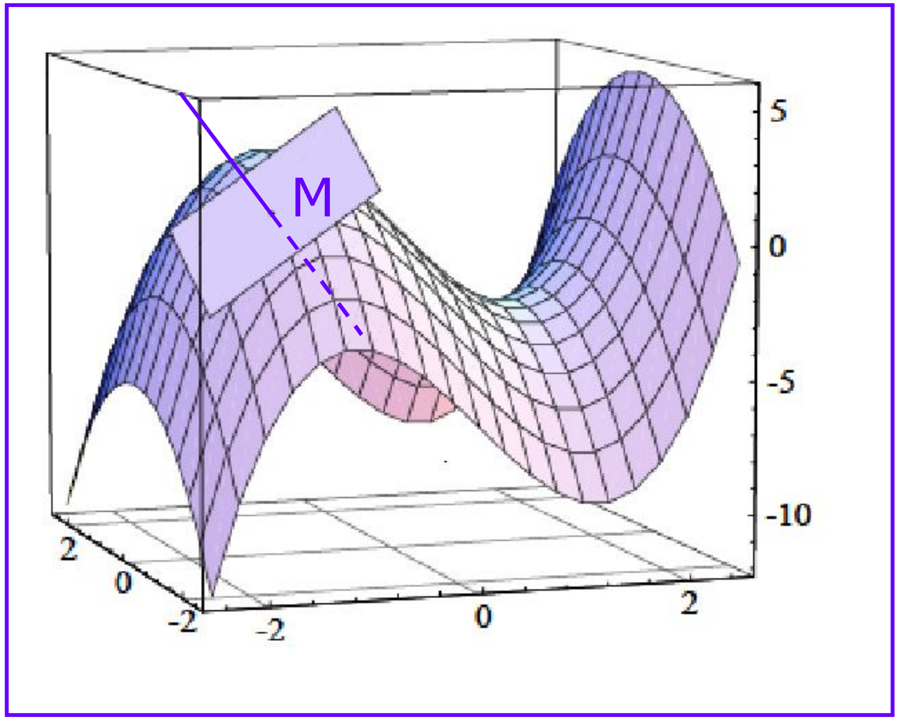




Уравнение касательной плоскости и нормали

Определение. ***Касательной плоскостью*** к поверхности в данной ее точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным в этой точке на данной поверхности через указанную точку.

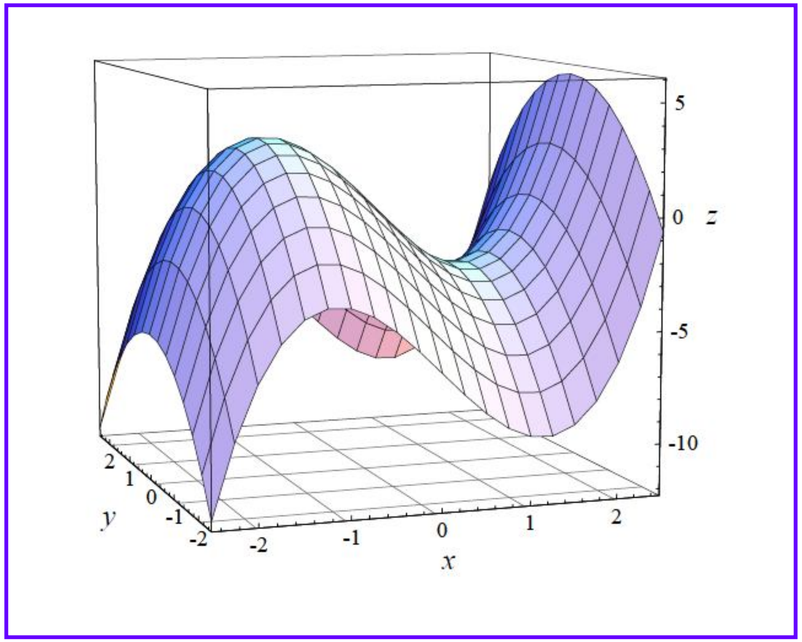
Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

