В.И.Арнольд

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Отличается от имеющихся учебных руководств по обыкновенным дифференциальным уравнениям большей, чем это обычно принято, связью с приложениями, в особенности с механикой, и более геометрическим, бескоординатным изложением. В соответствии с этим в книге мало выкладок, но много понятий, необычных для курса дифференциальных уравнений (фазовые потоки, однопараметрические группы, диффеоморфизмы, касательные пространства и расслоения) и примеров из механики (например, исследование фазовых портретов консервативных систем с одной степенью свободы, теория малых колебаний, параметрический резонанс).

Для третьего издания книга значительно переработана и дополнена. Для студентов и аспирантов механико-математических факультетов университетов и вузов с расширенной программой по математике, но будет интересна и специалистам в области математики и ее приложении.

Оглавление

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# Предисловие к третьему изданию

Первые две главы книги сильно переработаны и значительно расширены. Добавлены разделы об элементарных методах интегрирования (о линейных однородных и неоднородных уравнениях первого порядка, об однородных и квазиоднородных уравнениях), о линейных и квазилинейных уравнениях с частными производными первого порядка, об уравнениях, неразрешенных относительно производных, и о теоремах Штурма о нулях линейных уравнений второго порядка. Таким образом, в новое издание книги включены все вопросы действующей программы по теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Излагая специальные приемы интегрирования, автор старался всюду выявлять геометрическую сущность разбираемых методов и показывать, как эти методы работают в приложениях, особенно в механике. Так, для решения линейного неоднородного уравнения вводится $\delta$-функция и вычисляется запаздывающая функция Грина, квазиоднородные уравнения приводят к теории подобия и закону всемирного тяготения, а теорема о дифференцируемости решения по начальным условиям — к исследованию относительного движения космических тел на близких орбитах.

Автор позволил себе включить в это предисловие несколько исторических отступлений. Дифференциальные уравнения изобретены Ньютоном (1642—1727). Ньютон считал это свое изобретение настолько важным, что зашифровал его в виде анаграммы, смысл которой в современных терминах можно вольно передать так: «законы природы выражаются дифференциальными уравнениями».

Основным аналитическим достижением Ньютона было разложение всевозможных функций в степенные ряды (смысл второй, длинной анаграммы Ньютона в том, что для решения любого уравнения нужно подставить в уравнение ряд и приравнять члены одинаковой степени). Особенное значение имела здесь открытая им формула бинома Ньютона (разумеется, не только с целыми показателями, для которых формулу знал, например, Виета (1540—1603), но и, что особенно важно, с дробными и отрицательными показателями). Ньютон разложил в «ряды Тейлора» все основные элементарные функции (рациональные, радикалы, тригонометрические, экспоненту и логарифм). Это, вместе с составленной им таблицей первообразных (которая перешла в почти неизменном виде в современные учебники анализа), позволяло ему, по его словам, сравнивать площади любых фигур «за половину четверти часа».

Ньютон указывал, что коэффициенты его рядов пропорциональны последовательным производным функции, но не останавливался на этом подробно, так как он справедливо считал, что все вычисления в анализе удобнее производить не при помощи кратных дифференцирований, а путем вычисления первых членов ряда. Для Ньютона связь между коэффициентами ряда и производными была скорее средством вычисления производных, чем средством составления ряда.

Одним из важнейших достижений Ньютона является его теория солнечной системы, изложенная в «Математических началах натуральной философии» («Principia») без помощи математического анализа. Обычно полагают, что Ньютон открыл при помощи своего анализа закон всемирного тяготения. В действительности Ньютону (1680) принадлежит лишь доказательство эллиптичности орбит в поле притяжения по закону обратных квадратов: сам этот закон был указан Ньютону Гуком (1635—1703) (см. § 8) и, по-видимому, угадывался еще несколькими учеными.

С «Principia» Ньютона начинается современная физика. Завершение формирования анализа как самостоятельной научной дисциплины связано с именем Лейбница (1646—1716). Огромной заслугой Лейбница является также широкая пропаганда анализа (первая публикация — статья 684 г.) и доведение его алгоритмов *) до полного автоматизма: он изобрел таким образом способ научить пользоваться анализом (и преподавать его) людей, вовсе его не понимающих,— тенденция, с которой приходится бороться еще и сегодня.

Из огромного числа работ XVIII века по дифференциальным уравнениям выделяются работы Эйлера (1707—1783) и Лагранжа 1736—1813). В этих работах была прежде всего развита теория малых колебаний, а следовательно — теория линейных систем дифференциальных уравнений; попутно возникли основные понятия линейной алгебры (собственные числа и векторы в $n$-мерном случае). Характеристическое уравнение линейного оператора долго называли секулярным, так как именно из такого уравнения определяются секулярные (вековые, т е. медленные по сравнению с годовым движением) возмущения планетных орбит согласно теории малых колебаний Лагранжа. Вслед за Ньютоном Лаплас и Лагранж, а позже Гаусс (1777—1855) развивают также методы теории возмущений.

Когда была доказана неразрешимость алгебраических уравнений в радикалах, Лиувилль (1809—1882) построил аналогичную теорию для дифференциальных уравнений, установив невозможность решения ряда уравнений (в том числе таких классических, как линейные уравнения второго порядка) в элементарных функциях и квадратурах. Позже С. Ли (1842—1899), анализируя вопрос об интегрировании уравнений в квадратурах, пришел к необходимости подробно исследовать группы диффео-

*) Между прочим, Лейбницу принадлежат понятия матрицы, обозначение $a_{ij}$, а также начала теории определителей и теории систем линейных уравнений, одна из первых вычислительных машин.

морфизмов (получившие впоследствии имя групп Ли) — так из теории дифференциальных уравнений возникла одна из наиболее плодотворных областей современной математики, дальнейшее развитие которой было тесно связано совсем с другими вопросами (алгебры Ли еще раньше рассматривали Пуассон (1781—1840) и, особенно, Якоби (1804—1851)).

Новый этап развития теории дифференциальных уравнений начинается с работ Пуанкаре (1854—1912), созданная им «качественная теория дифференциальных уравнений» вместе с теорией функций комплексных переменных привела к основанию современной топологии. Качественная теория дифференциальных уравнений, или, как теперь ее чаще называют, теория динамических систем, является сейчас наиболее активно развивающейся и имеющей наиболее важные приложения в естествознании областью теории дифференциальных уравнений. Начиная с классических работ А. М. Ляпунова (1857—1918) по теории устойчивости движения в развитии этой области большое участие принимают русские математики (упомяну работы А. А. Андронова (1901—1952) по теории бифуркаций, А. А Андронова и Л. С. Понтрягина по структурной устойчивости, Н. М. Крылова (1879—1955) и Н. Н. Боголюбова по теории усреднения, А. Н. Колмогорова по теории возмущений условно-периодических движений. Разбор современных достижений, конечно, выходит за рамки настоящей книги (с некоторыми из них можно познакомиться, например, по книгам автора «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений», М., 1978; «Математические методы классической механики», М., 1974; «Теория катастроф», М., 1981).

Автор благодарен всем читателям предыдущих изданий, сообщившим свои замечания, которые автор постарался учесть при переработке книги, а также Д. В. Аносову, многочисленные замечания которого способствовали улучшению настоящего издания.

*В. И. Арнольд*

# Предисловие к первому изданию

При отборе материала для этой книги автор стремился ограничиться строго необходимым минимумом. Центральное место в курсе занимают два круга вопросов: теорема о выпрямлении векторного поля (эквивалентная обычным теоремам существования, единственности и дифференцируемости решений) и теория однопараметрических групп линейных преобразований (т. е. теория линейных автономных систем). Автор позволил себе не касаться ряда более специальных вопросов, обычно включаемых в курсы обыкновенных дифференциальных уравнений (элементарные приемы интегрирования; уравнения, не разрешенные относительно производной; особые решения; теория Штурма — Лиувилля; уравнения с частными производными первого порядка). Часть из этих вопросов удобнее разобрать на упражнениях; последние же две темы естественнее относить к курсам уравнений с частными производными или вариационного исчисления.

Более подробно, чем это обычно принято, разбираются приложения обыкновенных дифференциальных уравнений к механике. Уравнение маятника появляется на одной из первых страниц; в дальнейшем эффективность вводимых понятий и методов каждый раз проверяется на этом примере. Так, в параграфе о первых интегралах появляется закон сохранения энергии, из теоремы о дифференцировании по параметру извлекается «метод малого параметра», а теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами естественно приводит к исследованию качелей («параметрический резонанс»).

Изложение многих вопросов в курсе сильно отличается от традиционного. Автор стремился всюду выявить геометрическую, качественную сторону изучаемых явлений. В соответствии с этим в книге много чертежей и нет ни одной сколько-нибудь сложной формулы. Зато появляется целый ряд фундаментальных понятий, которые при традиционном, координатном изложении остаются в тени (фазовое пространство и фазовые потоки, гладкие многообразия и расслоения, векторные поля и однопараметрические группы диффеоморфизмов). Курс значительно сократился бы, если бы можно было предполагать эти понятия известными. К сожалению, в настоящее время указанные вопросы не включаются ни в курсы анализа, ни в курсы геометрии. Поэтому автору пришлось излагать их достаточно подробно, не предполагая у читателя никаких предварительных знаний, выходящих за рамки стандартных элементарных курсов анализа и линейной алгебры.

Основу настоящей книги составил годовой курс лекций, которые автор читал студентам-математикам второго курса Московского университета в 1968—1970 гг.

При подготовке лекций к печати большую помощь оказал Р. И. Богданов. Автор благодарен ему и всем слушателям и коллегам, сообщившим свои замечания о ротапринтном тексте лекций (МГУ, 1969). Автор благодарен рецензентам Д. В. Аносову и С. Г. Крейну за внимательное рецензирование рукописи.

*В. Арнольд*

*1971 г.*

# Некоторые постоянно употребляемые обозначения

$\mathbf{R}$ — множество (группа, поле) вещественных чисел.

$\mathbf{C}$ — множество (группа, поле) комплексных чисел.

$\mathbf{Z}$ — множество (группа, кольцо) целых чисел.

$x \in X \subset Y$ — элемент $x$ подмножества $X$ множества $Y$.

$X \cap Y$, $X \cup Y$ — пересечение и объединение множеств $X$ и $Y$.

$f\colon X \to Y$ — отображение $f$ множества $X$ во множество $Y$.

$x \mapsto y$ — отображение переводит точку $x$ в точку $y$.

$f \circ g$ — произведение отображений (применяется сначала $g$).

$\exists$; $\forall$ — существует; для всякого.

* — не обязательная (более трудная) задача или теорема.

$\mathbf{R}^n$ — линейное пространство размерности $n$ над полем $\mathbf{R}$.

Во множестве $\mathbf{R}^n$ могут рассматриваться и другие структуры (например, аффинная, евклидова или структура прямого произведения $n$ прямых). Обычно это будет специально оговариваться («аффинное пространство $\mathbf{R}^n$», «евклидово пространство $\mathbf{R}^n$», «координатное пространство $\mathbf{R}^n$» и т. п.).

*Векторами* мы называем элементы линейного пространства. Векторы обычно обозначаются буквами полужирного шрифта ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\xi}$ и т. п.). Векторы координатного пространства $\mathbf{R}^n$ отождествляются с наборами $n$ чисел. Мы будем писать, например, $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_n) = v_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + v_n\boldsymbol{e}_n$; набор $n$ векторов $\boldsymbol{e}_i$ называется *координатным базисом* в $\mathbf{R}^n$.

Нам часто будут встречаться функции вещественного переменного $t$, называемого *временем*. Производная по $t$ называется *скоростью* и обозначается чаще всего точкой наверху: $\dot{x} = dx/dt$.

*Глава 1*

# Основные понятия

## § 1. Фазовые пространства

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений — одно из основных орудий математического естествознания. Эта теория позволяет изучать всевозможные эволюционные процессы, обладающие свойствами *детерминированности, конечномерности* и *дифференцируемости.* Прежде чем дать точные математические определения, рассмотрим несколько примеров.

**1. Примеры эволюционных процессов.** Процесс называется *детерминированным*, если весь его будущий ход и все его прошлое однозначно определяются состоянием в настоящее время. Множество всевозможных состояний процесса называется *фазовым пространством.*

Так, например, классическая механика рассматривает движение систем, будущее и прошлое которых однозначно определяются начальными положениями и начальными скоростями всех точек системы. Фазовое пространство механической системы — это множество, элементом которого является набор положений и скоростей всех точек данной системы.

Движение частиц в квантовой механике не описывается детерминированным процессом. Распространение тепла — полудетерминированный процесс: будущее определяется настоящим, а прошлое — нет.

Процесс называется *конечномерным*, если его фазовое пространство конечномерно, т. е. если число параметров, нужных для описания его состояния, конечно. Так, например, ньютоновская механика систем из конечного числа материальных точек или твердых тел относится к этому классу. Размерность фазового пространства системы из $n$ материальных точек равна $6n$, а системы из $n$ твердых тел — $12n$. Движения жидкости, изучаемые в гидродинамике, процессы колебаний струны и мембраны, распространение волн в оптике и акустике — примеры процессов, которые нельзя описать с помощью конечномерного фазового пространства.

Процесс называется *дифференцируемым*, если его фазовое пространство имеет структуру дифференцируемого многообразия, а изменение состояния со временем описывается дифференцируемыми функциями

Так, например, координаты и скорости точек механической системы меняются со временем дифференцируемым образом.

Движения, изучаемые в теории удара, свойством дифференцируемости не обладают.

Таким образом, движение системы в классической механике может быть описано при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений, тогда как квантовая механика, теория теплопроводности, гидродинамика, теория упругости, оптика, акустика и теория удара требуют иных средств.

Еще два примера детерминированных конечномерных и дифференцируемых процессов: процесс радиоактивного распада и процесс размножения бактерий при достаточном количестве питательного вещества. В обоих случаях фазовое пространство одномерно: состояние процесса определяется количеством вещества или количеством бактерий. В обоих случаях процесс описывается обыкновенным дифференциальным уравнением.

Заметим, что вид дифференциального уравнения процесса, а также самый факт детерминированности, конечномерности и дифференцируемости того или иного процесса можно установить лишь экспериментально, следовательно — только с некоторой степенью точности. В дальнейшем мы не будем всякий раз подчеркивать это обстоятельство и будем говорить о реальных процессах так, как если бы они точно совпадали с нашими идеализированными математическими моделями.

**2. Фазовые потоки.** Точная формулировка изложенных выше общих принципов требует довольно абстрактных понятий: *фазового пространства* и *фазового потока*. Чтобы освоиться с этими понятиями, рассмотрим пример, где уже одно введение фазового пространства позволяет решить трудную задачу.

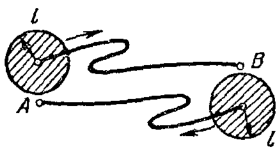


Рис. 1. Начальное положение возов.

Задача 1 (Н. Н. Константинов). Из города $A$ в город $B$ (рис. 1) ведут две не пересекающиеся дороги. Известно, что две машины, выезжающие по разным дорогам из $A$ в $B$ и связанные веревкой некоторой длины, меньшей $2l$, смогли проехать из $A$ в $B$, не порвав веревки. Могут ли разминуться, не коснувшись, два круглых воза радиуса $l$, центры которых движутся по этим дорогам навстречу друг другу?

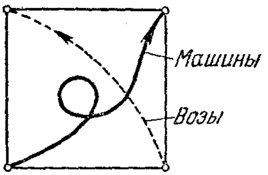


Рис. 2. Фазовое пространство пары экипажей.

Решение. Рассмотрим квадрат (рис. 2)

$$M=\{x_1,\ x_2:\ 0\leqslant x_i\leqslant 1\}.$$

Положение двух экипажей (один на первой дороге, другой — на второй) можно характеризовать точкой квадрата $M$: достаточно обозначить через $x_i$ долю расстояния от $A$ до $B$ по $i$-й дороге, заключенную между $A$ и находящимся на этой дороге экипажем.

Всевозможным положениям экипажей соответствуют всевозможные точки квадрата $M$. Этот квадрат называется *фазовым пространством*, а его точки — *фазовыми точками*. Таким образом, каждая фазовая точка соответствует определенному положению пары экипажей, а всякое движение экипажей изображается движением фазовой точки в фазовом пространстве.

Например, начальное положение машин (в городе $A$) соответствует левому нижнему углу квадрата ($x_1=x_2=0$), а движение машин из $A$ в $B$ изображается кривой, ведущей в противоположный угол.

Точно так же начальное положение возов соответствует правому нижнему углу квадрата ($x_1=0$, $x_2=1$), а движение возов изображается кривой, ведущей в противоположный угол квадрата.

Но всякие две кривые в квадрате, соединяющие разные пары противоположных вершин, пересекаются. Поэтому, как бы ни двигались возы, наступит момент, когда пара возов займет положение, в котором была в некоторый момент времени пара машин. В этот момент расстояние между центрами возов будет меньше $2l$. Итак, разминуться не удается.

В рассмотренном примере не участвовали дифференциальные уравнения, но ход рассуждений близок к тому, чем мы будем заниматься дальше: описание состояний процесса как точек подходящего фазового пространства часто оказывается чрезвычайно полезным.

Например, состояние процесса движения системы $n$ материальных точек в классической механике описывается значениями координат и скоростей всех материальных точек. Следовательно, фазовое пространство такой системы имеет размерность $6n$ (по три координаты и три компоненты скорости на каждую материальную точку). Фазовое пространство системы трех точек (Солнце, Юпитер, Сатурн) 18-мерно. Фазовое пространство системы $n$ твердых тел имеет размерность $12n$ (почему?).

Движение всей системы описывается движением точки по кривой в фазовом пространстве. Скорость движения фазовой точки по этой кривой определяется самой точкой. Таким образом, в каждой точке фазового пространства задан вектор — он называется вектором фазовой скорости. Все векторы фазовой скорости образуют векторное поле фазовой скорости в фазовом пространстве. Это векторное поле определяет дифференциальное уравнение процесса (зависимость скорости движения фазовой точки от ее положения).

Основная задача теории дифференциальных уравнений состоит в определении или исследовании движения системы по векторному полю фазовой скорости. Сюда относятся, например, вопросы о виде фазовых кривых (траекторий движения фазовой точки): уходят ли, скажем, фазовые кривые данного векторного поля в фазовом пространстве на бесконечность или остаются в ограниченной области?

В общем виде эта задача не поддается средствам современной математики и, по-видимому, в некотором смысле неразрешима (в частности это относится к упоминавшейся проблеме трех тел). В простейших частных случаях, с которых мы и начнем, задача решается явно при помощи операции интегрирования. Вычислительные машины позволяют приближенно находить решения дифференциальных уравнений на конечном отрезке времени, но не дают ответа на качественные вопросы о поведении фазовых кривых в целом. В дальнейшем, наряду с методами явного решения специальных дифференциальных уравнений, мы приведем также некоторые методы качественного исследования.

Понятие фазового пространства сводит изучение эволюционных процессов к геометрическим задачам о кривых, определяемых векторными полями. Мы начнем исследование дифференциальных уравнений со следующей геометрической задачи.

**3. Интегральные кривые поля направлений.** Предположим, что в каждой точке некоторой области на плоскости выбрана проходящая через эту точку прямая. В таком случае говорят, что в области задано поле направлений (рис. 3).

Замечание 1. Две гладкие кривые, проходящие через одну точку, задают в ней одинаковое направление, если они касаются. Таким образом, прямые в определении поля направлений можно заменить произвольными гладкими кривыми: важна лишь касательная к кривой в точке. На рис. 3 изображена лишь маленькая часть прямой около каждой точки.

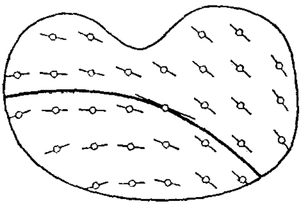

Рис. 3. Поле направлений и его интегральная кривая.

Замечание 2. Здесь и в дальнейшем все встречающиеся объекты (функции, отображения,...) предполагаются гладкими, т. е. непрерывно дифференцируемыми нужное число раз, если не оговорено противное. Поле направлений называется непрерывным (гладким), если прямые поля непрерывно (гладко) зависят от точки приложения.

Замечание 3. Аналогичным образом определяется поле направлений (прямых) в $n$-мерном пространстве (а также на любом гладком многообразии).

Определение. Линия, которая в каждой своей точке касается имеющегося в этой точке направления поля, называется *интегральной кривой* поля направлений.

Название «интегральные кривые» объясняется тем, что в некоторых случаях эти кривые можно найти при помощи операции интегрирования.

Пример. Предположим, что непрерывное поле направлений на плоскости переходит в себя при всех сдвигах вдоль некоторой прямой и не содержит параллельных ей направлений (рис. 4).

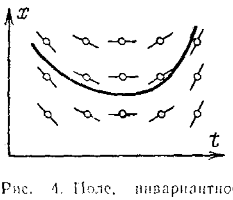


Рис. 4. Поле, инвариантное относительно вертикальных сдвигов.

Теорема. *Задача отыскания интегральных кривых такого поля есть в точности задача интегрирования данной непрерывной функции.*

Доказательство. Выберем систему координат, в которой данная прямая — вертикальная ось ординат, а ось абсцисс горизонтальна. Интегральная кривая поля без вертикальных направлений является графиком функции. Производная этой функции равна тангенсу угла наклона графика к оси абсцисс. График — интегральная кривая тогда и только тогда, когда этот тангенс равен тангенсу угла наклона прямой данного поля к оси абсцисс. Но этот последний тангенс — известная функция абсциссы (поскольку поле переходит в себя при сдвигах вдоль оси ординат). Следовательно, функция, графиком которой является интегральная кривая, имеет производной известную функцию и, значит, является ее первообразной, что и требовалось доказать.

Обозначим абсциссу буквой $t$, ординату — буквой $x$, тангенс угла наклона прямой поля — известная функция $v(t)$, интегральная кривая — график неизвестной функции $\varphi$. Кривая $x=\varphi(t)$ интегральная, если и только если $\frac{d\varphi}{dt}=v(t)$. По теореме Барроу *) $\varphi=\int v\,dt+C$.

