НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математической логики и высшей алгебры

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

(Пособие для студентов заочного отделения)

Составители: В.Е.Алексеев, В.В.Лозин

1998

Комбинаторика (комбинаторный анализ) – раздел дискретной математики, в котором изучаются объекты, составленные из элементов конечных множеств. Одним из основных видов комбинаторных задач являются перечислительные задачи. В этих задачах речь идет о выборе определенного количества элементов из некоторого множества с соблюдением тех или иных условий и требуется подсчитать число способов, которыми можно осуществить такой выбор.

Напомним некоторые обозначения из теории множеств.

2^A – множество всех подмножеств множества A.

$|A|$ – число элементов (мощность) конечного множества A.

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – прямое (декартово) произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Элементами декартова произведения являются последовательности вида $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$. При $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ получается декартова степень A^n множества A. Если элементы множества A считать буквами алфавита, то элементы декартовой степени можно рассматривать как слова, они в этом случае записываются в виде $x_1 x_2 \ldots x_n$.

Буквой E будем обозначать двухэлементное множество $\{0,1\}$.

Символом □ отмечается конец доказательства.

1. Правила равенства, суммы и произведения

Очень многие комбинаторные задачи решаются применением трех простых правил, названных в заголовке.

Пусть A и B - конечные множества, f - функция, определенная на A со значениями в B. Напомним, что f называется *биекцией* или *взаимно однозначным отображением*, если выполняются условия

1) любые два различных элемента из A отображаются в различные элементы множества B (функция, удовлетворяющая этому условию, называется *инъекцией*);

2) для любого $y \in B$ существует такой $x \in A$, что $f(x) = y$ (такая функция называется *сюръекцией*).

Если существует биекция из A в B, то говорят также, что между A и B имеется взаимно однозначное соответствие.

Правило равенства. Если между конечными множествами A и B есть взаимно однозначное соответствие, то $|A| = |B|$.

Правило суммы. Если A и B – конечные множества и $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Правило произведения. Для любых конечных множеств A и B имеет место равенство $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Первые два правила очевидны, третье следует из того, что при $|B| = b$ каждый элемент множества A образует b пар с различными элементами множества B, поэтому, если $|A| = a$, то всего будет ab пар.

Правила суммы и произведения обобщаются на случай любого числа слагаемых или сомножителей. Для правила суммы обобщение очевидно: мощность объединения любого числа попарно непересекающихся множеств равна сумме их мощностей. Докажем обобщенное правило произведения.

<u>Теорема 1.</u> *Для любых конечных множеств* $A_1, A_2, \ldots, A_k$ *имеет место равенство* $\left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k\right| = \left|A_1\right| \cdot \left|A_2\right| \cdot \ldots \cdot \left|A_k\right|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Мы видели, что при $k = 2$ это справедливо. Для большего числа сомножителей доказываем индукцией по k. Элементами множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ являются наборы вида $\left(x_1, x_2, \ldots, x_k\right)$, где $x_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$. Каждый такой набор можно рассматривать как состоящий из двух частей: $\left(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}\right)$ и $\left(x_k\right)$. Первая часть – элемент множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}$, вторая – элемент множества A_k. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между множеством $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ и прямым произведением двух множеств: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}$ и A_k. По правилу равенства $\left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k\right| = \left|\left(A_1 \times A_2 \times \ldots A_{k-1}\right) \times A_k\right|$, по правилу произведения для двух сомножителей $\left|\left(A_1 \times A_2 \times \ldots A_{k-1}\right) \times A_k\right| = \left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}\right| \cdot \left|A_k\right|$, а по предположению индукции $\left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}\right| = \left|A_1\right| \cdot \left|A_2\right| \cdot \ldots \cdot \left|A_{k-1}\right|$. □

Применяя теорему 1 и правило равенства, докажем формулу для числа подмножеств конечного множества.