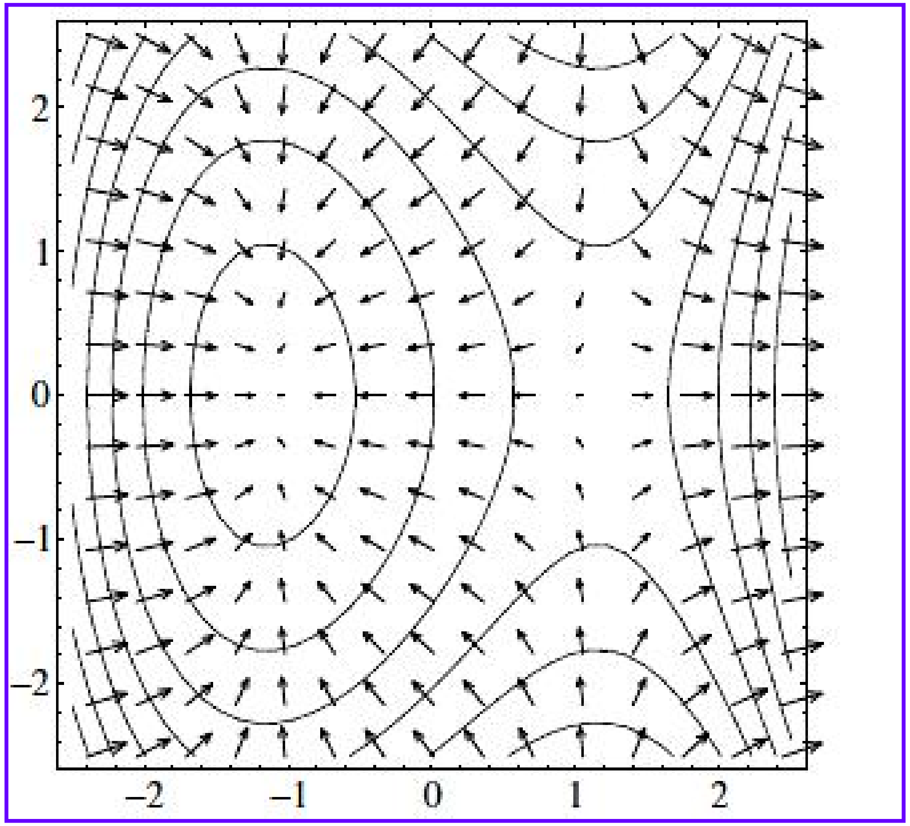


Уравнение касательной плоскости и нормали

Теорема. (Без доказательства). Во всякой точке, где $\left.\overrightarrow{grad\,u}\right|_M \neq 0$ градиент поля направлен по нормали к линии уровня, проходящей через эту точку в сторону возрастания поля.

$$u = x^3 - 4x - y^2$$





Уравнение касательной плоскости и нормали

Пусть поверхность задана уравнением $F(x, y, z) = 0$

Из приведенной теоремы следует, что $\left.\overrightarrow{grad\,u}\right|_{M_0}$ перпендикулярен касательной к любой дифференцируемой кривой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и лежащей на поверхности уровня.

Эти касательные образуют касательную плоскость к поверхности уровня и следовательно в качестве вектора нормали к касательной плоскости можно взять вектор $\left.\overrightarrow{grad\,u}\right|_{M_0}$.

В точке M_0 вектор градиента имеет координаты:

$$\left\{ \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} ; \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} ; \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \right\}$$

для поверхности $F(x, y, z) = 0$ уравнение касательной плоскости можно записать:

$$\boxed{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot (x - x_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot (y - y_0) + \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0} \cdot (z - z_0) = 0}$$

Уравнение касательной плоскости и нормали

Для уравнения нормали к поверхности вектор градиента будет уже направляющим вектором, поэтому :

$$\frac{(x-x_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{(y-y_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{(z-z_0)}{\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}}$$

Если поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$, можно его переписать как $F(x, y, z) = f(x, y) - z$ и тогда вектор нормали (градиента) запишем в виде $\left\{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}; -1\right\}$

соответственно уравнение касательной плоскости

$$(z-z_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} \cdot (x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} \cdot (y-y_0)$$

и нормальной прямой

$$\frac{(x-x_0)}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}} = \frac{(y-y_0)}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}} = \frac{(z-z_0)}{-1}$$

Пример

Записать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = x^2 - y^2 + 3xy - 4x + 2y - 4$ в точке $M_0(-1, 0, 1)$.

Поверхность задана явным уравнением $z = f(x, y)$, поэтому вектор нормали $\left\{ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0}; \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0}; -1 \right\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y - 4 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y + 3x + 2 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{M_0} = -6 \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{M_0} = -1$$