В общем случае задача отыскания интегральных кривых не сводится к операции интегрирования: даже для очень просто задаваемых полей направлений на плоскости уравнения интегральных кривых нельзя представить конечными комбинациями элементарных функций и интегралов **)

**4. Дифференциальное уравнение и его решения.** Геометрическая задача отыскания интегральных кривых аналитически записывается как задача отыскания решений дифференциального уравнения. Предположим, что поле на плоскости $(t, x)$ не содержит вертикальных направлений (не параллельно оси ординат, $x$ (рис. 5)). Тогда тангенс $v(t, x)$ угла наклона приложенной в точке $(t, x)$ прямой поля к оси абсцисс конечен и интегральные кривые являются графиками функций $x=\varphi(t)$.

Мы будем предполагать, что областью определения функции $\varphi$ является интервал $I$ оси $t$. Очевидна

Т е о р е м а. *Для того чтобы график функции $\varphi$ был интегральной кривой, необходимо и достаточно, чтобы при всех $t$ из $I$ выполнялось соотношение.*

$$\frac{d\varphi}{dt}=v(t, \varphi(t)). \tag{1}$$

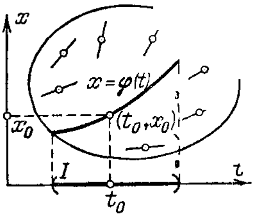


Рис. 5. График решения дифференциального уравнения.

О п р е д е л е н и е. Функция $\varphi$ называется *решением* дифференциального уравнения

$$\dot{x}=v(t, x), \tag{2}$$

если она удовлетворяет соотношению (1) (т. е. если «при подстановке ее в уравнение вместо $x$ уравнение обращается в тождество»).

О п р е д е л е н и е. Решение $\varphi$ *удовлетворяет начальному условию* $(t_0, x_0)$, если $\varphi(t_0)=x_0$.

Таким образом, решение — это заданная на интервале функция, график которой — интегральная кривая; решение удовлетворяет началь-

*) И. Барроу, 1630—1677, учитель Ньютона, посвятивший книгу взаимной обратности задач о касательных и о площадях.

**) Пример: таково поле, в котором тангенс угла наклона прямой, приложенной в точке $(t, x)$, с осью $x$ равен $x^2-t$ (Лиувилль) ному условию $(t_0, x_0)$, если интегральная кривая проходит через данную точку (рис. 5).

Пример. Решение простейшего уравнения $\dot{x}=v(t)$ с начальным условием $(t_0, x_0)$ дается *формулой Барроу*:

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau.$$

Всякое дифференциальное уравнение (2) определяет поле направлений на плоскости: приложенная в точке $(t, x)$ прямая имеет тангенс угла наклона $v(t, x)$. Это поле короче называется *полем направлений $v$* или *полем направлений уравнения* (2).

**5. Эволюционное уравнение с одномерным фазовым пространством.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}=v(x), \qquad x\in\mathbf{R}.$$

Это уравнение описывает эволюционный процесс с одномерным фазовым пространством. Правая часть задает *векторное поле фазовой скорости*: в точке $x$ приложен вектор $v(x)$ (рис. 6, слева). Такое уравнение, правая часть которого не зависит от $t$, называется *автономным*. Скорость эволюции автономной системы, т. е. системы, не взаимодействующей с другими, определяется одним лишь состоянием этой системы: от времени законы природы не зависят.

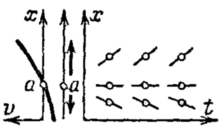


Рис. 6. Векторное поле и поле направлений для уравнения $\dot{x}=v(x)$.

Точки, где $v$ обращается в 0, называются *положениями равновесия* (также *стационарными точками* или *особыми точками*) векторного поля. Если $a$ — положение равновесия, то $\varphi(t)\equiv a$ — решение уравнения (процесс, начавшись в состоянии $a$, всегда в нем остается). На рис. 6 видно одно положение равновесия, $a$. Видно, что это положение равновесия неустойчиво: при малом отклонении начального условия от равновесного фазовая точка с течением времени удаляется от положения равновесия.

На рис. 6 изображено также поле направлений рассматриваемого уравнения. Поскольку $v$ не зависит от $t$, поле переходит в себя при сдвигах вдоль оси $t$.

Согласно теореме п. 3, задача построения интегральных кривых этого поля решается одним интегрированием (в области, где поле не параллельно оси $t$, т. е. где нет равновесий, $v(x)\neq 0$). Предположим, что функция $v$ непрерывна и нигде не обращается в 0. Выпишем явную формулу, определяющую интегральные кривые.

Тангенс угла наклона нашего поля к оси $x$ равен $1/v(x)$. Следовательно, *поле направлений уравнения $dx/dt=v(x)$ совпадает с полем направлений уравнения $dt/dx=1/v(x)$*. Значит, совпадают и интегральные кривые этих уравнений. Но интегральная кривая второго дается формулой Барроу; в данном случае она имеет вид

$$t-t_0=\int_{x_0}^{x}\frac{d\xi}{v(\xi)}. \tag{3}$$

Таким образом доказана

Теорема. *Решение $x=\varphi(t)$ уравнения $\dot{x}=v(x)$ с непрерывной и не обращающейся в 0 правой частью, удовлетворяющее начальному условию $(t_0, x_0)$, дается формулой* (3). *Обратно, функция $x=\varphi(t)$, определяемая формулой* (3), *является решением и удовлетворяет начальному условию.*

Замечание. «Мнемонический» способ запоминания формулы (3) состоит в следующем. Запишем исходное уравнение в виде $dx/dt=v(x)$. Хотя в курсах анализа при введении производной учат, что $dx/dt$ не дробь, а единый символ, будем обращаться с этим символом как с дробью и перепишем уравнение, собрав все $x$ слева, а все $t$ справа, в виде $dx/v(x)=dt$. Интегрируя левую и правую части, получаем соотношение $t=\int dx/v(x)$, т. е. (3).

В действительности этот способ, конечно, больше, чем мнемоническое правило. Лейбниц не стал бы вводить сложное обозначение $\frac{dx}{dt}$, если бы не имел в виду самой настоящей дроби: *$dx$ деленное на $dt$*. Дело в том, что $dx$ и $dt$ — вовсе не таинственные «бесконечно-малые» величины, а вполне конечные числа, точнее — функции вектора.

Рассмотрим (рис. 7) приложенный в какой-либо точке вектор $\boldsymbol{A}$ скорости движения на плоскости, на которой фиксированы координаты $(t, x)$. Скорость изменения координаты $t$ при этом движении является функцией этого вектора. Она линейна. Эта линейная функция вектора и обозначается $dt$. Например, значение этой функции на векторе $\boldsymbol{A}$ с компонентами (10, 20) есть $dt(\boldsymbol{A})=10$. Точно так же определяется $dx(\boldsymbol{A})=20$ — скорость изменения координаты $x$ при движении с вектором скорости $\boldsymbol{A}$, так что $\boldsymbol{A}$ имеет компоненты $dt(\boldsymbol{A})$, $dx(\boldsymbol{A})$. Очевидно

Предложение 1. *Для любого вектора $\boldsymbol{A}$, касающегося графика гладкой функции $x=\varphi(t)$, отношение $dx(\boldsymbol{A})/dt(\boldsymbol{A})$ равно производной $dx/dt$ функции $\varphi$ в соответствующей точке.*

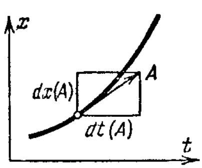

Рис. 7. Числитель и знаменатель дроби $dx/dt$.

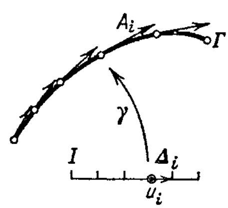

Рис. 8. Определение интеграла 1-формы.

Таким образом, уравнение $dx/v(x)=dt$ есть *соотношение между линейными функциями от вектора, касающегося интегральной кривой.*

Функции приложенного вектора, линейные при фиксированной точке приложения, называются *дифференциальными 1-формами.*

Всякая дифференциальная 1-форма на плоскости $(t, x)$ может быть записана в виде $\omega=a\,dt+b\,dx$, где $a$ и $b$ — функции на плоскости.

Дифференциальные формы можно интегрировать вдоль ориентированных отрезков кривых. Выберем на отрезке $\Gamma$ кривой на плоскости ориентирующий параметр $u$, т. е. представим $\Gamma$ в виде образа гладкого отображения $\gamma\colon I\to\mathbb{R}^2$ (рис. 8) отрезка оси $u$ в плоскость. Интеграл формы $\omega$ вдоль $\Gamma$ определяется как число

$$\int_\Gamma \omega=\int_I \omega(\boldsymbol{\gamma}')\,du, \text{ где } \boldsymbol{\gamma}'=d\gamma/du.$$

Иными словами, интеграл — это предел интегральных сумм $\sum \omega(A_i)$, где $A_i = \gamma'(u_i)\Delta_i$; здесь $u_i$ — точки деления отрезка $I$ на отрезки длин $\Delta_i = u_{i+1} - u_i$. Вектор $A_i$ касается $\Gamma$ и лишь малыми высшего порядка относительно $\Delta_i$ отличается от вектора хорды, соединяющей последовательные точки деления на $\Gamma$ (рис. 8).

Из теоремы о замене переменной в определенном интеграле *) вытекает

Предложение 2. *Интеграл 1-формы по ориентированному отрезку кривой не зависит от выбора параметра, согласованного с ориентацией (при изменении ориентации интеграл меняет знак).*

Очевидно

Предложение 3. *Интеграл 1-формы $f(x)dx$ по отрезку кривой, на котором $x$ можно принять за параметр, совпадает с обычным определенным интегралом функции $f$.*

Вернемся к доказательству формулы (3).

Значения дифференциальных форм $dx/v(x)$ и $dt$ на векторах, касающихся интегральной кривой, совпадают. Значит, их интегралы вдоль отрезка кривой равны. Согласно предложению 3, интеграл первой формы равен правой, а второй — левой части формулы (3).

**6. Пример: уравнение нормального размножения.** Предположим, что величина биологической популяции (например, количество бактерий в чашке Петри или рыб в пруду) равна $x$ и что скорость прироста пропорциональна наличному количеству особей. (Это предположение приближенно выполняется, пока пищи достаточно много.)

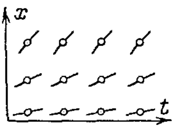


Рис. 9. Уравнение размножения $\dot{x} = kx$.

Наше предположение выражается *дифференциальным уравнением нормального размножения*

$$\dot{x} = kx, \qquad k > 0.$$

По смыслу задачи $x > 0$, так что поле направлений задано в полуплоскости; оно изображено на рис. 9. Из вида поля направлений ясно, что $x$ растет с ростом $t$, но неясно, будут ли бесконечные значения $x$ достигнуты за конечное время (вертикальная асимптота у интегральной кривой) или же решение остается конечным при всех $t$? Наряду с будущим неясно также и прошлое: будет ли интегральная кривая стремиться к оси $x = 0$ при стремлении $t$ к конечному отрицательному пределу или к бесконечному?

К счастью, уравнение размножения решается явно по предыдущей теореме: согласно формуле (3),

$$t - t_0 = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{k\xi}, \quad k(t - t_0) = \ln(x/x_0), \qquad x = e^{k(t-t_0)}x_0.$$

Следовательно, решения уравнения нормального размножения экспоненциально растут при $t \to +\infty$ и экспоненциально убывают при $t \to -\infty$; *ни бесконечные, ни нулевые значения $x$ при конечных $t$ не достигаются.* Для удвоения количества населения согласно уравнению нормального размножения требуется, таким образом, всегда одно и то же время, независимо от его количества (период удвоения населения Земли сейчас

---

*) Эта теорема открыта Барроу именно при решении простейших дифференциальных уравнений, теперь называемых уравнениями с разделяющимися переменными.

порядка 40 лет). Наука до середины XX века также росла экспоненциально (рис. 10.

То же самое дифференциальное уравнение с отрицательным $k$ описывает радиоактивный распад. Для уменьшения количества радиоактивного вещества вдвое требуется время $T=k^{-1}\ln 2$, независимо от начального количества вещества. Это время называется *периодом полураспада.* Период полураспада широко известного изотопа радия-226 — 1620 лет, а наиболее распространенного изотопа урана-238 — $4{,}5\cdot 10^9$ лет.

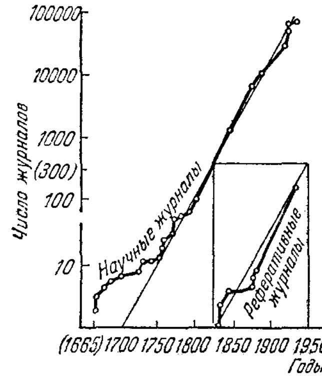

Рис. 10. Рост числа оригинальных и реферативных научных журналов (по книге В. В. Налимова и З. М. Мульченко «Наукометрия» (М.: Наука, 1969)).

То же уравнение встречается и в большом числе других задач (в дальнейшем мы увидим, что это не случайность, а проявление закона природы, по которому «всякая» функция локально приближенно линейна).

Задача 1. На какой высоте плотность воздуха вдвое меньше, чем на поверхности Земли? Температуру считать постоянной, кубометр воздуха на поверхности Земли весит 1250 г.

*Ответ.* $8\ln 2$ км $\approx 5{,}6$ км — высота Эльбруса.

**7. Пример: уравнение взрыва.** Предположим теперь, что скорость прироста пропорциональна не количеству особей, а количеству пар:

$$\dot{x}=kx^2. \tag{4}$$

В этом случае при больших $x$ прирост идет гораздо быстрее нормального, а при малых — гораздо медленнее (эта ситуация встречается скорее в физико-химических задачах, где скорость реакции пропорциональна концентрациям обоих реагентов; впрочем, в настоящее время китам некоторых видов так трудно найти себе пару, что размножение китов подчиняется уравнению (4), причем $x$ мало).

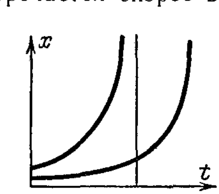

Рис. 11. Уравнение взрыва $\dot{x}=x^2$.

Поле направлений на вид мало отличается от такового для случая обычного размножения (рис. 9), но вычисления показывают, что интегральные кривые ведут себя совершенно по-другому. Предположим для простоты, что $k=1$. По формуле Барроу находим решение $t=\int\frac{dx}{x^2}+C$, т. е. $x=-\dfrac{1}{t-C}$ при $t<C$. Интегральные кривые — половины гипербол (рис. 11). Гипербола имеет вертикальную асимптоту.

Итак, *если прирост населения пропорционален числу пар, то количество населения становится бесконечно большим за конечное время.* Физически этот вывод соответствует взрывообразному характеру процесса. (Разумеется, при $t$, слишком близком к $C$, идеализация, принятая при описании процесса дифференциальным уравнением, неприменима, так что реальное количество населения за конечное время бесконечных значений не достигает.)

Интересно отметить, что вторая половина гиперболы $x=(C-t)^{-1}$ также является интегральной кривой нашего уравнения (если продолжить его с полуоси $x>0$ на всю ось $x$). Решения, соответствующие обеим половинам гиперболы, даются одной и той же формулой, но никак не связаны между собой. Связь между этими решениями восстанавливается, если считать время комплексным или если компактифицировать аффинную ось $x$ до проективной прямой (см. гл. 5).

Задача* 1. Какие из дифференциальных уравнений $\dot{x}=x^n$ определяют на аффинной прямой поле фазовой скорости, продолжающееся без особенностей на проективную прямую?

*Ответ.* $n=0$, 1 или 2.

**8. Пример: логистическая кривая.** Уравнение обычного размножения $\dot{x}=kx$ пригодно, лишь пока число особей не слишком велико. С увеличением числа особей конкуренция из-за пищи приводит к уменьшению скорости прироста. Простейшее предположение состоит в том, что коэффициент $k$ зависит от $x$ как линейная неоднородная функция (при не слишком больших $x$ всякую гладкую функцию можно аппроксимировать линейной неоднородной): $k=a-bx$.

Мы приходим таким образом к *уравнению размножения с учетом конкуренции* $\dot{x}=(a-bx)x$. Коэффициенты $a$ и $b$ можно превратить в единицу выбором масштабов $t$ и $x$. Мы получаем так называемое *логистическое уравнение*

$$\dot{x}=(1-x)\,x.$$

Векторное поле фазовой скорости $v$ и поле направлений на плоскости $(t,\ x)$ изображены на рис. 12.

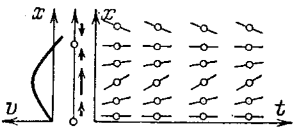


Рис. 12. Векторное поле и поле направлений уравнения $\dot{x}=(1-x)\,x$.

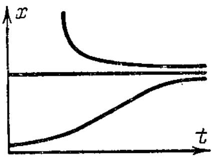


Рис. 13. Интегральные кривые уравнения $\dot{x}=(1-x)\,x$.

Мы заключаем отсюда, что интегральные кривые выглядят, как изображено на рис. 13. Точнее говоря, мы видим, что

1) процесс имеет два положения равновесия: $x=0$ и $x=1$;

2) между точками 0 и 1 поле направлено от 0 к 1, а при $x>1$ — к точке 1.

Таким образом, положение равновесия 0 неустойчиво (раз появившееся население начинает расти), а положение равновесия 1 устойчиво (меньшее население растет, а большее — убывает).

*Каким бы ни было начальное состояние $x>0$, с течением времени процесс выходит к устойчивому состоянию равновесия $x=1$.*

Из этих соображений неясно, однако, происходит ли этот выход за конечное или за бесконечное время, т. е. имеют ли интегральные кривые, начавшиеся в области $0<x<1$, общие точки с прямой $x=1$?

Можно показать, что таких общих точек нет и что эти интегральные кривые асимптотически стремятся к прямой $x=1$ при $t\to+\infty$ и к прямой

$x=0$ при $t\to-\infty$. Эти кривые называются *логистическими кривыми.* Таким образом логистическая кривая имеет две горизонтальные асимптоты ($x=0$ и 1) и описывает переход от одного состояния (0) к другому (1) за бесконечное время.

Задача 1. Найти уравнение логистической кривой.

Решение. По формуле (3) $t=\int dx/(x(1-x))=\ln(x/1-x)$, или $x=e^t/(1+e^t)$.

Эта формула доказывает указанное выше асимптотическое свойство логистической кривой.

Задача 2. Доказать, что интегральные кривые уравнения $\dot{x}=(1-x)x$ в области $x>1$ асимптотически стремятся к прямой $x=1$ при $t\to+\infty$ и имеют вертикальные асимптоты $t=\text{const}$.

При малых $x$ логистическая кривая практически неотличима от экспоненциальной, т. е. конкуренция мало влияет на рост. Однако по мере увеличения $x$ рост становится неэкспоненциальным и вблизи $x=1/2$ экспоненциальная кривая резко уходит вверх от логистической; в дальнейшем логистический рост описывает насыщение системы, т. е. установление в ней равновесного режима ($x=1$).

До середины XX века наука росла экспоненциально (см. рис. 10). Если такой рост будет продолжаться, то к XXI веку все население Земли будет заниматься наукой, а для печатания научных статей не хватит всех лесов планеты. Следовательно, раньше должно наступить насыщение: мы находимся вблизи того места, где логистическая кривая начинает отставать от экспоненциальной. Например, число математических статей в научных журналах после второй мировой войны до 70-х годов увеличивалось каждый год на 7%, а последние несколько лет — медленнее.

**9. Пример: квоты отлова.** До сих пор мы рассматривали свободную популяцию, развивающуюся по своим внутренним законам. Предположим теперь, что мы отлавливаем часть популяции (скажем, ловим рыбу в пруду или в океане). Предположим, что скорость вылова постоянна. Мы приходим к дифференциальному уравнению отлова

$$\dot{x}=(1-x)x-c.$$

Величина $c$ характеризует скорость вылова и называется *квотой*. Вид векторного поля и поля фазовой скорости при различных значениях скорости вылова $c$ показан на рис. 14.

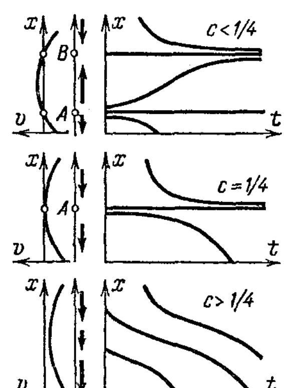


Рис. 14. Уравнение отлова $\dot{x}=(1-x)x-c$.

Мы видим, что при не слишком большой скорости вылова ($0<c<1/4$) существуют два положения равновесия ($A$ и $B$ на рис. 14). Нижнее положение равновесия ($x=A$) неустойчиво. Если по каким-либо причинам (перелов, болезни) в некоторый момент величина популяции $x$ опустится ниже $A$, то в дальнейшем вся популяция за конечное время вымрет.

Верхнее положение равновесия $B$ устойчиво — это стационарный режим, на который выходит популяция при постоянном отлове $c$.

Если $c>1/4$, то равновесий нет и вся популяция будет отловлена за конечное время (стеллерова корова и т. п.).

При $c=1/4$ имеется одно неустойчивое состояние равновесия ($A=B=1/2$). Отлов с такой скоростью при достаточно большой начальной численности популяции математически возможен в течение сколь угодно длительного времени, однако сколь угодно малое колебание численности установившейся равновесной популяции вниз приводит к полному вылову популяции за конечное время.

Таким образом, хотя теоретически допустимы любые квоты, вплоть до максимальной ($c \leqslant 1/4$), *максимальная квота* $c=1/4$ *приводит к неустойчивости и недопустима*. Более того, *практически недопустимы и близкие к* $1/4$ *квоты*, так как при них опасный порог $A$ близок к установившемуся режиму $B$ (небольшие случайные отклонения отбрасывают популяцию ниже порога $A$, после чего она погибает).

Оказывается, однако, что можно организовать отлов так, чтобы устойчиво получать улов со скоростью $1/4$ за единицу времени (большего получить нельзя, так как $1/4$ — это максимальная скорость размножения необлавливаемой популяции).