<u>Теорема 2.</u> *Для любого конечного множества* A *имеет место равенство* $\left|2^A\right| = 2^{|A|}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $A = \left\{a_1, a_2, \ldots, a_n\right\}$. Каждому подмножеству X множества A поставим в соответствие двоичный набор $\left(h_1, h_2, \ldots, h_n\right)$, где $h_i = 1$, если $a_i \in A$, $h_i = 0$, если $a_i \notin A$. Этот набор называют *характеристическим вектором* множества X. Очевидно, что по характеристическому вектору множество X можно определить однозначно. Следовательно, имеет место взаимно однозначное соответствие между 2^A и E^n. Из правила равенства и теоремы 1 следует, что $\left|2^A\right| = |E|^n = 2^n$. □

В теореме 1 речь идет о числе способов выбрать упорядоченный набор $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$, где каждый элемент x_i выбирается из множества A_i независимо от всех остальных элементов. Иногда множество, из которого выбирается x_i, зависит от того, какие элементы были выбраны в качестве $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$, но число элементов в этом множестве, т.е. число вариантов для выбора x_i, остается постоянным. В этом случае правило произведения также применимо, но в более общей формулировке.

Общее правило произведения. Пусть упорядоченный набор $\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ формируется в результате последовательного выбора элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем для любого $i = 1, \ldots, n$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}$ элемент x_i можно выбрать k_i способами. Тогда весь набор может быть выбран $k_1 k_2 \ldots k_n$ способами.

Задачи

1. Имеется n_1 разных книг одного автора, n_2 – второго и n_3 – третьего. Каким числом способов можно выбрать

а) одну книгу?

б) две книги разных авторов?

в) три книги разных авторов?

2. Каким числом способов можно заполнить анкету, содержащую n вопросов, если на каждый вопрос можно ответить

а) “да” или “нет”?

б) “да”, “нет”, “не знаю”?

3. Сколько слов длины n можно составить, если в алфавите q букв? Сколько среди них палиндромов (слов, читающихся одинаково слева направо и справа налево)?

4. Сколько матриц с m строками и n столбцами можно составить из элементов 0 и 1 ?

5. Сколько слов длины n в q–буквенном алфавите, в которых любые две соседние буквы различны?

6. Каким числом способов можно на обычной шахматной доске разместить белую и черную ладьи так, чтобы они не атаковали друг друга?

7. Сколько бинарных отношений можно определить на множестве из n элементов? Сколько среди них

а) рефлексивных?

б) симметричных?

в) антисимметричных?

2. Перестановки и сочетания

В простейших комбинаторных задачах требуется подсчитать число способов выбрать k элементов из n–элементного множества. То, что получается в результате выбора, называется *выборкой из* n *по* k или (n,k)–выборкой.

Понятие выборки отличается от понятия подмножества. Первое отличие состоит в том, что в выборках может допускаться повторение элементов. Это означает, что в выборку может входить несколько экземпляров одного и того же элемента. В этом случае говорят, что рассматриваются выборки с повторениями. Другое отличие – выборки могут быть упорядоченными или неупорядоченными. Упорядоченность означает, что выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, считаются различными. Если же такие выборки считаются одинаковыми, то говорят, что рассматриваются неупорядоченные выборки. Упорядоченные выборки называют *перестановками* (или *размещениями*), неупорядоченные – *сочетаниями*. Таким образом, имеется четыре основных типа выборок:

перестановки (без повторений), перестановки с повторениями, сочетания (без повторений) и сочетания с повторениями.

Подсчитаем число выборок каждого типа. Множеством, из которого делается выбор, будем считать множество чисел $I_n = \{1,2,\ldots,n\}$.

Перестановки с повторениями. Перестановки с повторениями из n по k – это последовательности длины k, состоящие из элементов множества I_n, то есть попросту элементы множества I_n^k. Из теоремы 1 поэтому следует

<u>Теорема 3.</u> *Число* (n,k)*– перестановок с повторениями равно* n^k.

Перестановки. Обозначим число перестановок из n по k через $P_{n,k}$.

<u>Теорема 4.</u> $P_{n,k} = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве первого элемента перестановки может быть выбран любой из n элементов множества I_n. Поскольку повторения недопустимы, второй элемент можно выбрать $n-1$ способами, третий $n-2$ способами и т.д. Применяя обобщенное правило произведения, получаем

$$P_{n,k} = n(n-1)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \qquad \square$$

В частности, при $k = n$ получается формула для числа перестановок всех n элементов:

$$P_{n,n} = n!$$

Сочетания. Сочетания из n по k, то есть неупорядоченные выборки без повторений, это просто k–элементные подмножества n–элементного множества. Число (n,k)–сочетаний обозначается через C_n^k или $\binom{n}{k}$.