$$\vec{N} = \{-6; -1; -1\} \qquad (z - 1) = -6 \cdot (x + 1) - 1 \cdot (y - 0)$$

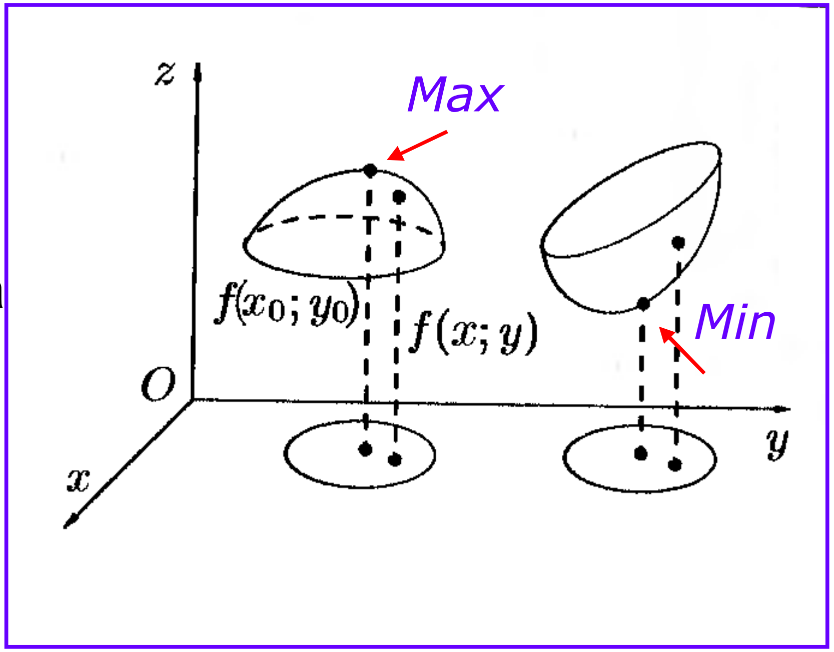
$$\boxed{\begin{gathered} 6x + y + z + 5 = 0 \\ \frac{x+1}{6} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \end{gathered}}$$

Экстремум функции нескольких переменных

Определение. Точка (x_0, y_0) называется ***точкой максимума*** функции $z = f(x, y)$ если существует такая ε – окрестность точки (x_0, y_0), что для каждой точки (x, y) отличной от (x_0, y_0), из этой окрестности выполняется неравенство $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

Аналогично определяется ***точка минимума*** функции: для всех точек (x, y) отличных от (x_0, y_0), из ε – окрестность точки (x_0, y_0) выполняется неравенство $f(x, y) > f(x_0, y_0)$.

Значение функции в точке максимума (минимума) функции называется ***максимумом (минимумом)*** функции. Максимум и минимум функции – ***экстремум функции***.



Экстремум функции нескольких переменных

Теорема (Необходимое условие экстремума). Если в точке $M(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю: $f'_x(x_0, y_0) = 0$, $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Определение. Точка в которой частные производные первого порядка функции $z = f(x, y)$ равны нулю, то есть $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, называется ***стационарной точкой*** функции z.

Стационарные точки и точки, в которых хотя бы одна частная производная не существует, называются ***критическими точками***.

В критических точках функция может иметь экстремум, а может и не иметь. Равенство нулю частных производных является необходимым, но не достаточным условием существования экстремума.

Экстремум функции нескольких переменных

Теорема (достаточное условие экстремума). Пусть в стационарной точке (x_0, y_0) и некоторой ее окрестности функция $f(x, y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно.

Вычислим в точке (x_0, y_0) значения $A = f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B = f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C = f''_{yy}(x_0, y_0)$.

Обозначим $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

Тогда:

1. Если $\Delta > 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет экстремум. Максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$.
2. Если $\Delta < 0$, то функция $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.
3. В случае $\Delta = 0$ экстремум в точке (x_0, y_0) может быть или может не быть. Необходимы дополнительные исследования.

Примеры

1. Найти экстремумы функции $z = x^3 + y^3 - 9xy$

$$z'_x = 3x^2 - 9y \quad z'_y = 3y^2 - 9x$$

Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$$

Проведем исследование стационарных точек.

$$z''_{xx} = 6x \qquad z''_{xy} = -9 \qquad z''_{yy} = 6y$$

В точке (0, 0): A = 0, B = -9, C = 0, Δ = -81 < 0. То есть в точке нет экстремума.

В точке (3, 3): A = 18, B = -9, C = 18, Δ = 324 - 81 = 243 > 0. То есть в точке экстремум. Так как A > 0, то в точке минимум.

2. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 - 4x - y^2$.