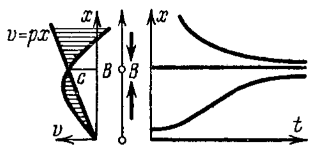

Рис. 15. Уравнение отлова $\dot{x}=(1-x)x-px$

**10. Пример: отлов с относительной квотой.** Фиксируем вместо абсолютной скорости отлова относительную, т. е. фиксируем отлавливаемую за единицу времени долю наличной популяции: $\dot{x}=(1-x)x-px$. Вид векторного поля и интегральные кривые (при $p<1$) изображены на рис. 15.

Нижнее, неустойчивое положение равновесия теперь в точке $x=0$, второе положение равновесия $B$ устойчиво при любом $p$, $0<p<1$.

После некоторого периода установления популяция выходит на стационарный режим $x=B$. Абсолютная скорость отлова устанавливается при этом равной $c=pB$. Это — ордината точки пересечения графиков функций $v=(1-x)x$ и $v=px$ (рис. 15, слева). Исследуем поведение этой величины $c$ при изменении $p$. При малых относительных выловах (малых $p$) установившаяся скорость отлова также мала; при $p \to 1$ она тоже стремится к нулю (перелов). Наибольшее значение абсолютной скорости $c$ равно наибольшей ординате графика функции $v=(1-x)x$. Оно достигается, когда прямая $v=px$ проходит через вершину параболы (т. е. при $p=1/2$), и равно $c=1/4$.

Выберем $p=1/2$ (т. е. назначим относительную квоту так, чтобы установившаяся популяция составляла половину необлавливаемой). Мы достигли максимально возможной стационарной скорости облавливания $c=1/4$, причем система остается устойчивой (возвращается к установившемуся состоянию при малых отклонениях начальной популяции от установившейся).

**11. Уравнения с многомерным фазовым пространством.** В рассматривавшихся выше примерах фазовое пространство было одномерным. В более сложных случаях (например, при учете взаимодействия между несколькими популяциями) точка фазового пространства определяется несколькими числами (двумя для двух популяций и т. д.). Определения дифференциального уравнения, решений и т. д. в этом случае аналогичны введенным выше. Повторим эти определения.

Пусть $v$ — векторное поле в области $U$ $n$-мерного фазового пространства. *Автономное дифференциальное уравнение, заданное полем* $v$, — это уравнение

$$\dot{x}=v(x), \qquad x\in U\subset \mathbf{R}^n.$$

*Решением* такого уравнения называется гладкое отображение $\varphi\colon I\to U$ интервала оси времени в фазовое пространство, для которого $d\varphi/dt=v(\varphi(t))$ при всех $t$ из $I$.

Образ отображения $\varphi$ называется *фазовой кривой*, а график *) отображения $\varphi$ — *интегральной кривой*. Интегральная кривая лежит в прямом произведении оси времени на фазовое пространство. Это прямое произведение называется *расширенным фазовым пространством*. Расширенное фазовое пространство имеет размерность $n+1$.

Пусть $(t_0,\ x_0)$ — точка расширенного фазового пространства. Решение $\varphi$ *удовлетворяет начальному условию* $(t_0,\ x_0)$, если $\varphi(t_0)=x_0$, т. е. если интегральная кривая проходит через точку $(t_0,\ x_0)$.

Как и в случае одномерного фазового пространства, интегральные кривые можно описать при помощи поля направлений в расширенном фазовом пространстве. Тангенс угла наклона к оси абсцисс заменяется следующей конструкцией.

Предположим, что дано поле направлений в области $V$ прямого произведения $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ и что направление поля нигде не вертикально (не параллельно $\mathbf{R}^n$). Пусть $t$ — координата в $\mathbf{R}$, $x=(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ — в $\mathbf{R}^n$. Тогда в каждой точке существует (и единствен) вектор приложенного в этой точке направления, имеющий горизонтальную координату ($t$-компоненту), равную 1. Таким образом, указанный вектор имеет вид $(1,\ v(t,\ x))$, где $v(t,\ x)$ — вектор в $\mathbf{R}^n$, зависящий от точки расширенного фазового пространства. Иными словами, невертикальное поле направлений в расширенном фазовом пространстве определяет зависящее от времени векторное поле в фазовом пространстве.

Каждая интегральная кривая данного поля направлений очевидно удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}=v(t,\ x),$$

т. е. является графиком отображения $\varphi$ интервала оси времени в фазовое пространство, для которого $d\varphi/dt=v(t,\ \varphi(t))$ при всех $t$. Обратно, график всякого решения — интегральная кривая этого поля.

Решение удовлетворяет начальному условию $(t_0;\ x_0)$, если и только если интегральная кривая проходит через эту точку.

Замечание. В координатной записи векторное поле в $n$-мерном пространстве задается $n$ функциями $n$ переменных. Наше дифференциальное уравнение принимает поэтому вид «системы $n$ уравнений первого порядка»:

$$\dot{x}_1=v_1(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n),\ \ldots,\quad \dot{x}_n=v_n(t;\ x_1,\ \ldots,\ x_n).$$

---

*) *График* отображения $f\colon X\to Y$ есть подмножество прямого произведения $X\times Y$, состоящее из всех пар вида $(x,\ f(x))$, где $x\in X$; *прямое произведение* $X\times Y$ есть множество всех упорядоченных пар $(x,\ y)$, где $x\in X$, $y\in Y$.

Решение задается вектор-функцией ($\varphi_1, \ldots, \varphi_n$) переменной $t$, для которой $d\varphi_k/dt = v_k(t; \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$, $k=1, \ldots, n$, при всех $t$. Начальное условие задается $n+1$ числом ($t_0; x_{1,0}, \ldots, x_{n,0}$).

**12. Пример: дифференциальное уравнение системы хищник — жертва.** Простейшая, самая грубая модель, описывающая борьбу двух видов — хищника и жертвы — состоит в следующем. Рассмотрим пруд, в котором живут рыбы двух видов, скажем, караси и щуки. Если бы щук не было, караси размножались бы экспоненциально, со скоростью $\dot{x}=kx$, пропорциональной их количеству $x$ (мы предполагаем, что суммарная масса карасей много меньше массы пруда). Если $y$ — количество щук, то следует учесть карасей, съеденных щуками. Мы предположим, что число встреч карасей со щуками пропорционально как числу карасей, так и числу щук; тогда для скорости изменения числа карасей получим уравнение $\dot{x}=kx-axy$.

Что касается щук, то без карасей они вымирают: $\dot{y}=-ly$, в присутствии же карасей начинают размножаться со скоростью, пропорциональной числу съеденных карасей: $\dot{y}=-ly+bxy$.

Мы приходим таким образом к системе дифференциальных уравнений простейшей модели системы хищник — жертва:

$$\begin{cases} \dot{x}= kx-axy, \\ \dot{y}=-ly+bxy. \end{cases}$$

Эта модель называется *моделью Лотка — Вольтерра* по имени авторов. Правая часть определяет векторное поле на плоскости: приложенный в точке $(x, y)$ вектор имеет компоненты $(kx-axy, \ -ly+bxy)$. Это — поле фазовой скорости.

Фазовым пространством является угол $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Векторное поле фазовой скорости нетрудно нарисовать, проследив за изменением знаков компонент (рис. 16). Особая точка поля ($x_0 = l/b$, $y_0 = k/a$) отвечает равновесному количеству карасей и щук, когда прирост карасей уравновешивается деятельностью щук, а прирост щук — их естественной смертностью.

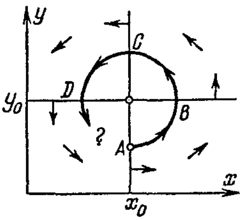


Рис. 16. Поле фазовой скорости модели хищник-жертва.

Если начальное число щук меньше $y_0$ (точка $A$ на рисунке), то числа карасей и щук растут, пока размножившиеся щуки не начнут съедать больше карасей, чем их прирост (точка $B$), затем число карасей начнет убывать, а число щук будет расти, пока нехватка пищи не приведет и щук к вымиранию (точка $C$); затем число щук уменьшится настолько, что караси снова начнут размножаться (точка $D$); начавшееся размножение карасей приведет к тому, что со временем и щуки начнут размножаться. Таким образом будут происходить колебания численности карасей и щук вблизи равновесного числа тех и других.

Возникает, однако, вопрос, будут ли эти колебания периодическими или же нет. Наша приближенная картина поля фазовой скорости не позволяет ответить на этот вопрос, можно вообразить различные случаи, например, изображенные на рис. 17.

Чтобы разобраться в этих случаях, рассмотрим отрезок, соединяющий особую точку с осью $x$. Каждая точка $A$ этого отрезка (не лежащая на оси $x$) определяет фазовую кривую, которая снова пересекает отрезок в некоторой точке $\Phi(A)$. Функция $\Phi$ называется *функцией последования* (или *отображением Пуанкаре*, а также *монодромией* или *голономией*).

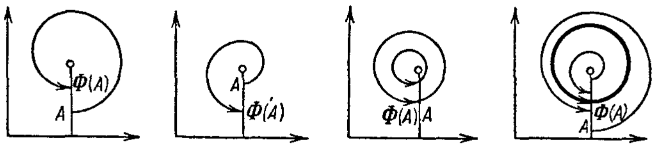


Рис. 17. Функция последования.

Рассмотрим график функции последования. Он называется *диаграммой Ламерея*. Диаграммы Ламерея для четырех случаев рис. 17 изображены на рис. 18.

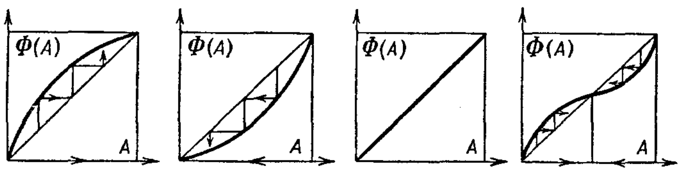


Рис. 18. Диаграммы Ламерея.

По диаграмме Ламерея легко построить последовательность образов точки $A$ при повторении преобразования $\Phi$. Для этого следует построить так называемую *лестницу Ламерея* (рис. 19), абсциссы и ординаты вершин которой суть $A$, $\Phi(A)$, $\Phi^2(A) = \Phi(\Phi(A))$, ...

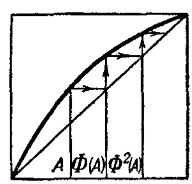


Рис. 19. Лестница Ламерея.

Точки пересечения графика функции последования с диагональю (графиком $\Phi \equiv A$) соответствуют замкнутым фазовым кривым (*циклам*) на фазовой плоскости.

Цикл заведомо устойчив (неустойчив), если в соответствующей точке $A$ имеем $\Phi'(A) < 1$ ($> 1$). Для наших четырех диаграмм Ламерея (рис. 18) в первом случае фазовые кривые — спирали, наматывающиеся на особую точку, во втором — сматывающиеся с нее, в третьем — замкнутые. В четвертом случае фазовые кривые наматываются на устойчивый цикл изнутри и снаружи.

Соответственно, в первом случае с течением времени устанавливается равновесное население пруда, колебания затухают. Во втором случае равновесное состояние неустойчиво, колебания нарастают. При этом наступит момент времени, когда число карасей (щук) будет меньше 1; к этому моменту наша модель становится неприемлемой, и *население пруда вымирает*.

В третьем случае наблюдаются периодические колебания численности карасей и щук вокруг равновесного состояния; амплитуда колебаний определяется начальными условиями.

В четвертом случае тоже наблюдаются периодические колебания численности карасей и щук, но *амплитуда установившихся колебаний не зависит от начальных условий:* любая фазовая спираль наматывается на предельный цикл. В таком случае говорят, что в системе устанавливается *автоколебательный режим*.

Какой же из случаев имеет место для системы Лотка — Вольтерра? Мы пока не можем ответить на этот вопрос (решение его см. в § 2).

**13. Пример: свободная частица на прямой.** Согласно «первому закону» Ньютона, ускорение материальной точки, не подверженной действию внешних сил, равно 0: $\ddot{x}=0$. Если точка $x$ принадлежит $\mathbf{R}$, то говорят о *свободной частице на прямой* (можно представлять себе бусинку на спице).

Фазовое пространство имеет размерность 2, так как все движение определяется начальным положением и начальной скоростью. На фазовой плоскости с координатами $x_1=x,\ x_2=\dot{x}$ возникает векторное поле фазовой скорости:

$$\dot{x}_1=x_2, \qquad \dot{x}_2=0,$$

следовательно, компоненты поля равны $(x_2,\ 0)$ (рис. 20).

Все точки оси $x_1$ являются положениями равновесия. Равновесие такого вида в физике называется *безразличным*, а в математике *неустойчивым* (подходящее сколь угодно малое изменение начальной фазовой точки вызывает через достаточно большое время не малое изменение состояния).

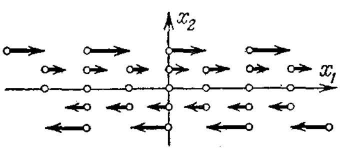


Рис. 20. Поле фазовой скорости свободной частицы.

Фазовые кривые — горизонтальные прямые $x_2=\text{const}$ и все точки оси $x_1$.

Задача 1. Найти решение с начальным условием $(a,\ b)$ при $t_0=0$.

*Ответ.* $\varphi_1(t)=a+bt, \quad \varphi_2(t)=b$.

**14. Пример: свободное падение.** Согласно Галилею, ускорение $g$ падающих вблизи поверхности Земли тел постоянно. Если $x$ — высота, то $\ddot{x}=-g$. Вводя координаты на фазовой плоскости, как в предыдущем примере, получаем систему

$$\dot{x}_1=x_2, \qquad \dot{x}_2=-g.$$

Векторное поле, заданное правой частью, изображено на рис. 21.

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые — параболы.

**15. Пример: малые колебания.** Во многих случаях сила, возвращающая систему в положение равновесия, с большей или меньшей точностью пропорциональна отклонению от положения равновесия (закон Гука и т. п.; сущность дела в том, что в положении равновесия сила 0, а в малом всякая функция приближенно линейна). Мы приходим к *уравнению* *малых колебаний*

$$\ddot{x} = -kx.$$

Коэффициент $k > 0$ можно сделать равным 1 выбором масштаба времени. Уравнение принимает вид

$$\ddot{x} = -x.$$

Вводя по-прежнему координаты $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ на фазовой плоскости, переписываем это уравнение в виде системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1.$$

Правая часть задает векторное поле на фазовой плоскости. Это поле изображено на рис. 22.

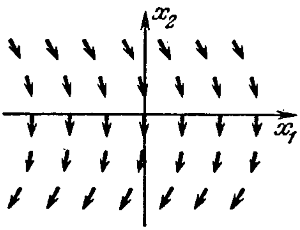


Рис. 21. Поле фазовой скорости падающей частицы.

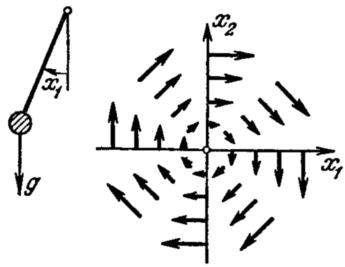


Рис. 22. Поле фазовой скорости малых колебаний.

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые — окружности и их центр.

Решение. Вектор фазовой скорости перпендикулярен радиус-вектору.

Задача 2. Доказать, что фазовая точка движется по окружности с постоянной угловой скоростью 1.

Решение. Длина вектора фазовой скорости равна длине радиус-вектора.

Задача 3. Найти решение с начальным условием $x(0) = a$, $\dot{x}(0) = b$.

Решение. Согласно предыдущим двум задачам, нужно повернуть вектор начального условия на угол $t$. Получаем

$$x_1(t) = a \cos t + b \sin t, \qquad x_2(t) = -a \sin t + b \cos t.$$

Замечание. Таким образом, мы доказали, что $x$ совершает гармонические колебания, и установили «закон сохранения энергии»: величина $x_1^2/2 + x_2^2/2$ вдоль фазовой кривой постоянна.

Задача. 4. Доказать закон сохранения энергии $x_2^2/2 + kx_1^2/2$ для системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -kx_1$.

Замечание. Величина $x_2^2/2$ называется кинетической энергией, а $kx_1^2/2$ — потенциальной.

Задача 5. Доказать, что интегральные кривые системы (с $k = 1$) — винтовые линии.

**16. Пример: математический маятник.** Рассмотрим невесомый стержень длины $l$, закрепленный в одном конце и несущий на другом точечную массу $m$. Обозначим через $\theta$ угол отклонения маятника от вертикали. Согласно законам механики, угловое ускорение маятника $\ddot{\theta}$ пропорционально моменту силы веса (рис. 23):

$$I\ddot{\theta} = -mgl \sin \theta,$$

где $I = ml^2$ — момент инерции (знак минус объясняется тем, что момент стремится уменьшить отклонение).

Итак, уравнение маятника имеет вид $\ddot{\theta} = -k \sin \theta$, $k = g/l$. Коэффициент $k$ можно сделать равным 1 выбором масштаба времени. Уравнение принимает вид $\ddot{\theta} = -\sin \theta$

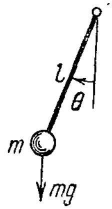


Рис. 23. Математический маятник.

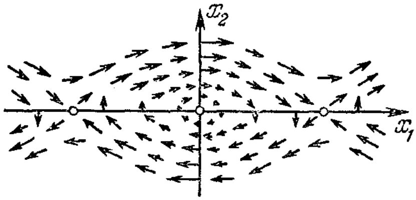


Рис. 24. Поле фазовой скорости маятника.

Фазовое пространство имеет размерность 2. За координаты можно принять угол отклонения $x_1 = \theta$ и угловую скорость $x_2 = \dot{\theta}$. Уравнение принимает вид системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -\sin x_1.$$

Правая часть задает векторное поле фазовой скорости. Оно изображено на рис. 24.

Задача 1. Доказать, что начало координат ($x_1 = x_2 = 0$) и точка ($x_1 = \pi$, $x_2 = 0$) являются фазовыми кривыми.

Вид остальных фазовых кривых мы подробно исследуем в дальнейшем (§ 12).

Замечание. При малых углах отклонения $\sin \theta$ эквивалентен углу $\theta$. Заменяя $\sin \theta$ приближенным значением $\theta$, мы сводим уравнение маятника к уравнению малых колебаний (п. 15). Вопрос о том, насколько выводы, сделанные при исследовании этого простейшего уравнения, переносятся на полное уравнение маятника, нуждается в специальном исследовании. Мы проведем его в дальнейшем (§ 12).

**17. Пример: перевернутый маятник.** Рассмотрим поведение маятника, перевернутого вверх ногами. В этом случае угол $\theta$ близок к $\pi$, поэтому естественно ввести угол отклонения от верхнего положения, $\psi = \theta - \pi$. Тогда $\ddot{\psi} = \sin \psi$ и при малых $\psi$ приближенно

$$\ddot{\psi} = \psi.$$

Это уравнение называется *уравнением «малых колебаний» перевернутого маятника.* Фазовое пространство двумерно. Примем за координаты $x_1 = \psi$, $x_2 = \dot{\psi}$. Получим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1.$$

Векторное поле фазовой скорости изображено на рис. 25. Его фазовые кривые мы подробно исследуем в § 2.

**18. Пример: малые колебания сферического маятника.** Отклонение от вертикали характеризуется двумя числами, $x$ и $y$.

Уравнения малых колебаний имеют, как известно из механики, вид

$$\ddot{x} = -x, \qquad \ddot{y} = -y.$$

Размерность фазового пространства равна 4. За координаты в нем

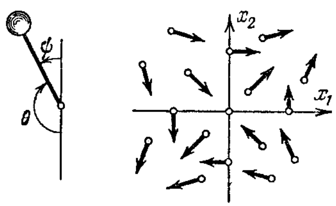


Рис. 25. Поле фазовой скорости перевернутого маятника.

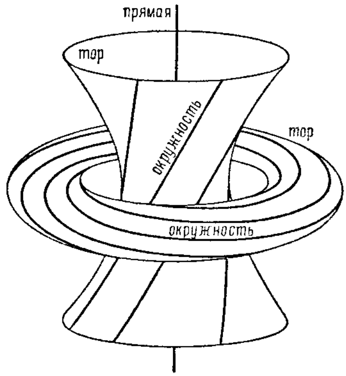


Рис. 26. Фазовые кривые сферического маятника на гиперповерхности постоянной энергии.

принимаем $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$, $x_3 = y$, $x_4 = \dot{y}$. Уравнения записываются в виде

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = -x_1, \ \dot{x}_3 = x_4, \ \dot{x}_4 = -x_3.$$

Правая часть определяет векторное поле в $\mathbf{R}^4$.

Задача 1. Доказать, что фазовые кривые этого поля лежат на трехмерных сферах $x_1^2 + \ldots + x_4^2 = \mathrm{const}$.

Задача 2. Доказать, что фазовые кривые — окружности больших кругов указанных сфер.

Однако окружность не всякого большого круга сферы — фазовая кривая.

Задача* 3. Доказать, что все фазовые кривые на каждой трехмерной сфере сами образуют двумерную сферу.

Трехмерную сферу $S^3$ можно представлять себе как трехмерное пространство $\mathbf{R}^3$, пополненное одной «бесконечно удаленной» точкой. Следовательно, разбиение $S^3$ на окружности определяет разбиение $\mathbf{R}^3$ на окружности и одну незамкнутую кривую («уходящую обоими концами на бесконечность»). Это разбиение изображено на рис. 26.

Задача* 4. Проверить, что любые две из окружностей указанного разбиения зацеплены между собой с коэффициентом зацепления, равным единице (коэффициент зацепления указывает, сколько раз одна из кривых пересекает пленку, затягивающую другую, причем точки пересечения учитываются со знаками).

## § 2. Векторные поля на прямой

В этом параграфе исследуется дифференциальное уравнение, заданное векторным полем на прямой, и сводящиеся к нему уравнения с разделяющимися переменными.

**1. Существование и единственность решений.** Пусть $v$ — гладкая (непрерывно дифференцируемая) функция, заданная на интервале $U$ вещественной оси.