<u>Теорема 5.</u> $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выписывая элементы (n,k)–сочетания в некотором порядке, получаем (n,k)–перестановку. Поскольку k элементов можно упорядочить $k!$ способами , то из каждого сочетания можно образовать $k!$ различных перестановок. Из всех $\binom{n}{k}$ сочетаний таким образом получится $k!\binom{n}{k}$ перестановок. Ясно, что каждая перестановка будет при этом получена точно один раз. Следовательно, $P_{n,k} = k!\binom{n}{k}$. Применяя формулу для числа перестановок, получаем утверждение теоремы. $\square$

В качестве простейшего примера применения формулы для числа сочетаний рассмотрим следующую задачу.

<u>Задача 1.</u> Определить число слов длины n в алфавите E, содержащих в точности k единиц.

Р е ш е н и е . Так как сочетания являются подмножествами, то их можно задавать с помощью характеристических векторов, как описано в доказательстве теоремы 2. Характеристический вектор, соответствующий (n,k)–сочетанию, имеет n компонент, среди которых ровно k единиц. Этот вектор можно рассматривать также как слово в алфавите E. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между (n,k)–сочетаниями и словами длины n в алфавите E. Отсюда следует, что число таких слов равно $\binom{n}{k}$.

Сочетания с повторениями.

<u>Теорема 6.</u> *Число (n,k)–сочетаний с повторениями равно* $\binom{n+k-1}{k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Для того, чтобы задать сочетание с повторениями из n по k, достаточно указать для каждого числа от 1 до n, сколько раз оно встречается в данном сочетании. Пусть k_i – количество вхождений числа i в сочетание, $i = 1,2,...,n$. Так как общее число элементов в сочетании равно k, то $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$. Поставим в соответствие данному сочетанию слово в алфавите E следующим образом. В начале слова поставим k_1 нулей, после них единицу, за ней k_2 нулей, после них вторую единицу, и т.д. Все слово будет состоять из n групп нулей, разделенных единицами, причем в i–той группе (считая слева) число нулей равно k_i. Заметим, что после последней группы единица не ставится, т.е. слово оканчивается k_n нулями. Всего, таким образом, будет k нулей и $n-1$ единица, а длина слова равна $n+k-1$. Обратно, если взять любое слово, то по нему можно построить (n,k)–сочетание с повторениями: нули разбиваются единицами на n групп и число i необходимо включить в сочетание столько раз, сколько нулей в i–той группе. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между (n,k)–сочетаниями с повторениями и словами длины $n+k-1$ в алфавите E, содержащими ровно k нулей. Число таких слов, как было показано выше, равно $\binom{n+k-1}{k}$. □

Задачи

1. Сколько имеется вариантов выбора трех призеров среди n участников конкурса

а) с указанием занимаемых ими мест?

б) без указания мест?

2. Сколько отношений линейного порядка можно определить на множестве из n элементов?

3. Сколькими способами можно расставить 8 ладей на обычной шахматной доске размером так, чтобы они не угрожали друг другу, т.е. чтобы никакие две из них не стояли на одной вертикали или горизонтали?

4. Сколько имеется перестановок из элементов 1,2,...,n, в которых

а) 1 стоит раньше 2?

б) 1 и 2 не стоят рядом?

в) между 1 и 2 расположены k других элементов?

5. На плоскости расположены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

6. Каким числом способов можно разделить 10 юношей на две баскетбольные команды по 5 человек в каждой?

7. Каким числом способов можно расположить n нулей и k единиц в последовательность так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

8. Каким числом способов можно составить букет из n цветов трех видов, если все цветы одного вида одинаковы и имеется неограниченный запас цветов каждого вида?

9. Определите число целых а) положительных; б) неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$.

3. Бином Ньютона и свойства биномиальных коэффициентов

Числа $\binom{n}{k}$ обладают многими замечательными свойствами, из которых особенно важным является то, что они входят в качестве коэффициентов в разложение выражения $(x+y)^n$ по степеням x и y. Это разложение называется *биномом Ньютона*, а коэффициенты – *биномиальными коэффициентами*.