$z'_x = 3x^2 - 4 \qquad z'_y = -2y$

Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 4 = 0 \\ -2y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ y = 0 \end{cases}$$

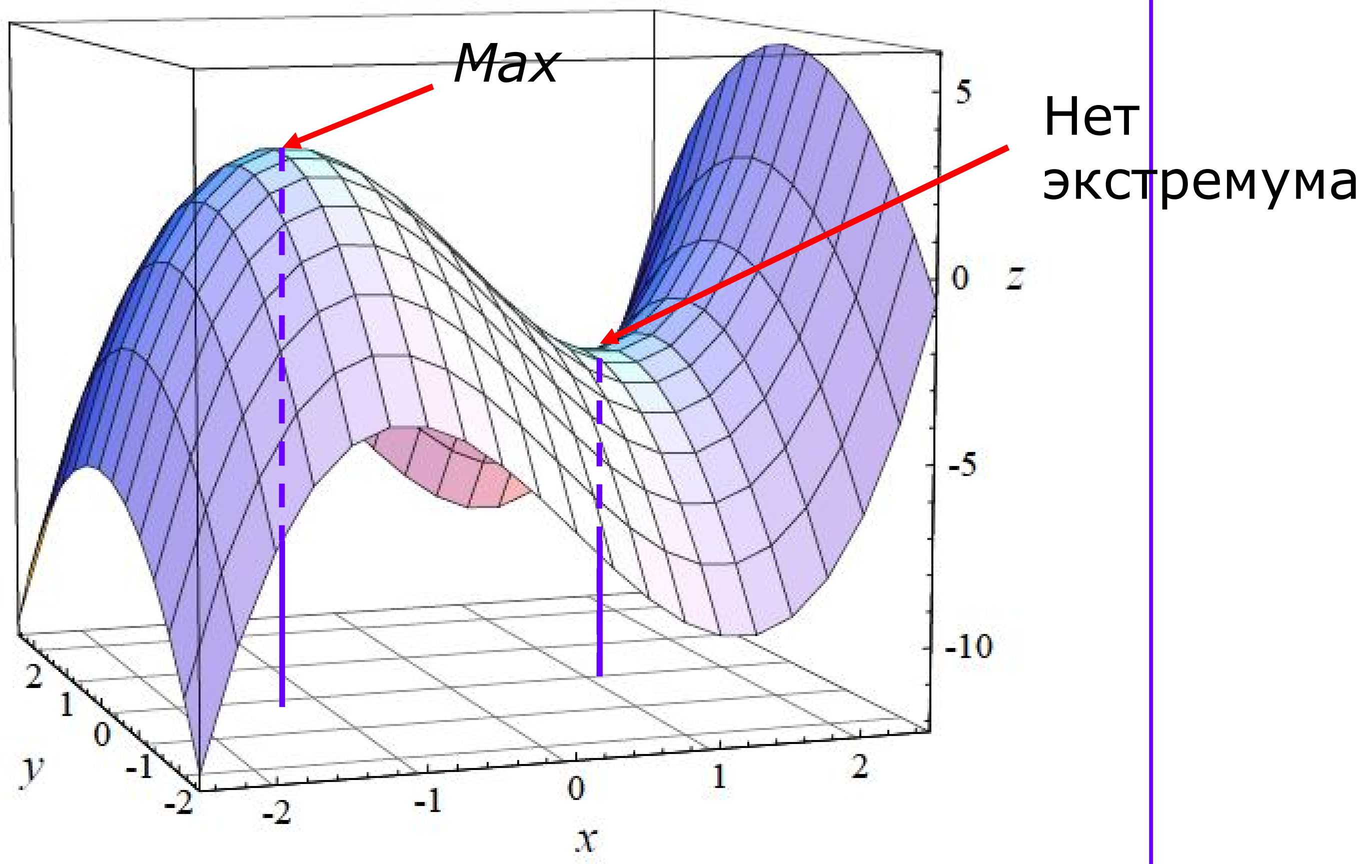
Проведем исследование стационарных точек.

$z''_{xx} = 6x \qquad z''_{xy} = 0 \qquad z''_{yy} = -2$

В точке $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$: $A = \dfrac{12}{\sqrt{3}}$, *B* = 0, *C* =-2, Δ < 0. То есть в точке нет экстремума.

В точке $\left(-\dfrac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$: $A = -\dfrac{12}{\sqrt{3}}$, *B* = 0, *C* = -2, Δ > 0. То есть в точке экстремум. Так как *A* < 0, то в точке максимум.

Примеры



Примеры

3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^4 + y^4$.

$$z'_x = 4x^3 \qquad z'_y = 4y^3$$

Найдем стационарные точки из системы уравнений:

$$\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Проведем исследование стационарной точки.

$$z''_{xx} = 12x^2 \qquad z''_{xy} = 0 \qquad z''_{yy} = 12y^2$$

В стационарной точке: A = 0, B = 0, C = 0, Δ = 0. Нельзя ничего сказать про экстремум в этой точке, необходимы дополнительные исследования.