Теорема. *Решение* $\varphi$ *уравнения* $\dot{x}=v(x)$ *с начальным условием* $(t_0, x_0)$

1) *существует для любых* $t_0 \in \mathbf{R}$, $x_0 \in U$;

2) *единственно в том смысле, что любые два решения с общим начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки* $t_0$;

3) *дается формулой Барроу:*

$$t-t_0=\int\limits_{x_0}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{v(\xi)}, \quad \text{если } v(x_0)\neq 0,$$

$$\varphi(t)\equiv x_0, \qquad \text{если } v(x_0)=0.$$

Доказательство. Пусть $x_0$ — не положение равновесия. В § 1 мы видели, что: 1) решение дается в окрестности точки $t_0$ формулой Барроу, 2) определенная этой формулой функция $\varphi$ является решением и удовлетворяет начальному условию.

В случае, когда $x_0$ — положение равновесия, функция $\varphi(t)\equiv x_0$ также очевидно является решением, и теорема доказана.

Задача 1. Указать пробел в доказательстве.

**2. Опровергающий пример.** Пусть $v=x^{2/3}$ (рис. 27). Два решения $\varphi_1=0$, $\varphi_2=(t/3)^3$ удовлетворяют общему начальному условию $(0, 0)$, вопреки утверждению о единственности.

Конечно, функция $v$ не дифференцируема, поэтому пример не опровергает утверждение теоремы. Однако приведенное доказательство не использовало гладкости $v$: оно проходит и в том случае, когда функция $v$ лишь непрерывна. Следовательно, это доказательство не может быть верным. И действительно, утверждение о единственности было доказано лишь при условии $v(x_0)\neq 0$. Мы видим, что если поле $v$ лишь непрерывно (а не дифференцируемо), то единственности решений с начальным условием в положении равновесия может и не быть. Оказывается, *гладкость* $v$ *гарантирует единственность и в этом случае* (см. п. 3 ниже).

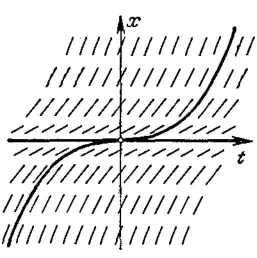

Рис. 27. Пример неединственности.

Приведенный пример можно описать еще так: при движении со скоростью $v(x)=x^{2/3}$ можно попасть в положение равновесия $(x=0)$ из другой точки за конечное время.

В § 1 мы рассмотрели движение в линейном поле (со скоростью $v(x)=kx$). В этом случае для того, чтобы прийти в положение равновесия, требовалось бесконечное время (например, если $v(x)=-x$, то фазовая точка приближается к положению равновесия так медленно, что ей в любой момент оставалось бы до него двигаться время, равное 1, если бы ее скорость перестала меняться в этот момент).

Причина неединственности в случае $v(x)=x^{2/3}$ состоит в том, что скорость недостаточно быстро убывает при подходе к положению равновесия. Из-за этого решение и успевает войти в особую точку за конечное время.

**3. Доказательство единственности.** Предположим, что $\varphi$ — решение уравнения $\dot{x}=v(x)$ с гладкой правой частью $v$. Допустим, что $\varphi(t_0)=x_0$ — положение равновесия, $\varphi(t_1)=x_1$ — не положение равновесия (рис. 28). На отрезке между $t_0$ и $t_1$ рассмотрим ближайший к $t_1$ момент времени $t_2$, в который $v(\varphi(t_2))=0$. Для любой точки $t_3$ между $t_2$ и $t_1$ имеем по формуле Барроу

$$t_3-t_1=\int_{x_1}^{x_3}\frac{d\xi}{v(\xi)},\qquad x_3=\varphi(t_3).$$

*Если функция $v$ гладкая, то интеграл стремится к бесконечности, когда $x_3$ стремится к $x_2$.* Действительно, тангенс угла наклона хорд

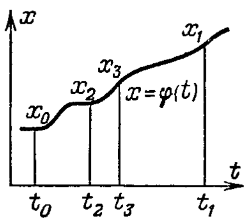


Рис. 28. Доказательство единственности.

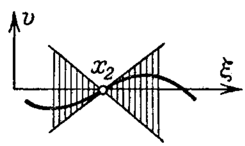


Рис. 29. Условие Липшица.

графика гладкой на отрезке функции ограничен (рис. 29), поэтому $|v(\xi)|\leqslant k|\xi-x_2|$, где постоянная $k$ не зависит от точки $\xi$ отрезка $[x_1, x_2]$ (условие ограниченности наклона хорд графика функции называют *условием Липшица*, а число $k$ — *постоянной Липшица*). Итак,

$$|t_3-t_1|\geqslant\left|\int_{x_1}^{x_3}\frac{d\xi}{k(\xi-x_2)}\right|.$$

Последний интеграл легко вычислить, он стремится к бесконечности, когда $x_3$ стремится к $x_2$. В этом легко убедиться и не вычисляя интеграла: ведь он равен времени движения между двумя точками в линейном поле, а это время стремится к бесконечности, когда одна из точек стремится к положению равновесия.

Итак, число $|t_2-t_1|$ больше любого наперед заданного числа. Чисел, больших любого, не бывает. Следовательно, решение с начальным условием в положении равновесия не может принимать значений, не являющихся положениями равновесия. Стало быть, если $\varphi(t_0)$ — положение равновесия, то $v(\varphi(t)) \equiv 0$ при всех $t$. Следовательно, $\dot{\varphi} \equiv 0$, т. е. $\varphi$ — константа. Единственность доказана.

Заметим, что основным в приведенном доказательстве было сравнение движения в гладком поле $v$ с более быстрым движением в подходящем линейном поле. Для последнего движения время входа в положение равновесия бесконечно, следовательно, оно тем более бесконечно для более медленного движения в исходном поле.

Задача 1. Могут ли интегральные кривые гладкого уравнения $\dot{x} = v(x)$ сближаться при $t \to \infty$ быстрее, чем экспоненциально?

*Ответ.* Нет, если одна из них отвечает положению равновесия; да — в противном случае.

Задача 2. Верна ли теорема единственности в случае, когда производная функции $v$ существует, но разрывна?

*Ответ.* Да.

Задача 3. Показать, что для единственности решения с начальным условием $x_0$ достаточна расходимость в $x_0$ интеграла $\int\limits_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{v(\xi)}$.

Задача 4. Показать, что для единственности достаточно, чтобы функция $v$ удовлетворяла условию Липшица $|v(x) - v(y)| \leqslant k\,|x - y|$ при всех $x$, $y$.

Задача 5. Доказать единственность удовлетворяющего начальному условию $\varphi(t_0) = x_0$ решения уравнения $\dot{x} = v(t, x)$, где $v$ — гладкая функция.

Указание. Заменой $x$ на $x - \varphi(t)$ свести решение к нулевому и затем сравнить поле направлений с подходящим линейным. Это сравнение доказывает единственность при любой размерности фазового пространства.

Задача 6. Доказать, что фазовые кривые системы хищник — жертва (§ 1, п. 12) не пересекают координатные оси (например, первоначально положительное число карасей не может со временем стать отрицательным).

Задача 7. Доказать, что всякие два решения уравнения $\dot{x} = v(x)$ с гладкой $v$, удовлетворяющие общему начальному условию, совпадают всюду, где оба определены.

**4. Прямые произведения.** Рассмотрим два дифференциальных уравнения:

$$\dot{x}_1 = v_1(x_1), \qquad x_1 \in U_1; \tag{1}$$

$$\dot{x}_2 = v_2(x_2), \qquad x_2 \in U_2. \tag{2}$$

*Прямым произведением* этих уравнений называется система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = v_1(x_1), \\ \dot{x}_2 = v_2(x_2), \end{cases} \tag{3}$$

фазовым пространством которой является прямое произведение $U$ фазовых пространств уравнений (1) и (2). Из определения непосредственно вытекает

Теорема. *Решения $\varphi$ дифференциального уравнения* (3), *являющегося прямым произведением уравнений* (1) *и* (2), *— это отображения $\varphi\colon I \to U$ вида $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))$, где $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — решения уравнений* (1) *и* (2), *определенные на одном и том же интервале.*

В частности, пусть фазовые пространства $U_1$ и $U_2$ одномерны. Тогда мы умеем решать каждое из уравнений (1) и (2). Следовательно, мы можем явно решить и систему двух дифференциальных уравнений (3).

А именно, по теореме п. 5 § 1 решение $\varphi$ с условием $\varphi(t_0)=x_0$ можно найти в окрестности точки $t=t_0$ из соотношений

$$\int\limits_{x_{1,0}}^{\varphi_1(t)} \frac{d\xi}{v_1(\xi)}=t-t_0=\int\limits_{x_{2,0}}^{\varphi_2(t)} \frac{d\xi}{v_2(\xi)} \quad (x_0=(x_{1,0},\ x_{2,0})),$$

если $v_1(x_{1,0})\neq 0\neq v_2(x_{2,0})$.

Если $v_1(x_{1,0})=0$, то первое соотношение заменяется на $\varphi_1\equiv x_{1,0}$, а если $v_2(x_{2,0})=0$, то второе — на $\varphi_2=x_{2,0}$. Наконец, если $v_1(x_{1,0})=v_2(x_{2,0})=0$, то $x_0$ — особая точка векторного поля $v$ и положение равновесия системы (3): $\varphi(t)\equiv x_0$.

**5. Примеры прямых произведений.** Рассмотрим систему двух уравнений

$$\dot{x}_1=x_1, \quad \dot{x}_2=kx_2.$$

Задача 1. Нарисовать соответствующие векторные поля на плоскости при $k=0,\ \pm 1,\ 1/2,\ 2$.

Мы уже решили каждое из двух уравнений в отдельности. Итак, решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ имеет вид

$$\varphi_1=x_{1,0}e^{(t-t_0)}, \quad \varphi_2=x_{2,0}e^{k(t-t_0)}. \tag{4}$$

Следовательно, вдоль каждой фазовой кривой $x=\varphi(t)$ имеем либо

$$|x_2|=C|x_1|^k, \tag{5}$$

где $C$ — постоянная, не зависящая от $t$, либо $x_1\equiv 0$.

Задача 2. Является ли кривая на фазовой плоскости $(x_1,\ x_2)$, заданная уравнением (5), фазовой кривой?

*Ответ.* Нет.

Семейство кривых (5), где $C\in\mathbf{R}$, имеет разный вид в зависимости от значения параметра $k$. Если $k>0$, то это — семейство «парабол*)

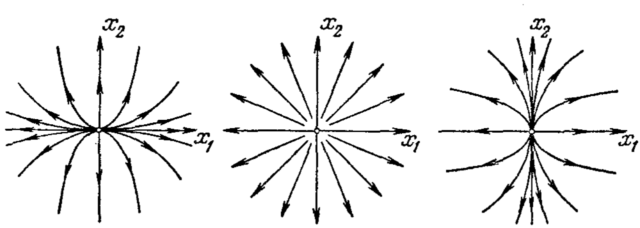


Рис. 30. Узлы: фазовые кривые систем $\dot{x}_1=x_1$, $\dot{x}_2=kx_2$ для $k>1$, $k=1$ и $0<k<1$

с показателем $k$». Такие параболы касаются оси $x_1$, если $k>1$, или оси $x_2$, если $k<1$ (рис. 30; при $k=1$ получается семейство прямых,

*) Настоящие параболы получаются лишь при $k=2$ и $k=1/2$.

проходящих через начало координат). Расположение фазовых кривых, изображенное на рис. 30, называется *узлом*. При $k<0$ кривые (5) имеют вид гипербол (рис. 31) *) и образуют в окрестности начала координат *седло*. При $k=0$ кривые (5) превращаются в прямые (рис. 32).

Из формул (4) видно, что каждая фазовая кривая лежит целиком в одном квадранте (или на координатной полуоси, или совпадает с началом координат, которое при всех $k$ является фазовой кривой). Стрелки на рисунках указывают направление движения точки $\varphi(t)$ при возрастании $t$.

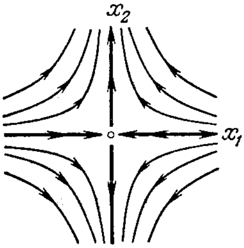


Рис. 31 Седло: фазовые кривые системы $\dot{x}_1=x_1$, $\dot{x}_2=kx_2$, $k<0$.

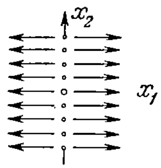


Рис. 32. Фазовые кривые системы $\dot{x}_1=x_1$, $\dot{x}_2=0$.

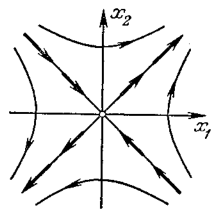


Рис. 33. Фазовые кривые перевернутого маятника.

Задача 3. Докажите, что каждая из парабол $x_2=x_1^2$ $(k=2)$ состоит из трех фазовых кривых. Опишите все фазовые кривые при других значениях $k$ $(k>1$, $k=1$, $0<k<1$, $k=0$, $k<0)$.

Интересно проследить, как один рисунок переходит в другой при непрерывном изменении $k$.

Задача 4. Нарисуйте узел, соответствующий $k=0{,}01$, и седло, соответствующее $k=-0{,}01$.

Задача 5. Решить уравнение перевернутого маятника $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=x_1$ и нарисовать фазовые кривые.

Решение. Введем на фазовой плоскости новые координаты: $X=x_1+x_2$, $Y=x_1-x_2$. Система распадается в прямое произведение: $\dot{X}=X$, $\dot{Y}=-Y$. На плоскости $(X, Y)$ фазовые кривые образуют седло, как на рис. 31. Следовательно, на плоскости $(x_1, x_2)$ также получаем седло (рис. 33). Отсюда, в частности, следует, что *при данном отклонении маятника от вертикали существует одна и только одна начальная скорость, при которой он асимптотически приближается к верхнему положению равновесия при* $t\to+\infty$ (соответствующая фазовая кривая — прямолинейный луч, входящий в 0). При меньшей или большей начальной скорости маятник падает либо не дойдя до верхнего положения равновесия, либо перевалившись через него (соответствующие фазовые кривые — половины гипербол).

Решения имеют вид $X=X_0e^t$, $Y=Y_0e^{-t}$, откуда $x_1=Ae^t+Be^{-t}=a\operatorname{ch}t+b\operatorname{sh}t$, $x_2=Ae^t-Be^{-t}=a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t$.

## 6. Уравнения с разделяющимися переменными.

Определение. *Уравнением с разделяющимися переменными* называется уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(y)}{g(x)}. \qquad (6)$$

Мы будем предполагать, что $f$ и $g$ — гладкие функции, не обращающиеся в 0 в рассматриваемой области.

*) Настоящие гиперболы получаются лишь при $k=-1$.

Рассмотрим наряду с этим уравнением систему

$$\dot{x} = g(x), \quad \dot{y} = f(y). \tag{7}$$

Теорема. *Фазовые кривые системы* (7) *являются интегральными кривыми уравнения* (6), *и, обратно, интегральные кривые уравнения* (6) *являются фазовыми кривыми системы.*

Доказательство. Тангенс угла наклона вектора фазовой скорости к оси $x$ есть $f(y)/g(x)$. Значит, фазовая кривая системы в каждой своей точке касается поля направлений уравнения.

Обратно, пусть дана интегральная кривая уравнения (6). Тогда на ней можно выбрать параметр $t$ так, что параметрическое уравнение кривой будет $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, причем функция $\varphi$ — решение уравнения $\dot{x} = g(x)$ (здесь используется условие $g \neq 0$). Вторая координата $\psi$ точки с параметром $t$ удовлетворяет тогда соотношению $(d\psi/dt)/(d\varphi/dt) = f(\psi(t))/g(\varphi(t))$, т. е. является решением уравнения $\dot{y} = f(y)$. Следовательно, наша кривая — фазовая кривая системы.

Теорема. *Решение уравнения* (6) *с начальным условием* $(x_0, y_0)$ *существует, единственно* *) *и дается формулой*

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{g(\xi)} = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f(\eta)}.$$

Доказательство. Это следует из предыдущей теоремы и формул для решения уравнений $\dot{x} = g(x)$ и $\dot{y} = f(y)$ с начальными условиями $(t_0, x_0)$ и $(t_0, y_0)$ соответственно.

Замечание. «Мнемоническое» правило решения уравнения с разделяющимися переменными состоит в том, чтобы рассматривать и левую, и правую части уравнения как дроби и перенести «все члены с $x$ в одну сторону, а все члены с $y$ в другую»:

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{dy}{f(y)}. \tag{8}$$

После этого «приравнивание интегралов» дает искомое соотношение между $x$ и $y$ в виде равенства $\int \frac{dx}{g(x)} = \int \frac{dy}{f(y)} + C$ для первообразных или в указанном в теореме виде — для определенных интегралов.

Разумеется, это «мнемоническое» правило является, при его правильном понимании, вполне строгим выводом формулы для решения. Действительно, соотношение (8) означает *равенство значений двух дифференциальных форм на любом векторе, касающемся интегральной кривой уравнения* (6) (и обратно, кривая, все касательные векторы которой удовлетворяют соотношению (8), является интегральной для уравнения (6)).

Интегралы форм в левой и в правой частях уравнения (8) по одному отрезку интегральной кривой уравнения (6) равны (так как в определении интеграла вдоль кривой участвуют лишь значения формы на касательных векторах кривой, а на этих векторах значения форм совпадают). Наконец, интеграл формы $dx/g(x)$ вдоль отрезка кривой

*) В том смысле, что всякие два такие решения совпадают там, где оба определены.

равен обычному интегралу функции $1/g$ вдоль проекции этого отрезка на ось $x$, и аналогично для формы $dy/f(y)$.

Формула (8) называется иногда *симметричной формой* записи уравнения (6).

Задача 1. Нарисовать интегральные кривые уравнений $dy/dx = y/x$, $x/y$, $-y/x$, $-x/y$.

Задача 2. Нарисовать интегральные кривые уравнений $dy/dx = kx^{\alpha}y^{\beta}$, $\sin y/\sin x$, $\sin x/\sin y$.

Задача 3. Нарисовать фазовые кривые уравнения маятника $\dot{x} = y$, $\dot{y} = -\sin x$. Указание. Рассмотреть уравнение с разделяющимися переменными $dy/dx = -(\sin x)/y$.

**7. Пример: модель Лотка — Вольтерра.** В п. 12 § 1 мы рассматривали простейшую модель взаимодействия $y$ хищников (щук) и $x$ жертв (карасей):

$$\dot{x} = kx - axy, \quad \dot{y} = -ly + bxy. \tag{9}$$

Но мы не смогли нарисовать фазовые кривые.

Теорема. *Фазовые кривые системы* (9) *замкнутые* (рис. 34).

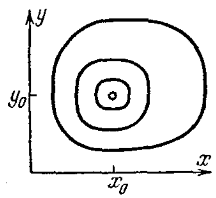


Рис. 34. Фазовые кривые модели Лотка — Вольтерра.

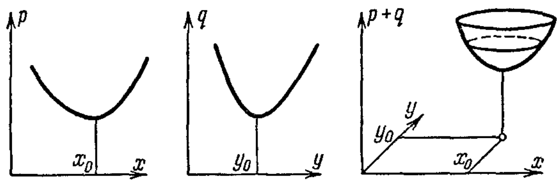


Рис. 35. Построение фазовых кривых модели Лотка — Вольтерра.

Доказательство. Фазовые кривые системы (9) совпадают с интегральными кривыми уравнения с разделяющимися переменными $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(bx-l)}{x(k-ay)}$ или с фазовыми кривыми уравнения-произведения

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{x}{bx-l}, \quad \frac{dy}{d\tau} = \frac{y}{k-ay}$$

(в области, где $x$, $y$, $bx-l$ и $k-ay$ отличны от 0).

Следовательно, $\displaystyle\int \frac{k-ay}{y}\,dy = \int \frac{bx-l}{x}\,dx + C$, или $p(x) + q(y) = C$, где $p = bx - l\ln x$, $q = ay - k\ln y$. Графики функций $p$ и $q$ имеют вид ям. Поэтому и график функции $p+q$ имеет вид ямы (рис. 35). Следовательно, линии уровня функции $p+q$ — замкнутые кривые. Легко проверить, что фазовые кривые уравнения (9) не только принадлежат линиям уровня $p+q$, но и совпадают с ними; теорема доказана.

Из замкнутости фазовых кривых следует, что количества карасей и щук в модели Лотка — Вольтерра меняются со временем периодически. Период колебаний зависит от начального условия.

Задача 1. Докажите, что период колебаний в модели Лотка — Вольтерра (9) стремится к бесконечности, когда начальное условие приближается к точке (0, 0).

Замечание. Математическое стремление к бесконечности нужно отличать от физического. Например, $1/\varepsilon$ при $\varepsilon \to 0$ действительно стремится к $\infty$ (например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ величина $1/\varepsilon$ действительно велика). В то же время $|\ln \varepsilon|$ при $\varepsilon \to 0$ практически остается ограниченным (например, при $\varepsilon = 10^{-6}$ это величина порядка 10). Практически с логарифмами в асимптотиках часто можно обращаться как с константами.

Задача 2. Как стремится к бесконечности период колебаний в модели Лотка — Вольтерра (9), когда начальное условие имеет вид $(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon \to 0$?

*Ответ.* Логарифмически.

Рассмотрим некоторые выводы из наших вычислений.

Для системы Лотка — Вольтерра (9).

1) Существует (и единственно при $x > 0$, $y > 0$) положение равновесия $(x_0, y_0)$.

2) Количества карасей и щук при неравновесных начальных условиях меняются со временем периодически.

3) Фазовые кривые системы (9) замкнуты.

Заметим, что наша модель вряд ли может претендовать на вполне точное описание действительности, даже если оставаться в рамках двумерного фазового пространства. Например, даже в отсутствие щук при большом числе карасей скорость размножения должна уменьшаться, иначе карасям не хватит пруда, и т. д. Мы можем думать поэтому, что более точная модель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = x(k - ay + \varepsilon f(x, y)), \\ \dot{y} = y(-l + bx + \varepsilon g(x, y)), \end{cases} \tag{$9_\varepsilon$}$$

где $x\varepsilon f$ и $y\varepsilon g$ — отброшенные при идеализации малые поправки к нашей модели (поправка в $\dot{x}$ делится на $x$, так как скорость размножения карасей равна 0, если их число равно 0; по этой же причине поправка в $\dot{y}$ делится на $y$). Мы будем считать $f$ и $g$ гладкими функциями (строго говоря, здесь и далее рассматривается ограниченная часть фазовой плоскости, так как для малости поправок при очень больших значениях координат нет оснований).