Теорема 7 (Бином Ньютона). $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем левую часть бинома в виде произведения n одинаковых сомножителей: $(x+y)(x+y)\ldots(x+y)$. После раскрытия скобок (до приведения подобных членов) получаем сумму, в которой каждое слагаемое является произведением n переменных, по одной из каждого сомножителя. Запишем каждое такое слагаемое в виде слова, в котором i-тую позицию занимает переменная, выбираемая из i-того сомножителя, например, *xxyyyx* вместо x^3y^3. Нетрудно видеть, что в такой записи множество всех слагаемых, получаемых после раскрытия скобок, образует множество всех слов длины n в алфавите $\{x,y\}$. В этом множестве количество слов, содержащих в точности k символов x, равно $\binom{n}{k}$ (см. задачу 1). Таким образом, группируя в каждом слагаемом одинаковые сомножители в виде степени и приводя подобные, получаем правую часть бинома. □

Рассмотрим некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

1°. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

2°. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

3°. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

4°. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

Свойства 1°–4° можно доказать непосредственной проверкой, используя выражение биномиальных коэффициентов через факториалы. Особенно важным из них является последнее. Оно позволяет с помощью одних только операций сложения найти все числа сочетаний из n элементов, если известны числа сочетаний из $n-1$ элемента. Это лежит в основе построения таблицы биномиальных коэффициентов, называемой *треугольником Паскаля*. В треугольнике Паскаля биномиальные коэффициенты располагаются следующим образом:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0} & & & \\
 & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & \\
 & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\quad = \quad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & & 2 & & 1 & \\
1 & & 3 & & 3 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
$$

В этой бесконечной таблице строка с номером n (n = 0,1,2,...) образована числами $\binom{n}{k}$, k пробегает все значения от 0 до n. При этом каждая следующая строчка сдвинута относительно предыдущей таким образом, что непосредственно над числом $\binom{n}{k}$ левее и правее его оказываются расположены числа $\binom{n-1}{k-1}$ и $\binom{n-1}{k}$, сумма которых, по свойству 4°, как раз и равна $\binom{n}{k}$. Таким образом, если строка с номером $n-1$ заполнена, то легко заполняется строка с номером n: первый и последний элементы всегда равны 1, а каждый из остальных получается сложением двух расположенных над ним элементов предыдущей строки.

Некоторые свойства биномиальных коэффициентов легко выводятся из бинома Ньютона. Приведем два из них.

5°. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. Это получается из формулы бинома, если положить $x = y = 1$.

6°. $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$. Это получается при $x = -1,\ y = 1$.

Задачи

1. Докажите тождества:

1) $\sum\limits_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$ (совет: воспользуйтесь свойством 4°);

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n 2^{n-1}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} k(-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

2. Докажите, что число слов длины n в алфавите E, имеющих четное число единиц, равно 2^{n-1}.

4. Разбиения и полиномиальная теорема

Разбиением множества A на k частей называется семейство его подмножеств, такое, что

1) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;

2) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = A$.

Если порядок частей существенен (т.е. разбиения, отличающиеся одно от другого только перестановкой частей, считаются различными), то говорят, что рассматриваются упорядоченные разбиения.

Теорема 8. *Число упорядоченных разбиений множества мощности n на k частей мощностей $n_1, n_2, \ldots, n_k$ $(n_1 + n_2 + \ldots n_k = n)$ равно* $\dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$.

Доказательство. Первую часть разбиения можно выбрать $\binom{n}{n_1}$ способами. После этого в остается $n - n_1$ элементов и из них вторую часть можно выбрать $\binom{n-n_1}{n_2}$ способами и т. д. По обобщенному правилу произведения, общее число разбиений равно $\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n-n_1-\ldots-n_{k-1}}{n_k}$. Используя формулу для числа сочетаний, приходим, после сокращений, к окончательному ответу $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$. □

Величина $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$ обозначается через $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$ и называется *полиномиальным коэффициентом*.

<u>Задача 2.</u> Найти число слов в алфавите $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$, в которых буква a_i встречается n_i раз, $i=1,2,\ldots,k$, $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$.

Р е ш е н и е. Занумеруем позиции букв в слове слева направо числами от 1 до n. Пусть P_i – множество номеров всех тех позиций, в которых находится буква a_i, $i=1,2,\ldots,k$. Семейство множеств $P_1,P_2,\ldots,P_k$ является упорядоченным разбиением множества I_n и однозначно определяет слово. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между словами, число которых требуется подсчитать, и разбиениями, о которых говорится в теореме 8. Поэтому искомое число равно $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}$.