Мы будем называть свойство модели (9) *грубым*, если оно (или аналогичное ему близкое свойство) имеет место и для всякой системы $(9_\varepsilon)$, при достаточно малых $\varepsilon$.

Рассмотрим с этой точки зрения сделанные выше выводы 1)—3).

Теорема. *У системы* $(9_\varepsilon)$ *имеется гладко зависящее от малого* $\varepsilon$ *положение равновесия* $x(\varepsilon)$, $y(\varepsilon)$ *такое, что* $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ — *положение равновесия системы* (9).

Доказательство. По теореме о неявной функции система уравнений относительно $x$, $y$

$$F(x, y, \varepsilon) = 0, \qquad G(x, y, \varepsilon) = 0$$

имеет гладко зависящее от малого $\varepsilon$ решение $(x(\varepsilon), y(\varepsilon))$, обращающееся в $(x_0, y_0)$ при $\varepsilon = 0$, если отличен от нуля якобиан $J = D(F, G)/D(x, y)|_{(x_0, y_0, 0)}$.

В нашем случае $F = k - ay + \varepsilon f$, $G = -l + bx + \varepsilon g$, следовательно, $J = \begin{vmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{vmatrix} \neq 0$, что и требовалось доказать.

Итак, вывод 1) груб: положение равновесия имеется не только у системы (9), но и у всякой близкой системы ($9_\varepsilon$).

Напротив, выводы 2) и 3) негрубы. Действительно, функция последования для системы (9) имеет вид $\Phi(A) \equiv A$. Для близкой системы ($9_\varepsilon$) график функции последования будет близким к диагонали, но не обязательно будет совпадать с ней. В зависимости от вида возмущений $f$ и $g$ диаграмма Ламерея может быть расположена выше или ниже диагонали или пересекать ее в одной или нескольких точках, соответствующих устойчивым и неустойчивым циклам.

Следовательно, *выводы о замкнутости фазовых кривых и периодичности колебания численности карасей и щук с амплитудой, зависящей от начальных условий, не грубы*, хотя у близкой системы ($9_\varepsilon$) каждый виток фазовой кривой и близок к замкнутому циклу, он не замыкается в точности, и через большое время (порядка $1/\varepsilon$) устанавливается, например, автоколебательный режим (фазовая кривая наматывается на предельный цикл).

Свойство системы иметь предельный цикл уже является устойчивым относительно малых возмущений системы уравнений. Точнее, предположим, что цикл соответствует неподвижной точке $A = \Phi(A)$ функции последования $\Phi$ и что $\Phi'(A) \neq 1$. В таком случае цикл называется *невырожденным*.

*Если система, заданная векторным полем $v_0$, имеет невырожденный предельный цикл, проходящий через $A_0$, то всякая близкая система (заданная полем $v_\varepsilon$, $\varepsilon$ мало́) имеет близкий цикл (проходящий через близкую к $A_0$ точку $A_{(\varepsilon)}$).*

Для доказательства нужно применить теорему о неявной функции к уравнению $\Phi(A, \varepsilon) = A$, $A(0) = A_0$.

Следовательно, *вывод о наличии в системе автоколебаний, описываемых невырожденным предельным циклом, груб*: во всякой близкой системе будут близкие автоколебания.

Заметим, что вырожденные предельные циклы могут исчезать при малом шевелении системы. Однако они появляются неустранимым малым шевелением образом в том случае, когда рассматривается не отдельная система, а семейство систем, зависящих от параметра. В этом случае при отдельных значениях параметра могут сливаться между собой различные циклы, причем аналогичное слияние будет иметь место при некотором близком значении параметра и в любом близком семействе. В момент слияния двух невырожденных циклов и возникает вырожденный цикл. При этом, вообще говоря, из двух сливающихся циклов один устойчивый, а другой неустойчивый. Вырожденные циклы, возникающие при слиянии двух невырожденных, представляют интерес потому, что они всегда встречаются на границе области существования колебательного режима в пространстве параметров.

Например, на рис. 36 изображены диаграммы Ламерея при трех очень близких значениях параметра (кривые 1, 2 и 3). Диаграмма 1 пересекает биссектрису в двух точках; в этом случае в системе имеется два предельных цикла, устойчивый внутри неустойчивого (рис. 37). Положение равновесия неустойчиво; вся область внутри неустойчивого цикла является областью притяжения («бассейном») устойчивого цикла: при начальных условиях в этой области (исключая лишь положение равновесия) в системе устанавливаются автоколебания, изображаемые устойчивым циклом.

Кривая 2 соответствует критическому значению параметра: устойчивый цикл сливается с неустойчивым и становится вырожденным. Фазовые кривые, начинающиеся в ограниченной циклом области, стремятся к циклу при возрастании времени. Однако устанавливающийся при этом колебательный режим неустойчив: сколь угодно малое случайное изменение способно выбросить фазовую точку за пределы цикла.

При дальнейшем изменении параметра (кривая 3) цикл исчезает вовсе. Таким образом, слияние циклов приводит к скачкообразному изменению поведения системы: устойчивый автоколебательный режим с конечной областью притяжения внезапно исчезаст. Движения с начальным условием в бассейне исчезающего цикла уходят после его исчезновения в другие области фазового пространства (рис. 37). В нашем примере после перехода параметра через критическое значение в популяциях хищников и жертв сколь угодно малое отклонение начальных условий от равновесных приводит к неограниченному нарастанию колебаний и, следовательно, к вымиранию.

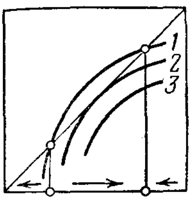


Рис. 36. Перестройка диаграмм Ламерея.

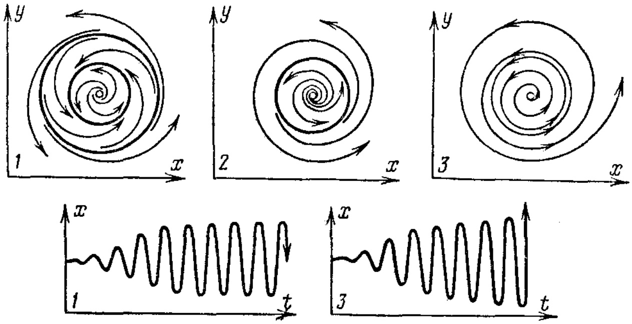


Рис. 37. Перестройка фазового портрета и поведения решений.

Перестройки качественной картины движения при изменении параметров изучает *теория бифуркаций* (бифуркация = раздвоение), а приложения теории бифуркаций к исследованию скачкообразных реакций механических, физических, химических, биологических, экономических и иных систем на плавное изменение внешних условий получили в последнее время название *теории катастроф*.

Из рисунка 36 видно, что когда значение параметра отличается от критического значения на малую величину $\Delta$, расстояние между устойчивым и неустойчивым циклами порядка $\sqrt{\Delta}$. Следовательно, скорость сближения циклов при изменении параметра быстро растет по мере приближения параметра к критическому значению: в самый момент катастрофы оба цикла движутся навстречу друг другу с бесконечной скоростью. Это объясняет, почему так трудно предотвратить грозящую катастрофу потери устойчивости системы, когда уже сделались заметными ее признаки.

Задача 3. Исследовать бифуркации циклов при изменении параметра $c$ в системе, заданной в полярных координатах уравнениями

$$\dot{r} = cr - r^3 + r^5, \qquad \dot{\varphi} = 1.$$

*Ответ*. При $c=0$ из положения равновесия $r=0$ рождается устойчивый цикл радиуса порядка $\sqrt{c}$; при $c=1/4$ он исчезает, слившись с неустойчивым.

Замечание. Можно показать, что рождение или смерть цикла в положении равновесия, как и рождение или смерть пары циклов — типичное явление, встречающееся при изменении параметра в общих однопараметрических семействах дифференциальных уравнений.

Устойчивые предельные циклы описывают установившиеся периодические колебания системы, находящейся в стационарных внешних условиях. Колебания, описываемые устойчивыми циклами, называются *автоколебаниями*, в отличие от *вынужденных* колебаний, вызванных периодическими внешними воздействиями и от колебаний типа свободных колебаний маятника. Возникновение автоколебаний само по себе довольно удивительно, но они встречаются, например, в таких системах, как часы, паровая машина, электрический звонок, сердце, радиопередатчик, переменные звезды типа цефеид — работа каждого из этих устройств описывается предельным циклом в соответствующем фазовом пространстве.

Однако не следует думать, что все колебательные процессы описываются предельными циклами: в многомерном фазовом пространстве возможно гораздо более сложное поведение фазовых кривых. Примерами могут служить прецессия гироскопа, движение планет и их спутников и их вращение вокруг своих осей (непериодичность этих движений ответственна за сложность календаря и трудность предвычисления приливов), а также движение заряженных частиц в магнитных полях (ответственное за возникновение полярных сияний). Мы рассмотрим простейшие движения этого рода в § 24 и § 25 п. 6. В системах с многомерным фазовым пространством фазовые кривые могут даже вместо цикла приближаться к множеству, на котором все близкие траектории быстро

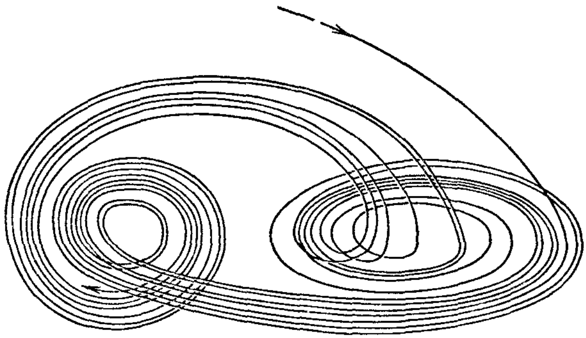

Рис. 38. Аттрактор с разбеганием фазовых кривых на нем.

расходятся друг от друга (рис. 38). Такие притягивающие множества получили в последнее время название *странных аттракторов*: они связаны с явлениями типа турбулентности и ответственны, например, за невозможность долгосрочного прогноза погоды.

## § 3. Линейные уравнения

Линейные уравнения описывают влияние малых изменений начальных условий или правых частей произвольных уравнений на их решения. Здесь явно решаются и исследуются линейные однородные и неоднородные уравнения с одним зависимым переменным: появляются оператор монодромии, $\delta$-функция, функция Грина и вынужденные колебания.

### 1. Линейные однородные уравнения.

Определение. *Линейным однородным уравнением первого порядка* называется уравнение

$$dy/dx = f(x)y, \qquad (1)$$

правая часть которого — линейная (однородная) функция одномерного зависимого переменного, $y$.

Это частный случай уравнения с разделяющимися переменными. Решая его по общему правилу, находим $dy/y = f(x)\,dx$, $\ln(y/y_0) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi$. Из этого вытекает

Теорема. *Всякое решение уравнения* (1) *продолжается на весь интервал определения функции* $f$; *решение с начальным условием* $(x_0, y_0)$ *дается формулой* $y = y_0 e^{\int_{x_0}^{x} f(\xi)\,d\xi}$.

Замечание 1. Пусть $y=\varphi(x)$ — решение уравнения (1). Тогда для любой константы $c$ функция $y=c\varphi(x)$ — тоже решение. Сумма двух (определенных на всем интервале определения $f$) решений уравнения (1) тоже является решением. Поэтому все такие решения линейного однородного уравнения (1) образуют *линейное пространство*. Размерность этого линейного пространства равна 1 (почему?).

Замечание 2. Растяжения расширенного фазового пространства $(x, y)$ вдоль оси $y$ переводят поле направлений линейного однородного уравнения (1) в себя. Поэтому *интегральные кривые под действием растяжений оси $y$ переходят друг в друга*; все они могут быть получены из одной из них такими растяжениями (рис. 39).

Линейные уравнения занимают в теории дифференциальных уравнений особое место, потому что, согласно одной из основных идей анализа, всякая гладкая функция в окрестности каждой точки хорошо аппроксимируется линейной функцией. Возникающая таким образом операция *линеаризации* и приводит к линейным уравнениям в качестве первого приближения при исследовании произвольного уравнения вблизи какого-либо решения.

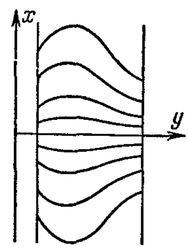


Рис. 39. Интегральные кривые линейного уравнения.

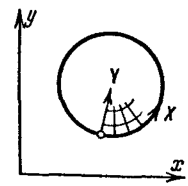


Рис. 40. Система координат вблизи цикла.

Рассмотрим, например, автономную систему с двумерной фазовой плоскостью $(x, y)$, имеющую предельный цикл (рис. 40). Введем в окрестности цикла координаты $(X \bmod T,\ Y)$ так, чтобы уравнение цикла приняло вид $Y=0$, а обход цикла в направлении фазовой скорости соответствовал бы увеличению $X$ на $T$. Тогда фазовые кривые исходной системы при отображении $(x, y)\mapsto(X, Y)$ перейдут в интегральные кривые уравнения вида

$$dY/dX=a(X,\ Y),\ \text{где}\ a(X,\ 0)\equiv 0,\qquad a(X+T,\ Y)\equiv a(X,\ Y). \tag{2}$$

Линеаризация этого уравнения по $Y$ в точке $Y=0$ приводит к линейному уравнению

$$dY/dX=f(X)\,Y,\ \text{где}\ f(X)=\partial a/\partial Y|_{Y=0}.$$

Заметим, что функция $f$ имеет период $T$.

Мы приходим таким образом к задаче об исследовании линейного уравнения с периодическим коэффициентом $f$.

## 2. Линейные однородные уравнения первого порядка с периодическими коэффициентами.

Определение. *Линейными однородными уравнениями первого порядка с $T$-периодическими коэффициентами* называются уравнения

$$dY/dX=f(X)\,Y,\ \text{где}\ f(X+T)\equiv f(X). \tag{3}$$

Решения уравнения (3) определяют линейное отображение оси $Y$ в себя, сопоставляющее значению $\varphi(0)$ при $X=0$ значение $\varphi(T)$ того же решения при $X=T>0$. Это отображение $A$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ называется *моно-*

*дромией* (рис. 41). (Мы собираемся использовать аналогичный оператор и в многомерном случае.)

Теорема. *Оператор монодромии* $A$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *линейного уравнения* (3) *линейный и является оператором умножения на положительное число* $\lambda$. *Если это число* $\lambda$ (*называемое мультипликатором*) *больше* 1, *то все ненулевые решения стремятся к бесконечности при* $X\to+\infty$, *а если меньше* 1, *то к нулю; если* $\lambda=1$, *то все решения ограничены.*

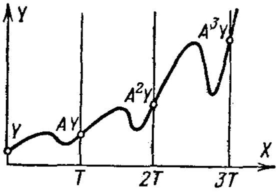


Рис. 41. Оператор монодромии.

Доказательство. Линейность $A$ вытекает из того, что растяжения по оси $Y$ переводят интегральные кривые в интегральные кривые; $\lambda>0$, т. е. ось $X$ — интегральная кривая. Сдвиги на $T$ вдоль оси $X$ также переводят интегральные кривые в интегральные кривые (ввиду периодичности $f$). Из этого следует, что значения решения с начальным условием $\varphi(0)=Y$ при $X=T, 2T, 3T, \ldots$ равны $\lambda Y$, $\lambda^2 Y$, $\lambda^3 Y, \ldots$; поэтому $\varphi(NT)\to\infty$ при $N\to+\infty$, если $\lambda>1$, и $\varphi(NT)\to 0$ при $N\to+\infty$, если $\lambda<1$. Кроме того, сдвигая расширенное фазовое пространство на $NT$ вдоль оси $X$, находим

$$\varphi(NT+S)=\lambda^n\varphi(S),$$

откуда следуют все доказываемые утверждения (почему?).

Замечание. Из теоремы п. 1 следует формула для мультипликатора

$$\ln\lambda=\int_0^T f(\xi)\,d\xi.$$

Таким образом, *мультипликатор больше единицы или меньше единицы, в зависимости от того, положительно или отрицательно среднее значение функции* $f$.

В первом случае нулевое решение линейного уравнения (3) неустойчиво, а во втором — устойчиво (более того, решения с близкими к 0 начальными условиями стремятся к 0); в случае $\lambda=1$ решения с ненулевыми начальными условиями периодичны (рис. 42).

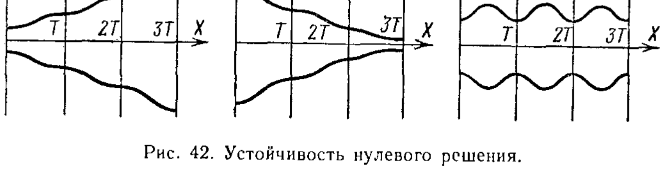


Рис. 42. Устойчивость нулевого решения.

Возникает естественный вопрос, какое отношение наша теорема о решениях линеаризованного уравнения (3) имеет к исходной задаче о поведении решений нелинейного уравнения (2), т. е. к задаче о фазовых кривых, близких к циклу?

Задача 1. Доказать, что если $\lambda>1$, то цикл неустойчив и фазовые кривые, начавшиеся вблизи цикла, являются разматывающимися спиралями, удаляющимися от него;

если $\lambda < 1$, то цикл устойчив и фазовые кривые, начавшиеся в его окрестности, являются наматывающимися на цикл спиралями.

Иными словами, в случаях, когда мультипликатор отличен от 1, линеаризация приводит к правильному суждению об устойчивости цикла. С другой стороны, если $\lambda = 1$, то, хотя решения уравнения (3) и периодичны, было бы неверно распространять этот вывод с линеаризованного уравнения (3) на исходное уравнение (2), для которого близкие к $Y=0$ решения, вообще говоря, не периодичны, и об устойчивости цикла нельзя судить по линеаризованному уравнению.

Указание. Рассмотреть функцию последования $\Phi$, заданную решениями $\varphi$ уравнения (2) и сопоставляющую начальному условию $Y=\varphi(0)$ при $X=0$ значение $\Phi(Y)=\varphi(T)$. Доказать, что линеаризация $\Phi$ в точке $Y=0$ есть оператор монодромии.

Задача 2. Исследовать устойчивость предельного цикла $r=1$ для системы, заданной в полярных координатах уравнениями

$$\dot{r}=(r^2-1)(2x-1), \quad \dot{\varphi}=1 \qquad (\text{где } x=r\cos\varphi).$$

### 3. Линейные неоднородные уравнения.

Определение. *Линейным неоднородным уравнением первого порядка* называется уравнение

$$dy/dx=f(x)\,y+g(x). \tag{4}$$

Под решением понимается решение, определенное на всем интервале определения функций $f$ и $g$.

Теорема. *Если известно одно частное решение линейного неоднородного уравнения, $y=\varphi_1(x)$, то все остальные решения имеют вид $y=\varphi_1(x)+\varphi_0(x)$, где $\varphi_0$ — решение однородного уравнения* (1); *всякая функция указанного вида удовлетворяет неоднородному уравнению* (4).

Доказательство. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$ — линейный оператор (рис. 43). Решения $\varphi_0$ однородного уравнения $A\varphi_0=0$ образуют линейное пространство $\operatorname{Ker} A \subset L_1$. Образ $\operatorname{Im} A = AL_1$ образует линейное подпространство в $L_2$. Если $g \in \operatorname{Im} A$, то решения неоднородного уравнения $A\varphi = g$ образуют в $L_1$ аффинное подпространство $\varphi_1 + \operatorname{Ker} A$, параллельное $\operatorname{Ker} A$. В нашем случае $A\varphi = d\varphi/dx - f\varphi$. Это линейный оператор*), поэтому утверждение нашей теоремы вытекает из алгебраической теоремы о решении линейного неоднородного уравнения.

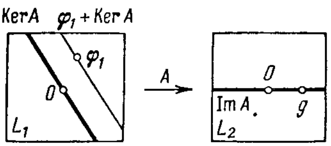

Рис. 43. Пространство решений линейного неоднородного уравнения

Для нахождения частного решения можно воспользоваться методом «вариации постоянных».

Метод вариации постоянных часто употребляется при изучении влияния всевозможных возмущений. Рассмотрим, например, движение планет вокруг Солнца. В первом приближении, не учитывая притяжения планет друг другом, мы приходим к независимому движению планет по кеплеровым эллипсам. Это — решение невозмущенных уравнений движения.

*) Пространства $L_1$ и $L_2$ можно выбирать по-разному. Например, можно считать, что $L_1$ — один раз непрерывно дифференцируемые, а $L_2$ — непрерывные функции.

Учет возмущающего влияния планет друг на друга можно провести так: считать, что планеты совершают кеплерово движение, но параметры кеплеровых эллипсов слегка меняются со временем *). Таким образом, величины, бывшие постоянными в невозмущенном движении, рассматриваются теперь как функции времени.

Дифференциальные уравнения, описывающие изменения (вариации) этих постоянных, часто бывает проще решать или исследовать, чем исходные уравнения. В частности, в применении к линейным неоднородным уравнениям, где роль невозмущенной задачи играет однородное уравнение, а роль возмущения — неоднородность, метод вариации постоянных приводит к явной формуле для решения. В этом случае никакой малости возмущения не требуется.

Мы уже знаем, что всякое решение однородного уравнения (1) имеет вид $y=c\varphi(x)$, где $c$ — произвольная постоянная, а $\varphi$ — какое-либо ненулевое решение. Постараемся подобрать функцию $c=c(x)$ так, чтобы $y=c(x)\varphi(x)$ было решением неоднородного уравнения (4).

Теорема. *Решение линейного неоднородного уравнения* (4) *с начальным условием* $y(x_0)=0$ *существует, единственно и дается формулой*

$$y=\int_{x_0}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} f(\zeta)\,d\zeta} g(\xi)\,d\xi. \tag{5}$$

Доказательство. Подстановка $y=c(x)\varphi(x)$ в (4) дает

$$c'\varphi+c\varphi'=fc\varphi+g.$$

Но $\varphi$ — решение однородного уравнения (1). Значит, $\varphi'=f\varphi$ и

$$c'=g/\varphi, \qquad c(x)=\int_{x_0}^{x} g(\xi)/\varphi(\xi)\,d\xi.$$

Подставляя вместо $\varphi$ известное решение однородного уравнения, получаем (после внесения $\varphi(x)$ под интеграл) формулу (5), что и требовалось доказать.