<u>Теорема9.</u> $(x_1+x_2+\ldots+x_k)^n = \sum\limits_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n}\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем левую часть в виде произведения n сомножителей: $(x_1+x_2+\ldots x_k)(x_1+x_2+\ldots+x_k)\ldots(x_1+x_2+\ldots x_k)$. Раскроем скобки, не группируя одинаковые сомножители в виде степени и не приводя подобные. Очевидно множество слагаемых, полученных таким образом в результате раскрытия скобок, образует множество всех слов длины n в алфавите $\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$. После группировки одинаковых сомножителей слагаемые этой суммы примут вид $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$, где $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$, причем такое слагаемое встретится столько раз, сколько имеется слов, в которых буква x_1 встречается n_1 раз, буква x_2 – n_2 раз, . . . , буква x_k – n_k раз. Применяя решение задачи 2, видим, что после приведения подобных коэффициент при $x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k}$ будет равен $\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_k}$. □

Задачи

1. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове “математика”?

2. Каким числом способов можно разбить 14 человек на 7 пар?

3. Каким числом способов можно разместить 7 студентов в трех комнатах общежития – одно-, двух- и четырехместной?

4. Код замка состоит из пяти десятичных цифр. Известно, что среди них один раз встречается цифра 0 и дважды – цифра 3. Сколько комбинаций нужно перебрать, чтобы наверняка открыть замок?

5. Чему равен коэффициент при $x^4 y^8$ в разложении $(1 + x + y)^{20}$?

5. Метод включений и исключений

По правилу суммы, мощность объединения двух не пересекающихся множеств равна сумме их мощностей. В общем же случае, когда множества A и B могут пересекаться, в сумме $|A| + |B|$ некоторые элементы из множества $A \bigcup B$ сосчитаны дважды. Это те элементы, которые принадлежат пересечению $A \bigcap B$. Следовательно, мощность объединения двух конечных множеств можно найти по формуле:

$$|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|.$$

Использованный здесь прием подсчета можно применить и для определения количества элементов в объединении любого числа множеств. Его называют методом включений и исключений. Докажем формулу включений и исключений в общем случае.

<u>Теорема 10.</u> *Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \dots, A_n$ имеет место равенство*

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n-1} S_n, \qquad (1)$$

где $S_k = \sum_{\langle i_1, i_2, \ldots, i_k \rangle \subseteq \{1,2,\ldots n\}} \left| A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k} \right|.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ и определим вклад, который он вносит в правую часть формулы (1). Допустим, что x входит точно в m из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Так как S_1 – это сумма мощностей этих множеств, то элемент x в S_1 сосчитан m раз. Далее, S_2 – сумма мощностей попарных пересечений множеств A_i. Значит, x будет в этой сумме сосчитан столько раз, сколько существует пар множеств A_{i_1}, A_{i_2}, таких, что $x \in A_{i_1} \cap A_{i_2}$. Но x принадлежит точно m множествам, значит, таких пар будет $\binom{m}{2}$. Рассуждая и дальше в том же духе, приходим к выводу, что для любого $k \le m$ элемент x в сумме S_k учтен $\binom{m}{k}$ раз. Значит, общий вклад элемента x в правую часть формулы (1) равен $\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}$. Из свойства 6° биномиальных коэффициентов следует, что эта сумма равна $\binom{m}{0} = 1$. Значит, каждый элемент сосчитан точно один раз и правая часть (1) равна числу элементов, т.е. мощности объединения множеств A_i. □

В качестве примера применения метода включения и исключения рассмотрим задачу о беспорядках: сколько существует перестановок $a_1, a_2, \ldots, a_n$ чисел $1,2,\ldots,n$ таких, что $a_i \ne i$ при любом $i = 1,2,\ldots,n$? Число искомых перестановок *D* является разностью между числом всех перестановок и числом перестановок, у которых хотя бы один символ стоит на своем месте. Обозначим множество перестановок, для которых $a_i = i$ через A_i, тогда $D = n! - \left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right|$. Мощность объединения множеств находим по формуле включения и исключения. Пересечение любых *k* множеств $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ содержит все такие перестановки, у которых числа $i_1, \ldots, i_k$ стоят на своих местах. Поскольку остальные *n-k* чисел располагаются на оставшихся местах произвольно, число таких перестановок равно (*n-k*)!. Поэтому каждое слагаемое в сумме S_k равно $(n-k)!$. Число слагаемых равно числу способов выбрать *k* чисел из *n*, т.е. $\binom{n}{k}$. Следовательно,

$$D = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} (n-k)!.$$

Задачи

1. На одной из кафедр университета работают тринадцать человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро - немецкий, шестеро - французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо - английский и французский, трое - немецкий и французский.

Сколько человек знают все три языка?

Сколько человек знают ровно два языка?

Сколько человек знают только английский язык?

2. В музыкальном ансамбле используется четыре инструмента, Для каждого инструмента в ансамбле имеется четыре человека, владеющих данным инструментом, для любых двух инструментов - три человека, играющих на них, для любых трех - два человека. Один человек владеет всеми четырьмя инструментами. Сколько человек в ансамбле?

6. Задачи для самостоятельной работы

1. Имеется n_1 разных книг одного автора, n_2 – второго и n_3 – третьего. Каким числом способов можно выбрать

а) две книги одного автора?

б) три книги одного автора?

в) одну книгу первого автора, две – второго и три – третьего?

2. Каким числом способов можно на шахматной доске поместить черного и белого королей так, чтобы они не атаковали друг друга?

3. На одной из двух параллельных прямых зафиксировано n точек, а на другой – m точек. Сколько имеется

а) треугольников;

б) четырехугольников

с вершинами в данных точках?

4. Каким числом способов из 10 человек можно выбрать три комиссии, если в первой и во второй должно быть по 3 человека, а в третьей – 5 человек, и ни один из членов первой комиссии не должен входить во вторую и третью?

5. Траекторией назовем ломаную линию на плоскости, состоящую из отрезков, параллельных координатным осям, причем длины отрезков – целые числа, а при движении вдоль ломаной от начальной точки каждый вертикальный отрезок проходится снизу вверх, а горизонтальный – слева направо. Найдите число траекторий, начинающихся в точке (0,0), а оканчивающихся

а) в точке (m,n);

б) на прямой $x + y = n$.

6. Сколько диагоналей у выпуклого n-угольника? Найдите число точек пересечения этих диагоналей (не считая вершин), если известно, что в каждой из этих точек пересекаются только две диагонали?

7. Имеется колода из $4n$ карт четырех мастей, по n карт каждой масти, занумерованных числами 1,2,...,n. Каким числом способов можно выбрать пять карт так, чтобы среди них оказались :

а) пять карт одной масти с последовательными номерами;
б) четыре карты с одинаковыми номерами;
в) три карты с одним номером и две с другим;
г) пять карт одной масти;
д) пять карт с последовательными номерами;
е) три карты с одинаковыми номерами;
ж) две карты с одинаковыми, остальные с разными номерами.

8. Сколько имеется шестизначных десятичных чисел, у которых

а) есть одинаковые цифры?
б) цифры идут в возрастающем порядке?
в) ровно три цифры четные?
г) не менее двух четных цифр?
д) все цифры различны, причем первая – не 9, а последняя – не 0?
е) сумма цифр четна ?

9. Сколько существует отображений множества A в множество B, если $|A|=n$, $|B|=m$? Сколько среди них инъективных? Биективных?

10 Дано множество U из n элементов и в нем подмножество A из k элементов. Определите число подмножеств $B \subseteq U$, удовлетворяющих условию

а) $B \subset A$;
б) $B \supset A$;
в) $A \cap B = \varnothing$;
г) $A \cap B \neq \varnothing$;
д) $|A \cap B| = 1$;
е) $|A \cap B| \geq 2$;
ж) $|A \cap B| = 2$;
з) $|B - A| = 2$;
и) $|A \otimes B| = 1$.

11. В множестве U из n элементов, найдите число пар подмножеств (A,B) удовлетворяющих условиям:

а) $B \subset A$;
б) $A \cap B = \varnothing$;
в) $|A \cap B| = k$;
г) $|A \cup B| = m$, $|A \cap B| = k$;
д) $|A \otimes B| = 1$;
е) $|A \otimes B| = 1$, $\lfloor A \rfloor \geq 2$, $|B| \geq 2$.

12. Определите число матриц с m строками и n столбцами, составленных из элементов 0 и 1, у которых строки попарно различны.