**4. Функция влияния и $\delta$-образные неоднородности.** Формула (5) имеет простой «физический смысл», который выясняется следующим образом. Очевиден

Принцип суперпозиции. *Если $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — решения линейных неоднородных уравнений $A\varphi_1=g_1$ и $A\varphi_2=g_2$, то $\varphi_1+\varphi_2$ — решение уравнения $A\varphi=g_1+g_2$.*

Этот принцип позволяет при расчете влияния всевозможных возмущений разделять разные возмущения, вычислять их влияние по одному и складывать эффекты возмущения (например, если бросить в воду два камня, то можно независимо рассчитать волны от каждого из них и сложить возмущения; при полете снаряда можно независимо вносить поправки на ветер и на отклонение плотности воздуха от табличной, и т. д.).

*) Например, колебания эксцентриситета орбиты Земли — одна из причин наступления ледников.

В применении к нашему неоднородному уравнению (4) роль возмущения играет функция $g$. Постараемся представить функцию $g$ в виде линейной комбинации «элементарных возмущений»; тогда решение будет такой же линейной комбинацией решений уравнений с элементарными возмущениями в качестве неоднородности $g$.

Определение. *$\delta$-образной последовательностью* называется последовательность $h_N$ неотрицательных гладких функций, равных 0 вне стремящихся к 0 при $N \to \infty$ окрестностей и обладающих каждая интегралом, равным единице.

Пример такой последовательности легко построить (рис. 44). Физики говорят, что «предел последовательности $h_N$ есть $\delta$-функция Дирака, равная нулю всюду, кроме точки 0, и имеющая интеграл 1».

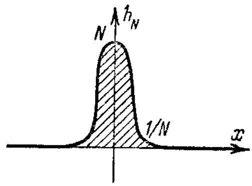

Рис. 44. $\delta$-образная последовательность.

Конечно, функции $\delta$ с такими свойствами не существует.

Тем не менее многие величины, в определение которых входят функции $h_N$, при $N \to \infty$ стремятся к определенным пределам, которые и называются соответствующими величинами, вычисленными для $\delta$-функции. Например, для любой непрерывной функции $g$

$$\lim_{N \to \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_N(x)\, g(x)\, dx = g(0)$$

(докажите!). Поэтому по определению

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, g(x)\, dx = g(0).$$

Точно так же, сдвигая все $h_N$ на $\xi$ по оси $x$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-\xi)\, g(x)\, dx = g(\xi),$$

т. е. $\delta(\cdot - \xi)$ есть «$\delta$-функция, сосредоточенная в точке $\xi$».

Последнюю формулу можно также воспринимать как представление любой гладкой функции $g$ в виде «континуальной линейной комбинации» $\delta$-функций, сосредоточенных в разных точках $x$, с коэффициентами, равными значениями $g$ в этих точках.

Таким образом, произвольную неоднородность $g$ в уравнении (4) можно разложить в континуальную линейную комбинацию «сосредоточенных в точке» неоднородностей вида сдвинутых $\delta$-функций. Согласно принципу суперпозиции, для нахождения частного решения уравнения (4) с произвольной неоднородностью достаточно знать это решение для $\delta$-образной неоднородности.

Определение. Решение уравнения

$$dy/dx = f(x)\, y + \delta(x-\xi), \qquad \xi > 0,$$

с начальным условием $y(0)=0$ называется *функцией влияния возму-*

*щения в момент* $\xi$ *на решение в момент* $x$ (или *функцией Грина**)) и обозначается так: $y=G_{\xi}(x)$.

Теорема. *Функция Грина дается формулой*

$$G_{\xi}(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x<\xi,\\ e^{\int\limits_{\xi}^{x} f(\zeta)\,d\zeta} & \text{при } x>\xi.\end{cases} \tag{6}$$

Замечание. Как объяснено выше, речь идет о пределе последовательности решений уравнений

$$dy/dx=f(x)\,y+h_N(x-\xi), \tag{7}$$

где $\{h_N\}$ есть $\delta$-образная последовательность, при $N\to\infty$.

Эвристическое доказательство. При $x<\xi$ решение равно нулю, так как неоднородность исчезает. При $x>\xi$ решение совпадает с некоторым решением однородного уравнения, так как неоднородность исчезает. При $x$, близких к $\xi$, второе слагаемое в правой части уравнения (7) велико по сравнению с первым, поэтому интеграл от $dy/dx$ по малой окрестности точки $\xi$ почти равен числу

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} h_N(x-\xi)\,dx=1.$$

Переходя к пределу при $N\to\infty$, видим, что скачок решения $y(x)$ при переходе $x$ через точку $\xi$ равен 1, т. е. при $x>\xi$ функция $G_{\xi}$ переменной $x$ есть решение однородного уравнения с начальным условием $y(\xi)=1$, что и требовалось доказать.

Это рассуждение можно сделать вполне строгим, но проще провести следующее

Математическое доказательство. Подставляя вместо $g$ сдвинутую на $\xi$ функцию $h_N$ в формулу (5) для решения уравнения (4) и переходя к пределу при $N\to\infty$, получаем требуемое:

$$G_{\xi}(x)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{x_0}^{x} e^{\int\limits_{\nu}^{x} f(\zeta)\,d\zeta} h_N(\nu-\xi)\,d\nu=e^{\int\limits_{\xi}^{x} f(\zeta)\,d\zeta},$$

если $x_0<\xi<x$.

Следствие. *Решение неоднородного уравнения* (4) *с неоднородностью* $g$ *и с нулевым начальным условием выражается через функцию влияния по формуле* $y(x)=\int\limits_{0}^{x} G_{\xi}(x)\,g(\xi)\,d\xi$ *при* $x>0$.

Конечно, эта формула эквивалентна формуле (5) (ввиду (6)).

Задача 1. Решить уравнение $dy/dx=y+h_N$, где $h_N(x)=N$ при $|x-1|<1/2N$, 0 при $|x-1|\geqslant 1/2N$, с начальным условием $y(0)=0$, и найти предел решения при $N\to\infty$.

*) Эта функция называется также *запаздывающей функцией Грина*, во избежание смешения с функциями Грина краевых задач для уравнений выше первого порядка, которых мы тут не касаемся.

**5. Линейные неоднородные уравнения с периодическими коэффициентами.**

Теорема. *Если в уравнении*

$$dy/dx = f(x)\,y + g(x)$$

*с периодической (периода $T > 0$ по $x$) правой частью среднее по периоду значение $f$ отлично от нуля, то уравнение имеет $T$-периодическое решение, и притом ровно одно (устойчивое, если среднее значение отрицательно, и неустойчивое, если оно положительно,* рис. 45).

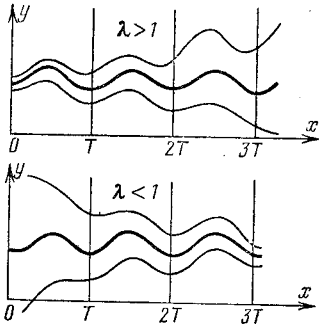

Рис. 45. Установление вынужденного колебания.

Доказательство. Рассмотрим отображение за период, сопоставляющее начальному условию $\varphi(0)$ решения $\varphi$ значение $\varphi(T)$ того же решения в момент $T$. Это отображение — линейное неоднородное (почему?); оно имеет вид $\varphi(T) = \lambda\varphi(0) + C$, где $\lambda$ — мультипликатор однородного уравнения. Логарифм $\lambda$ равен интегралу $f$ по периоду. Следовательно, $\lambda \neq 1$, если среднее значение $f$ не 0, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Таким образом *при $\lambda < 1$ в системе после некоторого «переходного процесса» устанавливается, независимо от начального условия, вполне определенный колебательный режим.* Возникающие здесь колебания называются *вынужденными*, они вызваны периодическим внешним воздействием на систему, т. е. функцией $g$.

Задача 1. Найти периодическое решение уравнения

$$dy/dx = -y + \sin x$$

и исследовать его устойчивость.

Замечание. Линейные неоднородные уравнения естественно возникают в тех случаях, когда мы исследуем влияние малых возмущений начального условия и одновременно малых возмущений *правой части* дифференциального уравнения на решение (пренебрегая величинами выше первого порядка малости относительно возмущений). Неоднородность $g$ в уравнении (4) отвечает именно за возмущение *уравнения.*

Например, при малом возмущении векторного поля в окрестности предельного цикла с отличным от 1 мультипликатором цикл не исчезает, но лишь немного деформируется; периодическое решение соответствующего линейного неоднородного уравнения дает первое приближение к этой деформации цикла.

Задача 2. Пусть гладкая функция $\varphi(t, \varepsilon)$ — решение уравнения $\dot{x} = v(t, x; \varepsilon)$, зависящего от параметра $\varepsilon$, обращающееся в решение $\varphi_0(t)$ уравнения $\dot{x} = v(t, x; 0)$ при $\varepsilon = 0$. Докажите, что производная решения по параметру, $\psi(t) = \partial\varphi/\partial\varepsilon|_{\varepsilon=0}$, удовлетворяет линейному неоднородному уравнению $\dot{\psi}=f(t)\psi+g(t)$, где $f$ и $g$ — значения $\partial v/\partial x$ и $\partial v/\partial \varepsilon$ при $\varepsilon=0$, $x=\varphi_0(t)$. Это уравнение называется (неоднородным) *уравнением в вариациях*, так как $\psi$ описывает малую вариацию решения под действием малого изменения уравнения, отвечающего $\varepsilon=0$.

## § 4. Фазовые потоки

Математическая формализация понятия детерминированного процесса приводит к понятию однопараметрической группы преобразований. Здесь определяются и исследуются однопараметрические группы диффеоморфизмов и их связи с векторными полями. Нам потребуется некоторая алгебраическая терминология. Все теоремы этого параграфа в сущности очевидны.

**1. Действие группы на множестве.** *Преобразованием* множества называется его взаимно однозначное отображение на себя.

Задача 1. Какие из трех следующих отображений — преобразования:

1) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto e^x$; 2) $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $x\mapsto x^3$; 3) $\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, $z\mapsto z^2$.

*Ответ*. Только второе.

*Произведением* $fg$ преобразований $f$ и $g$ одного множества называется преобразование, получающееся последовательным применением сначала $g$, потом $f$, т. е. $(fg)(x)=f(g(x))$.

Задача 2. Приведите пример, когда $fg$ не совпадает с $gf$.

*Обратное* к $f$ преобразование $f^{-1}$ определяется условием: если $f$ переводит $x$ в $y$, то $f^{-1}$ переводит $y$ в $x$.

Набор преобразований множества называется *группой преобразований*, если вместе с каждым преобразованием в него входит обратное преобразование и с каждыми двумя преобразованиями — их произведение.

Задача 3. Является ли группой преобразований равностороннего треугольника набор из трех отражений в его высотах?

Задача 4. Сколько элементов в группе изометрий *) равностороннего треугольника, в группе вращений тетраэдра?

*Ответ*. 6, 12.

Понятие группы преобразований — одно из самых фундаментальных для всей математики и одновременно одно из самых простых: человеческому мозгу свойственно мышление в терминах инвариантов групп преобразований (это связано как с устройством зрения, так и с нашей способностью к абстракции).

Пусть $A$ — группа преобразований множества $X$. Умножение и обращение определяют отображения $A\times A\to A$ и $A\to A$ (пара $(f, g)$ переходит в $fg$, элемент $g$ в $g^{-1}$). Множество $A$, снабженное этими двумя отображениями, называется *абстрактной группой* (или, короче, просто группой). Таким образом *группа* получается из *группы преобразований* просто *забыванием* преобразуемого множества.

*) Изометрия — это преобразование, сохраняющее расстояния (так что расстояние между образами любых двух точек равно расстоянию между точками).

Задача 5. Докажите, что множество $\mathbf{R}$ всех вещественных чисел становится группой, если снабдить его операциями обычного сложения чисел и изменения знака.

Алгебраисты обычно определяют группу как множество с двумя операциями, удовлетворяющими набору аксиом вроде $f(gh)=(fg)h$. Эти аксиомы автоматически выполняются для групп преобразований. В действительности эти аксиомы означают просто, что группа образована из некоторой группы преобразований забыванием преобразуемого множества. Такие аксиомы, наряду с другими немотивированными определениями, служат математикам главным образом для того, чтобы затруднить непосвященным овладение своей наукой и тем повысить ее авторитет.

Пусть $G$ — группа, $M$ — множество. Говорят, что задано *действие группы $G$ на множестве $M$*, если каждому элементу $g$ группы $G$ сопоставлено преобразование $T_g: M \to M$ множества $M$, причем произведению любых двух элементов группы сопоставлено произведение соответствующих этим элементам преобразований, а взаимно обратным элементам сопоставлены взаимно обратные преобразования: $T_{fg}=T_fT_g$, $T_{g^{-1}}=(T_g)^{-1}$.

Каждая группа преобразований множества, естественно, действует на этом множестве ($T_g \equiv g$), но может действовать и на других множествах. Например, рассмотрим равносторонний треугольник. Группа из шести его изометрий действует на множестве из двух его ориентаций: вращения не переставляют, а отражения переставляют ориентации.

Задача 6. Какие перестановки трех осей координат осуществляются при действии на их множество группы изометрий куба $\max(|x|, |y|, |z|) \leqslant 1$?

*Ответ.* Все 6.

Задача 7. Как действует группа линейных замен координат на множестве матриц линейных операторов из пространства в себя?

*Ответ.* $T_g m = gmg^{-1}$.

Преобразование $T_g$ называется также *действием элемента $g$ группы $G$ на $M$*. Действие группы $G$ на $M$ определяет еще отображение $T$: $G \times M \to M$, сопоставляющее паре $g \in G$, $m \in M$ точку $T_g m$.

Если действие $T$ фиксировано, то результат $T_g m$ действия элемента $g$ группы $G$ на точку $m$ множества $M$ короче обозначают просто через $gm$. Таким образом, $(fg)m = f(gm)$, поэтому скобок обычно не пишут вовсе.

Зафиксируем точку $m$ множества $M$ и будем действовать на нее всеми элементами группы $G$. Мы получим подмножество $\{gm,\ g \in G\}$ множества $M$. Это подмножество называется *орбитой точки $m$* (при данном действии группы) и обозначается $Gm$.

Задача 8. Найти орбиты группы вращений плоскости вокруг нуля.

Задача 9. Докажите, что любые две орбиты одного действия либо не пересекаются, либо совпадают.

Задача 10. Сколько орбит имеет действие группы изометрий тетраэдра на множестве неупорядоченных пар его ребер?

Задача 11. Сколько раскрасок шести граней куба шестью красками 1, ..., 6 существенно различны (не переводятся друг в друга вращениями куба)?

*Ответ.* $6!/24=30$.

Отображение $\varphi$: $G \to H$ группы $G$ в группу $H$ называется *гомоморфизмом*, если оно переводит произведение в произведение и взаимно обратные элементы во взаимно обратные:

$$\varphi(fg)=\varphi(f)\varphi(g), \quad \varphi(g^{-1})=(\varphi(g))^{-1}.$$

Действие группы $G$ на множестве $M$ — это гомоморфизм группы $G$ в группу всех преобразований множества $M$.

**2. Однопараметрические группы преобразований.** Группа называется *коммутативной* (или *абелевой*), если произведение не зависит от порядка сомножителей: $fg=gf$ для любых двух элементов группы.

Пример 1. Группа всех изометрий равностороннего треугольника неабелева.

Пример 2. Группа всех сдвигов вещественной оси абелева.

Операция в абелевой группе обычно обозначается знаком $+$.

Например, последовательное выполнение сдвигов на $a$ и на $b$ в любом порядке есть сдвиг на $a+b$. Поэтому множество всех вещественных чисел с операцией сложения является абелевой группой; естественное действие этой группы на прямой сопоставляет числу $a$ сдвиг на $a$.

Определение. *Однопараметрической группой преобразований множества* называется действие на нем группы всех вещественных чисел.

Замечание. Действия группы всех целых чисел $\mathbf{Z}$ иногда называют «однопараметрическими группами с дискретным временем». Для такого действия $T_n=(T_1)^n$, поэтому вся группа состоит из степеней одного преобразования.

Однопараметрическая группа преобразований множества $M$ обычно обозначается знаком $\{g^t\}$. Здесь $g^t$: $M\to M$ — преобразование, соответствующее точке $t$ из $\mathbf{R}$.

Таким образом, однопараметрическая группа преобразований множества $M$ — это набор преобразований $g^t$, запараметризованных вещественным параметром $t$, такой, что для любых вещественных чисел $s$ и $t$

$$1)\ g^{s+t}=g^s g^t,\quad 2)\ g^{-t}=(g^t)^{-1}.$$

Параметр $t$ обычно называется *временем*, преобразование $g^t$ называется *преобразованием за время* $t$.

Пример 1. $M=\mathbf{R}$, $g^t$ — сдвиг на $2t$ (т. е. $g^t x=x+2t$). Свойства 1) и 2) очевидны.

Пример 2. $M=\mathbf{R}$, $g^t$ — растяжение в $e^t$ раз (т. е. $g^t x=e^t x$). Свойства 1) и 2) очевидны. Обозначение $g^t$ — в память об этом примере.

Пример 3. $M=\mathbf{R}$, $g^t x=x+\sin t$. Свойство 2) выполнено, а 1) — нет; $\{g^t\}$ — не однопараметрическая группа.

Замечание. Из свойства 1) очевидно следует, что $g^0$ — тождественное преобразование, оставляющее каждую точку на месте. Поэтому свойство 2) вытекает из 1). Свойство 1) называется *групповым свойством*.

Однопараметрическая группа преобразований множества — это математический эквивалент физического понятия «двусторонне детерминированный процесс». Пусть $M$ — фазовое пространство процесса. Точка этого пространства — это определенное состояние процесса. Предположим, что в момент $t=0$ процесс был в состоянии $x$. Тогда в другой момент $t$ состояние процесса будет иным. Обозначим это новое состояние процесса через $g^t x$. Мы определили для каждого $t$ отображение $g^t$: $M\to M$

фазового пространства процесса в себя. Отображение $g^t$ переводит состояние в момент 0 в состояние в момент $t$. Оно называется *преобразованием за время* $t$.

Отображение $g^t$ действительно является преобразованием (взаимно однозначным отображением *на*). Это следует из того, что, по определению детерминированности, каждое состояние однозначно определяет как будущее, так и прошлое процесса. Групповое свойство также выполнено. Действительно, пусть процесс в начальный момент находился в состоянии $x$. Переход к состоянию в момент $t+s$ можно осуществить либо сразу ($x \mapsto g^{t+s}x$), либо сначала рассмотреть промежуточное состояние $g^tx$, в которое процесс придет за время $t$, а потом посмотреть, куда это промежуточное состояние сдвинется за время $s$. Совпадение результатов ($g^{t+s}x = g^sg^tx$) означает, что переход из начального состояния в конечное за фиксированное время происходит всегда одинаково, независимо от того, в какой момент времени мы выходим из начального состояния.

Однопараметрическая группа преобразований множества $M$ называется также *фазовым потоком* с фазовым пространством $M$ (можно представлять себе фазовое пространство заполненным жидкостью, частица $x$ через время $t$ переходит в точку $g^tx$).

Орбиты фазового потока называются его *фазовыми кривыми* (или *траекториями*).

Пример. Пусть $g^t$ — поворот плоскости на угол $t$ вокруг 0. Очевидно, групповое свойство выполнено. Орбиты фазового потока $\{g^t\}$ — точка 0 и окружности с центром 0.

Точки, являющиеся фазовыми кривыми, называются *неподвижными точками* потока.

**3. Однопараметрические группы диффеоморфизмов.** Предположим теперь, что рассматриваемое множество $M$ наделено структурой гладкого многообразия. Примерами гладких многообразий являются: 1) любая область в евклидовом пространстве; 2) сфера; 3) тор. Общее определение дано в гл. 5. Пока можно считать, что речь идет об области евклидова пространства.

*Диффеоморфизмом* называется отображение, гладкое вместе со своим обратным. (Отображение называется гладким, если координаты точки-образа — гладкие функции координат точки прообраза, и обратно.)

Задача 1. Какие из функций ., $-x$, $x^2$, $x^3$, $\operatorname{arctg} x$ задают диффеоморфизм прямой на себя?

*Ответ.* Только первые две.

Определение. *Однопараметрической группой диффеоморфизмов* называется однопараметрическая группа преобразований, являющихся диффеоморфизмами, удовлетворяющая еще следующему условию: $g^tx$ гладко зависит от обоих аргументов, $t$ и $x$.

Пример 1. $M = \mathbf{R}$, $g^t$ — умножение на $e^{kt}$.

Пример 2. $M = \mathbf{R}^2$, $g^t$ — поворот вокруг 0 на угол $t$.

Замечание. Условие гладкой зависимости от времени $t$ необходимо для того чтобы избавиться от патологических примеров, вроде следующего: пусть $\{\alpha\}$ — базис группы $\mathbf{R}$, т. е. такой набор вещественных чисел, что каждое вещественное число однозначно представимо в виде конечной линейной комбинации чисел набора с целыми коэффициентами. Сопоставим каждому числу $\alpha$ из базиса сдвиг прямой на какое-либо расстояние, совершенно не заботясь о других элементах базиса. Полагая $g^{\alpha_1+\ldots+\alpha_k}=g^{\alpha_1}\ldots g^{\alpha_k}$, мы получим однопараметрическую группу преобразований, каждое из которых — сдвиг прямой и, следовательно, диффеоморфизм, однако $g^t$ в общем случае зависит от $t$ не гладко и даже разрывно.

Вместо гладкости по $t$ можно было бы требовать одной лишь непрерывности (из чего гладкость уже вытекает), но нам это не нужно.

Определение. *Однопараметрической группой линейных преобразований* называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов, являющихся линейными преобразованиями.

Пример. Рассмотрим на плоскости с координатами $(x, y)$ преобразование $g^t(x, y)=(e^{\alpha t}x, e^{\beta t}y)$.

Ясно, что $g^t$ — линейное преобразование (за время $t$ ось $x$ растягивается в $e^{\alpha t}$ раз, а ось $y$ — в $e^{\beta t}$ раз).