13. Каким числом способов можно разложить p черных и q белых шаров по k различным ящикам?

14. Каким числом способов можно разместить n различных предметов по k различным ящикам? Сколько таких размещений, при которых в каждый ящик укладывается не более одного предмета?

15. Каким числом способов можно распределить n одинаковых монет между k лицами? Сколько таких способов, при которых каждый получает не менее одной монеты?

16. Каким числом способов можно kn различных предметов разложить по n одинаковым (неразличимым) ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось ровно k предметов?

17 Каким числом способов 7 человек могут разместиться в трех автомобилях, если в первом из них имеется 2 свободных места, во втором – 3, а в третьем – 4?

18. В следующих заданиях рассматриваются слова в алфавите $\left\{a_1, a_2, \ldots, a_q\right\}$. Через n_i обозначается число вхождений буквы a_i в слово. Требуется подсчитать число слов длины n, удовлетворяющих данным условиям.

Вариант	q	n	Условие
1)	3	9	$n_1 \geq 6$
2)	4	7	$n_1 = 2n_2$
3)	4	7	$n_1 + n_2 < n_3 + n_4$
4)	5	8	$n_1 = n_2 + n_3 + n_4$
5)	3	9	$n_1 = 2$, $n_2 < n_3$
6)	5	7	$n_1 + n_2 = 3$, $n_3 \geq 2$
7)	3	7	$n_1 = n_2$
8)	3	10	$n_1 = n_2 + n_3$, n_2 - четное
9)	3	7	$n_1 + n_2 < n_3$
10)	4	6	$n_1 + n_2 = n_3$
11)	4	5	$n_1 < n_2$
12)	3	8	$n_1 + n_2 \geq 6$
13)	3	8	$2 < n_1 < 6$
14)	3	6	$n_1 \leq n_2 \leq n_3$
15)	4	7	$n_1 \leq 2$, $n_2 + n_3 = 4$
16)	5	8	$n_1 = 4$, $n_2 \leq 3$
17)	4	6	$n_1 \geq n_2 + n_3 + n_4$
18)	4	8	$n_1 + n_2 = 3$, $n_3 \geq 2$
19)	4	9	$n_1 > n_2 > 2$
20)	5	6	$n_1 = n_2$
21)	5	6	$n_1 + n_2 = n_3 + n_4$
22)	4	8	$n_1 = 2$, $n_2 \geq 3$
23)	5	7	$n_1 \leq 2$, $n_2 + n_3 + n_4 = 3$
24)	4	8	$n_1 + n_2 \leq 4$, $n_3 = 1$
25)	5	7	$n_1 = n_2 = n_3$

19. В группе N студентов, из них N_1 человек владеют языком программирования СИ, N_2 – Паскалем, N_3 – Бейсиком, N_{12} студентов программируют на СИ и Паскале, N_{13} – на СИ и Бейсике, N_{23} – на Паскале и Бейсике, N_{123} человек знают все три языка и N_0 не знают ни одного из них. По данным значениям найти недостающую информацию (заполнить пустую клетку):

Вариант	N	N_1	N_2	N_3	N_{12}	N_{13}	N_{23}	N_{123}	N_0
1)	15	6	4	5	3	2	2	1	
2)	18		3	7	1	4	1	0	6
3)		7	5	6	4	4	3	2	11
4)	17	4	2		2	3	1	1	7
5)	22	5	3	5	2	2	3	2	
6)	16	4	3	6	3	2	3		11
7)	21	3	3		1	2	2	1	9
8)	19	6		7	2	3	3	1	9
9)		5	3	5	2	4	2	1	8
10)	18	9	4	7	3		2	2	6
11)	24	10	6	12	4	5	4		6
12)	20	8	5	6	3	3		2	7
13)	14		4	7	2	3	2	1	5
14)	15	4	5	3	3	2	2	0	
15)		6	3	8	5	2	3	2	9
16)	21	10	8		3	3	3	1	3
17)		9	9	9	4	4	3	1	4
18)	21	8		10	3	3	4	0	4
19)	17	7	8	6	3	3		2	3
20)		8	9	9	4	3	4	2	4
21)	19	11	10	9	5		5	3	1
22)	15	8	6		3	2	3	1	1
23)	25	8		13	5	4	7	3	5
24)	21	8	5	10	1	3	2		4
25)	23	11	11	12	5	5	4	2	