Групповое свойство, $g^{t+s}=g^t g^s$, вытекает из свойства экспоненты $(e^{u+v}=e^u e^v)$, гладкая зависимость от $t$ также очевидна. Итак, $\{g^t\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости.

Пусть, в частности, $\alpha=1$, $\beta=2$ (рис. 46). В этом случае фазовые кривые — неподвижная точка нуль, половины координатных осей и половины парабол; действие одного из преобразований фазового потока

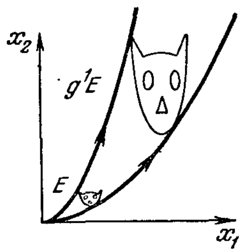


Рис. 46. Действие фазового потока на область.

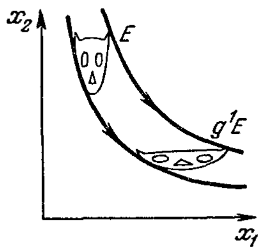


Рис. 47. Гиперболический поворот.

на область $E$ изображено на рис. 46. Площади областей увеличиваются при действии $g^t$ в $e^{3t}$ раз.

Рассмотрим еще случай $\alpha=1$, $\beta=-1$ (рис. 47). В этом случае преобразование $g^t$ состоит из сжатия в $e^t$ раз в направлении оси $y$ и растяжения в $e^t$ раз в направлении оси $x$. Такое преобразование называется *гиперболическим поворотом*, так как фазовые кривые потока $\{g^t\}$ — половины гипербол $xy=\mathrm{const}$ (конечно, положение равновесия 0 и половины осей координат — также фазовые кривые). Гиперболические повороты сохраняют площади, хотя и сильно искажают форму фигур (рис. 47).

Заметим, что наша однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости распадается в «прямое произведение» двух однопараметрических групп линейных преобразований прямых (а именно растяжений осей).

Задача 2. Всякая ли однопараметрическая группа линейных преобразований плоскости распадается подобным образом?

Указание. Рассмотрите повороты или сдвиги $(x, y) \mapsto (x+ty, y)$.

**4. Векторное поле фазовой скорости.** Рассмотрим однопараметрическую группу $\{g^t\}$ диффеоморфизмов области $M$.

Определение. *Вектором фазовой скорости потока* $\{g^t\}$ *в точке* $x$ *из* $M$ называется скорость выхода точки $g^t x$ из $x$, т. е.

$$v(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (g^t x).$$

Векторы фазовой скорости потока во всех точках области $M$ образуют гладкое векторное поле (так как $g^t x$ гладко зависит от $t$ и $x$). Оно называется *полем фазовой скорости.*

Задача 1. Найти поля фазовых скоростей потоков на прямой $g^t x = x+t$, $e^t x$, $e^{-t} x$.

*Ответ.* $v(x) = 1$, $x$, $-x$.

Задача 2. Неподвижные точки потока являются особыми точками поля фазовой скорости, т. е. вектор фазовой скорости обращается в них в нуль. Верно ли обратное?

*Ответ.* Да, ср. п. 3 § 2.

Зафиксируем точку $x_0$ и рассмотрим ее движение под действием фазового потока $g^t$. Иными словами, рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbf{R} \to M$, определенное так: $\varphi(t) = g^t x_0$.

Теорема. *Отображение* $\varphi$ *является решением уравнения* $\dot{x} = v(x)$ *с начальным условием* $\varphi(0) = x_0$.

Иными словами: *под действием фазового потока фазовая точка движется так, что вектор ее скорости в каждый момент времени равен вектору фазовой скорости в той точке фазового пространства, где движущаяся точка находится.*

Доказательство. Это вытекает из группового свойства:

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=\tau} g^t x = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g^{\tau+\varepsilon} x = \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} g^{\varepsilon}(g^{\tau} x) = v(g^{\tau} x).$$

Таким образом, *с каждой однопараметрической группой диффеоморфизмов связано дифференциальное уравнение* (заданное векторным полем фазовой скорости); решениями этого уравнения являются движения фазовых точек под действием фазового потока.

Задача 3. Верно ли обратное, т. е. всякое ли решение дается формулой $\varphi(t) = g^t x_0$?

*Ответ.* Да, по теореме единственности (§ 2, п. 3).

Если фазовый поток описывает ход какого-либо процесса при произвольных начальных условиях, то дифференциальное уравнение, заданное его векторным полем фазовой скорости, определяет *локальный закон эволюции процесса*; теория дифференциальных уравнений должна, зная этот закон эволюции, восстановить прошлое и предсказать будущее.

Формулировка какого-либо закона природы в виде дифференциального уравнения сводит любую задачу об эволюции процесса (физического, химического, экологического и т. д.) к *геометрической* задаче о поведении фазовых кривых данного векторного поля в соответствующем фазовом пространстве.

Определение. *Фазовым потоком дифференциального уравнения* $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$ называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов, для которой $\boldsymbol{v}$ является векторным полем фазовой скорости.

Чтобы найти фазовый поток уравнения, достаточно решить последнее: $g^t x_0$ есть значение в момент $t$ решения $\varphi$ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$.

Примеры. Фазовый поток уравнения $\dot{x} = kx$ есть группа $\{e^{kt}\}$. Фазовый поток уравнения малых колебаний маятника ($\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1$) состоит из поворотов плоскости на угол $t$. Фазовый поток уравнения малых колебаний перевернутого маятника ($\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = x_1$) состоит из гиперболических поворотов.

Задача 4. Найти фазовые потоки дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = 0, \quad 1, \quad x - 1; \qquad \dot{x} = \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

*Ответ.* $g^t x = x$, $x + t$, $(x - 1)e^t + 1$; $2 \operatorname{arcctg}(e^{-t} \operatorname{ctg} x/2)$.

Задача 5. Найти фазовые потоки систем

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = 1; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = \sin y, \\ \dot{y} = 0. \end{cases}$$

*Ответ*: $(x + ty, y)$, $(x + ty + t^2/2, y + t)$, $(x + t \sin y, y)$.

Возникает вопрос, *всякое ли гладкое векторное поле является полем фазовой скорости потока*?

Ответ на этот вопрос — отрицательный.

Пример 1. Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = 1$ с фазовым пространством $0 < x < 1$. Ясно, что преобразование $g^t$ может быть только сдвигом на $t$, но при $t \neq 0$ такой сдвиг не переводит фазовое пространство в себя.

Пример 2. Рассмотрим случай $v(x) = x^2$, $x \in \mathbf{R}$. Решение уравнения $\dot{x} = v(x)$ с начальным условием $x_0$ при $t = 0$ нетрудно найти явно:

$$dx/x^2 = dt, \qquad -1/x = t + C, \qquad C = -1/x_0, \qquad x = x_0/(1 - x_0 t).$$

Итак, $g^t x = x/(1 - tx)$. Нетрудно проверить, что $g^{t+s} = g^t g^s$, так что на первый взгляд мы нашли фазовый поток.

К сожалению, отображение $g^t$ ни при каком $t$, кроме нуля, не является диффеоморфизмом прямой (оно даже не всюду определено). Поэтому *поле $v(x) = x^2$ не является полем фазовой скорости никакой однопараметрической группы диффеоморфизмов прямой.*

Замечание. Причина, по которой оба приведенных поля не имеют фазовых потоков, заключается в некомпактности фазового пространства. В дальнейшем мы увидим, что гладкое векторное поле на компактном многообразии всегда определяет фазовый поток. В частности, поле $v(x) = x^2$ на аффинной прямой можно продолжить до гладкого на всей проективной прямой (включая бесконечно удаленную точку) векторного поля. Проективная прямая компактна (топологически это окружность), и гладкое векторное поле на ней определяет фазовый поток. Найденные нами формулы для отображений $g^t$ как раз и описывают этот поток: $g^t$ есть диффеоморфизм проективной прямой, а не аффинной!

Задача 6. Докажите, что всякое гладкое векторное поле на прямой, растущее на бесконечности не быстрее линейного ($|v(x)| \leqslant a+b|x|$) является полем фазовой скорости однопараметрической группы диффеоморфизмов прямой.

Указание. Сравнив движение с более быстрым движением в подходящем линейном поле, доказать, что решение не может уйти на бесконечность за конечное время и, следовательно, продолжается на всю ось $t$.

Задача 7. Определяет ли фазовый поток на прямой уравнение $\dot{x}=e^x \sin x$?

*Ответ.* Да.

Задача 8. Рассмотрим линейное пространство всех многочленов $p$ степени меньше $n$ от переменной $x$. Определим преобразование за время $t$ как сдвиг аргумента многочлена на $t$ (т. е. $(g^t p)(x) \equiv p(x+t)$). Докажите, что $\{g^t\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований, и найдите ее векторное поле фазовой скорости.

*Ответ.* Вектор поля в точке $p$ есть многочлен $dp/dx$.

## § 5. Действие диффеоморфизмов на векторные поля и на поля направлений

Основной метод решения и исследования дифференциальных уравнений — это подбор подходящей замены переменных, т. е., в геометрических терминах, подходящего диффеоморфизма, упрощающего данное векторное поле или поле направлений. Здесь мы приводим формальные определения необходимых понятий. Мы начнем с напоминания некоторых простых сведений из дифференциального исчисления.

**1. Действие гладких отображений на векторы.** При рассмотрении всевозможных математических объектов полезно наряду с объектами рассматривать также отображения *). Напомню определение действия гладких отображений на векторы.

Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение области $M$ линейного пространства в область $N$ линейного пространства, и пусть $v$ — вектор, приложенный в точке $x$ области-прообраза $M$, т. е. стрелочка с началом $x$ (рис. 48). Тогда в точке-образе $f(x)$ области $N$ также возникает вектор, обозначаемый через $f_{*x}v$ и называемый *образом вектора $v$ при отображении $f$*. А именно

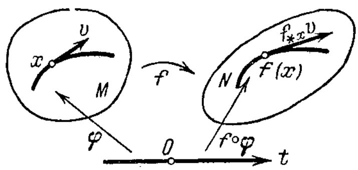


Рис. 48. Действие гладкого отображения на вектор.

Определение. *Образом вектора $v$ при отображении $f$* называется вектор скорости, с которой движущаяся точка $f(\varphi(t))$ выходит из точки $f(x)$, когда движущаяся точка $\varphi(t)$ выходит из точки $x$ со скоростью $v$:

$$f_{*x}v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f(\varphi(t)), \text{ где } \varphi(0)=x, \quad \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi(t)=v. \qquad (1)$$

Иными словами, стрелочка $v$ снижается в 1000 раз, затем под действием $f$ превращается в изогнутую стрелочку, затем последняя

*) В этом состоит так называемая «категорная» точка зрения. Грубо говоря, категория — это совокупность объектов и отображений (пример: категория всех линейных пространств и их линейных отображений друг в друга).

растягивается в 1000 раз и наконец 1000 устремляется к бесконечности.

Задача 1. Докажите, что образ вектора $v$ не зависит от выбора движения $\varphi$, лишь бы точка $\varphi(t)$ выходила из $x$ со скоростью $v$.

Решение. Пусть $\psi$ — другое движение, выводящее из $x$ с такой же скоростью. Тогда расстояние между точками $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ при малых $|t|$ есть $o(|t|)$. Поскольку отображение $f$ гладкое, расстояние между точками-образами $f(\varphi(t))$ и $f(\psi(t))$ в $N$ также есть $o(|t|)$, что и требовалось.

Задача 2. Пусть $v$ — положительный орт прямой, приложенный в точке $a$, и пусть $f(x)=x^2$. Найти $f_{*a}v$.

*Ответ.* $2a \cdot$ орт.

Задача 3. Могут ли две точки на плоскости, движущиеся по разным осям координат, выходить из начала с одинаковым вектором скорости?

*Ответ.* Да, если скорость нулевая. Пример: $\varphi(t)=(t^2, 0)$, $\psi(t)=(0, t^2)$.

Множество всех векторов скоростей движений, выходящих из точки $x$ области $M$, является линейным пространством: это просто пространство векторов, приложенных в точке $x$. Его размерность равна размерности области $M$. Это пространство называется *касательным пространством в точке $x$* к области $M$ и обозначается $T_xM$.

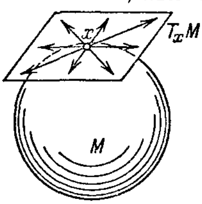

Рис. 49. Касательное пространство.

Всякому, кто сталкивается с этим впервые, трудно оторвать касательное пространство к линейному пространству от самого линейного пространства. Следующее обобщение призвано помочь справиться с этой трудностью. Рассмотрим какую-либо гладкую поверхность $M$ в $\mathbf{R}^3$, например сферу. Векторы скоростей, с которыми движущаяся по сфере точка может выходить из заданной точки сферы, очевидно, образуют плоскость (двумерное касательное пространство сферы в заданной точке $x$); эта касательная плоскость $T_xM$ (рис. 49) явно отделена от самой сферы $M$.

Определенное выше отображение $f_{*x}$ переводит касательное пространство к области-прообразу, $M$, в точке $x$ в касательное пространство к области-образу в точке $f(x)$.

Задача 4. Доказать, что отображение $f_{*x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N$ линейно.

Решение. По формуле Тейлора

$$f(x+vt)=f(x)+(\partial f/\partial x)\, vt+o(|t|),$$

следовательно, $f_{*x}=\partial f/\partial x$ — линейный оператор.

Если в пространствах — прообразе и образе отображения $f$ — выбраны декартовы координаты $(x_1, \ldots, x_m)$ и $(y_1, \ldots, y_n)$ соответственно, так что $f$ задается набором $n$ функций $f_i$ от $m$ переменных $x_j$, то компоненты вектора $f_{*x}v$ выражаются через компоненты вектора $v$ по формуле

$$(f_{*x}v)_i=\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} v_j.$$

Иначе говоря, *матрица оператора $f_{*x}$ составлена из частных производных* $(\partial f_i/\partial x_j)$.

Определение. Линейный оператор $f_{*x}$ называется *производной отображения* $f$ в точке $x$.

Задача 5. Рассмотрим отображение $f$ прямой в плоскость, $f(x)=(\sin x, \cos x)$. Найти значение его производной на положительно ориентирующем ось $x$ векторе $\boldsymbol{v}$ длины 10, приложенном в точке $\alpha$.

*Ответ*: $f_{*\alpha}v=(10\cos\alpha, -10\sin\alpha)$.

Задача 6. Рассмотрим отображение $f$ плоскости в плоскость, $f(x_1, x_2)=(x_1^3+x_1x_2, x_2)$ (рис. 50). Найти множество всех точек $x$, в которых линейный оператор $f_{*x}$ вырождается, и найти образ этого множества при отображении $f$ (эти два множества называются множествами *критических точек* и *критических значений* соответственно).

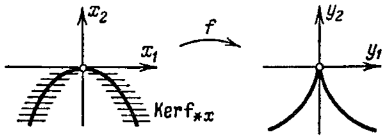


Рис. 50. Критические точки и критические значения отображения Уитни.

Решение. Матрица оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 3x_1^2+x_2 & x_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому производная вырождена на параболе $x_2=-3x_1^2$. Ее образ — полукубическая парабола $(y_1/2)^2+(y_2/3)^3=0$.

Отображение этой задачи называется *отображением Уитни* (*сборкой*). Х. Уитни доказал, что особенность сборки типична для гладких отображений плоскости в плоскость (например, всякое близкое к $f$ гладкое отображение имеет поблизости от начала координат подобную особенность).

Замечание. Линейная структура (т. е. сложение векторов) в касательном к области $M$ в точке $x$ пространстве определена выше при помощи линейной структуры объемлющего $M$ пространства, или иными словами — при помощи системы декартовых координат.

В действительности как множество $T_xM$, так и структуру линейного пространства в нем, можно определить независимо от выбора системы координат, даже криволинейных, лишь бы эта система координат была допустима, т. е. связана с системой декартовых координат гладкой заменой переменных (диффеоморфизмом). Независимость касательного пространства от системы координат не совсем очевидна, так как нарисованная в области $M$ стрелочка (приложенный вектор) при диффеоморфизме изгибается.

Не зависящее от системы координат определение вектора скорости выхода из точки $x$ выглядит несколько абстрактно:

Определение. *Касательным вектором* в точке $x$ области $M$ называется класс эквивалентности гладких движений $\varphi\colon \mathbf{R}\to M$, для которых $\varphi(0)=x$; эквивалентность $\varphi\sim\psi$ определяется условием: расстояние между точками $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ в какой-нибудь (и тогда любой) системе координат есть $o(|t|)$ при $t\to 0$ (рис. 51).

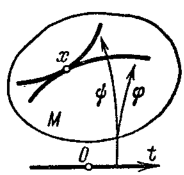


Рис. 51. Класс эквивалентных движений.

Ясно, что это действительно отношение эквивалентности ($\varphi\sim\varphi$, $\varphi\sim\psi\Rightarrow\psi\sim\varphi$, $\varphi\sim\psi\sim\chi\Rightarrow\varphi\sim\chi$). Класс эквивалентности движения $\varphi$ определяется (при фиксированной системе координат) компонентами вектора скорости выхода $\varphi(t)$ из точки $\varphi(0)$.

Таким образом, наш бескоординатно определенный вектор превращается в обычную стрелочку, как только система координат фиксирована. Единственное, что нужно доказывать — это независимость линейных операций над вектором (сложения и умножения на числа) от системы координат, участвующей в их определении. Но эта независимость сразу вытекает из линейности оператора производной отображения в точке (нужно рассмотреть в качестве отображения «замену переменных», т. е. диффеоморфизм, сопоставляющий набору старых координат точки набор ее новых координат).

Хотя наше определение не зависит от системы координат, остается еще зависимость от класса всех допустимых систем координат, связанных гладкими заменами переменных. Этот класс называется *дифференцируемой структурой*, и от него введенные понятия зависят существенным образом.

Производная отображения $f$ в точке $x$ есть *не зависящий ни от системы координат в прообразе, ни от системы координат в образе* линейный оператор $f_{*x}\colon T_xM\to T_{f(x)}N$ по самому своему определению (1) (рис. 52).

Задача 7. Пусть $f$ — диффеоморфизм $M$ на $N$. Докажите, что отображение $f_{*x}$: $T_xM \to T_{f(x)}N$ по самому своему определению (1) (рис. 52).

Задача 8. Верно ли обратное?

*Ответ.* Нет, даже если $f_{*x}$ — изоморфизм при любом $x$ (см. рис. 53).

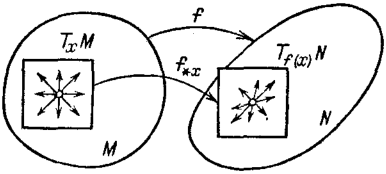


Рис. 52. Производная отображения в точке.

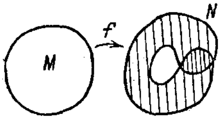


Рис. 53. Локальный диффеоморфизм может не быть диффеоморфизмом в целом.

## 2. Действие диффеоморфизмов на векторные поля.

Определение. В области $M$ задано гладкое *векторное поле* $v$, если каждой точке $x$ сопоставлен приложенный в ней вектор $v(x) \in T_xM$, гладко зависящий от точки $x$ (если система $m$ координат выбрана, то поле задается своими $m$ компонентами, являющимися гладкими функциями $m$ переменных). Вектор $v(x)$ называется *значением* поля $v$ в точке $x$.

Посмотрим, как ведут себя различные объекты при гладких отображениях. *Касательные векторы* при отображениях $g$: $M \to N$ *движутся вперед* (т. е. под действием $g$ касательный вектор $v$ к $M$ переходит в касательный вектор $g_{*x}v$ к $N$). *Функции* при отображениях $g$: $M \to N$ *движутся назад*, т. е. функция $f$ на $N$ порождает функцию на $M$ (ее значение в точке $x$ из $M$ равно значению $f$ в образе точки $x$; эта функция обозначается $g^*f$; звездочка *сверху* символизирует движение *назад*).

Векторные поля не отображаются, вообще говоря, ни вперед, ни назад. Действительно, при отображении две точки прообраза могут перейти в одну и принести туда разные векторы, поэтому поле в прообразе не переносится на образ. Кроме того, многие касательные векторы в одной точке прообраза могут иметь общий образ, поэтому поле в образе не переносится в прообраз.

Определение. *Образом векторного поля при диффеоморфизме на* называется векторное поле, значение которого в каждой точке является образом вектора исходного поля в прообразе данной точки. Образ поля $v$ при диффеоморфизме $g$ обозначается $g_*v$.

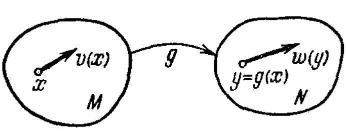


Рис. 54. Действие диффеоморфизма на векторное поле.

Иначе говоря, образ $g_*v$ поля $v$ в $M$ при *диффеоморфизме* $g$ области $M$ *на* $N$ — это поле $w$ в $N$, определенное формулой (рис. 54) $w(y) = (g_{*x})\, v(x)$, где $x = g^{-1}y$.

Задача 1. Найти образ поля $v(x) = 1$ на прямой под действием диффеоморфизма $g(x) = 2x$.

*Ответ.* $(g_*v)(y) = 2$.

Векторное поле на оси $x$, единственная компонента которого равна $v$, часто обозначается *) символом $v\partial/\partial x$. Удобство этого обозначения состоит в том, что при растяжениях оси $\partial/\partial x$ ведет себя как $1/x$. Например, решение предыдущей задачи можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial (y/2)}=2\frac{\partial}{\partial y}.$$

В этих обозначениях формула действия диффеоморфизма прямой на векторное поле принимает вид следующей формулы замены переменной: если $y=g(x)$, то $\dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{\partial}{\partial (g(x))}=\dfrac{1}{g'}\dfrac{\partial}{\partial x}$. Таким образом, обозначение $\partial/\partial x$ автоматизирует вычисление действия диффеоморфизмов на поля.

Задача 2. Найти образ поля $x\partial/\partial x$ под действием диффеоморфизма $y=e^x$.

*Ответ.* $y\ln y\,\partial/\partial y$.

Если $(x_1, \ldots, x_n)$ — фиксированная система координат в $\mathbf{R}^n$, то базисные векторные поля (с компонентами $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$) обозначаются $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n$. Поле с компонентами $(v_1, \ldots, v_n)$ обозначается поэтому $v_1\partial/\partial x_1+\ldots+v_n\partial/\partial x_n$.

Задача 3. Найти образы «эйлерова поля» $\boldsymbol{v}=x_1\partial/\partial x_1+x_2\partial/\partial x_2$ на плоскости под действием следующих диффеоморфизмов: 1) поворот вокруг 0; 2) гиперболический поворот; 3) любое линейное преобразование.

*Ответ.* $\boldsymbol{v}$.

Задача 4. Докажите, что диффеоморфизм, переводящий векторное поле $\boldsymbol{v}$ в поле $\boldsymbol{w}$, переводит фазовые кривые поля $\boldsymbol{v}$ в фазовые кривые поля $\boldsymbol{w}$. Верно ли обратное?

*Ответ.* Нет, пример: $\boldsymbol{v}=x\partial/\partial x$, $\boldsymbol{w}=2x\partial/\partial x$.

**3. Замена переменных в уравнении.** Пусть $\boldsymbol{w}$ — образ векторного поля $\boldsymbol{v}$ в $M$ при диффеоморфизме $g$ области $M$ на область $N$, т. е. $\boldsymbol{w}=g_*\boldsymbol{v}$.

Теорема. *Дифференциальные уравнения*

$$\dot{x}=\boldsymbol{v}(x), \qquad x\in M \tag{1}$$

*и*

$$\dot{y}=\boldsymbol{w}(y), \qquad y\in N \tag{2}$$

*эквивалентны в том смысле, что если* $\varphi\colon I\to M$ — *решение первого, то* $g\circ\varphi\colon I\to N$ — *решение второго уравнения, и обратно.*

Иными словами: *замена переменных* $y=g(x)$ *превращает уравнение* (1) *в уравнение* (2). Или еще: *подстановка* $g(x)$ *вместо* $y$ *превращает уравнение* (2) *в уравнение* (1).

Доказательство. Это очевидно. Иными словами, последовательно применяя правило дифференцирования сложной функции, определение решения $\varphi$ и определение поля $g_*\boldsymbol{v}$, находим $\dfrac{d}{dt}g\circ\varphi=$

*) В сущности, $v\partial/\partial x$ — это оператор дифференцирования по направлению поля $\boldsymbol{v}$ (см. § 10), но так как оператор $v\partial/\partial x$ и поле $\boldsymbol{v}$ однозначно определяют друг друга, их часто отождествляют между собой.

$=g_{*x}\dot{\varphi}(t)=g_{*x}v(x)=w(y)$, где $x=\varphi(t)$, $y=g(\varphi(t))$, что и требовалось доказать.

Задача 1. Решить уравнение малых колебаний маятника

$$\dot{x}_1=x_2, \qquad \dot{x}_2=-x_1,$$

перейдя к полярным координатам *) подстановкой $x_1=r\cos\theta$, $x_2=r\sin\theta$.

Решение. Выполнив подстановку, находим $\dot{r}=0$, $\dot{\theta}=-1$, откуда $x_1=r_0\cos(\theta_0-t)$, $x_2=r_0\sin(\theta_0-t)$.

Задача 2. Исследовать фазовые кривые системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1=x_2+x_1(1-x_1^2-x_2^2), \\ \dot{x}_2=-x_1+x_2(1-x_1^2-x_2^2). \end{cases}$$

Решение. Перейдя к полярным координатам, получаем

$$\dot{r}=r(1-r^2), \quad \dot{\theta}=-1.$$

Фазовые кривые этой системы на плоскости $(r, \theta)$ совпадают с интегральными кривыми уравнения $dr/d\theta=r(r^2-1)$. Нарисовав эти кривые (рис. 55) и возвращаясь к декартовым координатам, получаем рис. 56. Единственная особая точка — начало

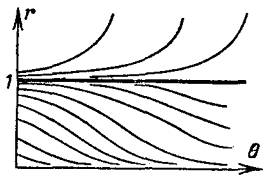


Рис. 55. Интегральные кривые на плоскости $(r, \theta)$.

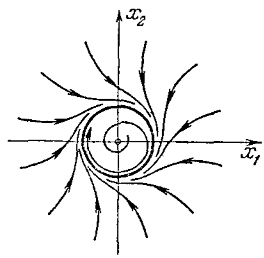


Рис. 56. Фазовые кривые на плоскости $(x_1, x_2)$.

координат. Начинающиеся вблизи нее фазовые кривые наматываются с ростом времени изнутри на окружность $x_1^2+x_2^2=1$. Эта окружность является замкнутой фазовой кривой (предельным циклом). Снаружи на нее также наматываются фазовые кривые.

Переход к полярным координатам позволяет и явно проинтегрировать исходную систему.

**4. Действие диффеоморфизма на поле направлений.** Пусть $g$ диффеоморфизм области $M$ на область $N$, и пусть в области $M$ задано поле направлений. Тогда в области $N$ также возникает поле направлений. Оно называется *образом исходного поля под действием диффеоморфизма* $g$ и определяется так.

Рассмотрим какую-либо точку $y$ области $N$ (рис. 57). Она имеет в $M$ единственный прообраз, $x=g^{-1}M$. Рассмотрим направление данного поля в точке $x$. Это — прямая в касательном пространстве $T_xM$. Возьмем любой ненулевой вектор этой прямой. Его образ под действием $g$

*) Разумеется, необходимы обычные оговорки, связанные с неоднозначностью полярных координат: отображение $(r, \theta)\mapsto(x_1, x_2)$ не является диффеоморфизмом плоскости на плоскость. Например, можно рассмотреть заданный этим отображением диффеоморфизм области $r>0$, $0<\theta<2\pi$ на плоскость без положительной полуоси $x_1$ и отдельно — области $r>0$, $-\pi<\theta<\pi$ на плоскость без отрицательной полуоси $x_1$.

есть ненулевой вектор в касательном пространстве $T_yN$ (так как $g$ — диффеоморфизм). Прямая, определенная этим вектором, не зависит от выбора вектора исходной прямой (так как $g_{*x}$ — линейный оператор). Эта новая прямая и есть прямая нового поля направлений в точке $y$. Очевидна

Теорема. *Интегральные кривые исходного поля направлений в $M$ переходят при диффеоморфизме $g\colon M \to N$ в интегральные кривые поля направлений в $N$, полученного действием $g$ на исходное поле.*

Для доказательства достаточно достроить данное поле направлений (в окрестности каждой точки области $M$) до векторного поля, векторы которого лежат на прямых заданного поля направлений и отличны от нуля, а затем применить теорему п. 3.

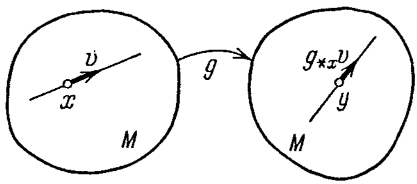


Рис. 57. Действие диффеоморфизма на поле направлений.

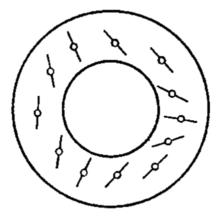

Рис. 58. Поле направлений, не достраиваемое до векторного поля.

Задача 1. Всякое ли гладкое поле направлений в области на плоскости можно достроить до гладкого векторного поля?

*Ответ.* Нет, если область неодносвязна (рис. 58).

Сформулированная выше теорема показывает, что для решения дифференциального уравнения

$$dx/dt = v(t, x)$$

достаточно построить диффеоморфизм, приводящий поле направлений к полю направлений уравнения, которое мы уже умеем решать — например, уравнения с разделяющимися переменными. Иными словами, достаточно подобрать замену переменных, сводящую уравнение к уже решенному.

Задача 2. Подобрать замену переменных так, чтобы в уравнении $\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - t^2}{x^2 + t^2}$ переменные разделились.

*Ответ.* Годятся полярные координаты.

Задача 3. Найти диффеоморфизм, превращающий все интегральные кривые уравнения $dx/dt = x - 1$ в параллельные прямые.

Решение. Решаем однородное уравнение: $x = Ce^t$. Находим частное решение неоднородного: $\dot{C}e^t = -1$, $C = e^{-t}$, $x = 1$.

Следовательно, каждое решение неоднородного уравнения имеет вид $x = 1 + ae^t$. Отображение, переводящее $(t, x)$ в $(t, a)$, — искомый диффеоморфизм ($a = e^{-t}(x - 1)$), так как вдоль интегральных кривых $a$ — константа.

Другое решение: Сопоставим точке $(t, x)$ точку $(t, y)$, где $y$ — ордината точки пересечения интегральной кривой, проходящей через точку $(t, x)$ с осью ординат (рис. 59).

Задача 4. Всякое ли гладкое поле направлений, заданное на всей плоскости, превращается в поле параллельных прямых при подходящем диффеоморфизме?

*Ответ.* Нет, см. рис. 60.

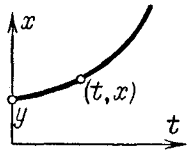


Рис. 59. Выпрямление интегральных кривых.

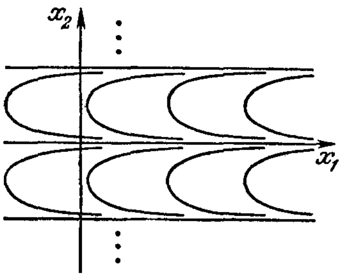


Рис. 60. Невыпрямляемое поле направлений на плоскости.

Задача 5. Можно ли диффеоморфизмом плоскости превратить в поле параллельных прямых поле направлений дифференциального уравнения $\dot{x}=x^2$?

*Ответ.* Можно, хотя явную формулу написать нелегко.

**5. Действие диффеоморфизма на фазовый поток.** Пусть $\{g^t\colon M\to M\}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов, и пусть $f\colon M\to N$ — еще один диффеоморфизм *на*.

Определение. *Образом потока* $\{g^t\}$ *под действием диффеоморфизма* $f$ называется поток $\{h^t\colon N\to N\}$, где $h^t=fg^tf^{-1}$.

Иными словами, диаграмма

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{g^t} & M \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ N & \xrightarrow{h^t} & N \end{array}$$

коммутативна при любом $t$. Ясно, что $f$ переводит орбиты группы $\{g^t\}$ в орбиты группы $\{h^t\}$.

Если рассматривать диффеоморфизм $f$ как «замену переменных», то преобразование $h^t$ — это просто преобразование $g^t$, «записанное в новых координатах».

Замечание. Потоки $\{g^t\}$ и $\{h^t\}$ называются иногда *эквивалентными* (или *подобными*, или *сопряженными*), а диффеоморфизм $f$ — *эквивалентностью* (или *сопрягающим диффеоморфизмом*).

Задача 1. Докажите, что $\{h^t\}$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов.

Задача 2. Сопряжены ли однопараметрические группы вращений плоскости и ее гиперболических поворотов?

Пусть $\boldsymbol{v}$ — векторное поле фазовой скорости однопараметрической группы $\{g^t\}$, а $\boldsymbol{w}$ — группы $\{h^t\}$, в которую ее переводит диффеоморфизм $f$.

Очевидна

Теорема. *Диффеоморфизм $f$ переводит поле $\boldsymbol{v}$ в поле $\boldsymbol{w}$; обратно, если диффеоморфизм переводит $\boldsymbol{v}$ в $\boldsymbol{w}$, то он переводит $\{g^t\}$ в $\{h^t\}$.*

Задача 3. Переводятся ли друг в друга диффеоморфизмами векторные поля на прямой, задающие следующие пять дифференциальных уравнений: $\dot{x}=\sin x$, $2\sin x$, $\sin^2 x$, $\sin 2x$, $2\sin x+\sin^2 x$.

*Ответ.* Второе переводится в четвертое и в пятое.

## § 6. Симметрии

Здесь решаются однородные и квазиоднородные дифференциальные уравнения. Их решение основано на использовании однопараметрических групп симметрий векторных полей и полей направлений, которые мы прежде всего и изучим.

### 1. Группы симметрий.

Определение. Диффеоморфизм $g\colon M\to M$ называется *симметрией* векторного поля $v$ в $M$, если он переводит поле в себя: $g_* v=v$. Говорят также, что *поле $v$ инвариантно относительно симметрии $g$*.

Пример. Поворот плоскости вокруг нуля является симметрией эйлерова поля $x_1\partial/\partial x_1+x_2\partial/\partial x_2$ (вектор которого в точке $\mathbf{x}$ есть $v(\mathbf{x})=\mathbf{x}$, рис. 61).

Фазовые кривые поля переходят под действием симметрии поля друг в друга.

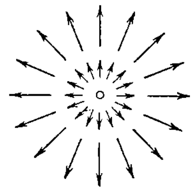

Рис. 61. Эйлерово поле.

Задача 1. Пусть диффеоморфизм переводит фазовые кривые векторного поля друг в друга. Является ли он симметрией поля?

*Ответ.* Не обязательно.

Определение. Диффеоморфизм $g\colon M\to M$ называется *симметрией поля направлений в $M$*, если он переводит это поле направлений в себя; поле тогда называется *инвариантным* относительно симметрии. Интегральные кривые поля переходят под действием симметрии друг в друга.

Пример. Поле направлений уравнения $\dot{x}=v(t)$ в расширенном фазовом пространстве инвариантно относительно сдвигов вдоль оси $x$ (рис. 4 на стр. 14), а уравнения $\dot{x}=v(x)$ — вдоль оси $t$ (рис. 6 на стр. 16).

Задача 2. Пусть диффеоморфизм переводит интегральные кривые поля направлений друг в друга. Является ли он симметрией поля направлений?

*Ответ.* Да.

Поле называется *инвариантным относительно группы* диффеоморфизмов, если оно инвариантно относительно каждого преобразования группы. В таком случае говорят, что поле *допускает* данную группу симметрий.

Пример. Эйлерово поле на плоскости допускает, среди других, следующие четыре группы симметрий: однопараметрическая группа растяжений ($x\mapsto e^t x$), однопараметрическая группа вращений на угол $t$, однопараметрическая группа гиперболических поворотов, группа всех линейных преобразований плоскости, $GL(2,\mathbf{R})$.

Все симметрии данного поля образуют группу (докажите!).

Задача 3. Найти группу всех симметрий эйлерова поля на плоскости.

*Ответ.* $GL(2,\mathbf{R})$.

**2. Применение однопараметрической группы симметрий для интегрирования уравнения.**

Теорема. *Пусть известна однопараметрическая группа симметрий поля направлений на плоскости. Тогда можно явно проинтегрировать уравнение, заданное этим полем направлений, в окрестности каждой не стационарной точки группы симметрий.*

Точка называется *нестационарной* для группы преобразований, если не все преобразования группы оставляют ее на месте.

Если группа состоит из сдвигов вдоль прямой, то уравнение с такой группой симметрий решено в § 1, стр. 16 (формула Барроу). Мы покажем, что общий случай сводится к этому подходящим диффеоморфизмом (т. е. разумным выбором локальных координат на плоскости).

Лемма. *В окрестности любой нестационарной точки действия однопараметрической группы диффеоморфизмов на плоскости можно выбрать координаты $(u, v)$ так, что данная однопараметрическая группа диффеоморфизмов запишется в виде группы сдвигов:*

$$g^s(u, v) = (u+s, v) \text{ при достаточно малых } |u|, |v|, |s|.$$

Эта формула означает, что координата $v$ нумерует орбиты данной группы, а координата $u$ на каждой орбите есть просто время движения (отсчитываемое от некоторой линии на плоскости).

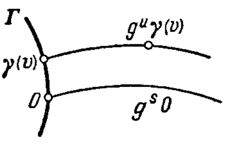


Рис. 62. Выпрямление однопараметрической группы диффеоморфизмов.

Доказательство. Проведем через данную точку $O$ линию Г, пересекающую трансверсально (под ненулевым углом) проходящую через нее фазовую кривую $\{g^sO\}$ (рис. 62). Пусть $v$ — координата точки $\gamma(v)$ на этой линии, отсчитываемая от точки $O$. Рассмотрим отображение Ф плоскости $(u, v)$ на нашу плоскость, переводящее точку с координатами $(u, v)$ в $g^u\gamma(v)$. Это отображение — диффеоморфизм окрестности точки $(0, 0)$ на окрестность точки $O$. Поэтому $(u, v)$ — локальные координаты. В координатах $(u, v)$ действие $g^s$ принимает нужный вид, поскольку $g^sg^u = g^{s+u}$.

Теорема следует из леммы, так как в системе координат $(u, v)$ наклон данного поля направлений не зависит от $u$.

Замечание. Приведенное доказательство дает также *метод явного интегрирования* уравнения; в координатах леммы оно принимает вид $dv/du = w(v)$ (линию Г нужно взять не касательной направлению данного поля в $O$). Практически не всегда удобно пользоваться именно этими координатами. Достаточно, чтобы линии $v = \text{const}$ были орбитами данной однопараметрической группы диффеоморфизмов; в качестве другой координаты вместо $u$ можно взять любую функцию от $u$, скажем $z$. Важно лишь, чтобы преобразования $g^s$ переводили линии $z = \text{const}$ друг в друга. В системе координат $(z, v)$ исходное поле направлений определит уравнение с разделяющимися переменными $dv/dz = w(v) f(z)$, где $f(z) = du/dz$.

Задача 1. Пусть известна однопараметрическая группа симметрий поля направлений в $n$-мерной области. Свести задачу интегрирования соответствующего дифференциального уравнения к нахождению интегральных кривых поля направлений в области размерности $n-1$.

Указание. Пространство орбит группы симметрий имеет размерность $n-1$.

### 3. Однородные уравнения.

Определение. Уравнение называется *однородным*, если задающее его поле направлений на плоскости однородно, т. е. инвариантно относительно однопараметрической группы растяжений, $g^s(x, y) = e^s(x, y)$ (рис. 63).

Область определения такого поля — не обязательно вся плоскость: достаточно, чтобы это поле было задано в какой-либо области, инвариантной относительно растяжений (например, в угле).

Задача 1. Какие из уравнений $dy/dx = y/x$, $x/y$, $\ln x - \ln y$ $(x > 0,\ y > 0)$ однородны?

*Ответ*. Все три.

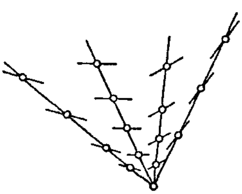

Рис. 63. Поле направлений однородного уравнения.

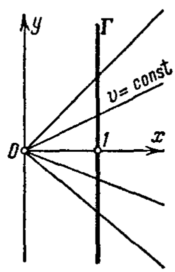


Рис. 64. Координаты для решения однородного уравнения.

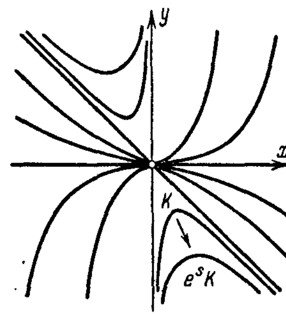


Рис. 65. Интегральные кривые однородного уравнения.

Теорема. *Однородное уравнение $dy/dx = F(x, y)$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = vx$ (т. е. переходом к координатам $(x, v)$) в области $x > 0$.*

Доказательство. Орбиты группы растяжений — это лучи проходящих через 0 прямых (рис. 64). В качестве линии Г возьмем прямую $x = 1$ с обычным параметром $y$ на ней. Указанные в лемме координаты $u$ и $v$ — это $u = \ln x$ и $v = y/x$.

По замечанию п. 2 в координатах $(x, v)$ переменные разделяются.

Задача 2. Решить уравнение $dy/dx = y/x + y^2/x^2$, $x > 0$.

Решение. $dy = v\,dx + x\,dv$, $dy/dx = v + x\,dv/dx$, $x\,dv/dx = v^2$, $-1/v = \ln x + C$, $y = -x/(\ln x + C)$.

Если $K$ — интегральная кривая однородного уравнения, то гомотетичная ей кривая $e^sK$ тоже интегральная (рис. 65). Таким образом, для исследования всех интегральных кривых однородного уравнения достаточно нарисовать одну кривую в каждом секторе плоскости.

Задача 3. Нарисовать интегральные кривые уравнения

$$dy/dx = 2y/x + y^2/x^2.$$

*Ответ*. См. рис. 65.

Определение. Функция $f$ называется *однородной степени* $r$, если она удовлетворяет тождественному соотношению

$$f(e^s x) \equiv e^{rs} f(x). \tag{1}$$

Иными словами, *однородная функция степени* $r$ — это общий собственный вектор всех линейных операторов $(e^s)^*$, с собственными числами $e^{rs}$.

Оператор $g^*$ (действие диффеоморфизма $g$ на функции) определен в § 5, стр. 58.

Пример. Нарисуем на плоскости $p$, $q$ прямую $p+q=r$. Многочлен $\sum a_{p,q}x^p y^q$ однородный степени $r$, если и только если показатели всех входящих в него с ненулевыми коэффициентами одночленов лежат на этой прямой (называемой *диаграммой Ньютона*).

Теорема (Эйлера). *Чтобы функция $f$ была однородной степени $r$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла соотношению Эйлера $\sum x_i \partial f/\partial x_i = rf$.*

Соотношение Эйлера означает, что $f$ — собственный вектор оператора дифференцирования вдоль изображенного на рис. 61 эйлерова поля (поля фазовой скорости группы растяжений, $e^s$) с собственным числом $r$.

Доказательство. Соотношение Эйлера получается дифференцированием определения (1) однородной функции по $s$ при $s=0$. Соотношение (1) получается из соотношения Эйлера интегрированием дифференциального уравнения с разделяющимися переменными, задаваемого соотношением Эйлера на каждой орбите группы растяжений: $df/dx = rf/x$.

*Для того чтобы поле направлений уравнения $dy/dx = F(x, y)$ было однородным, необходимо и достаточно, чтобы правая часть была однородной функцией степени* 0. Например, годится отношение любых двух однородных многочленов одинаковой степени.

Замечание. Переход от координат $(x, y)$ к координатам $(x, v=y/x)$ в области $x \neq 0$ и к координатам $(u=x/y, y)$ в области $y \neq 0$ называется *сигма-процессом* или *раздутием точки* 0.

Эта конструкция имеет простой геометрический смысл: она означает переход от плоскости к поверхности, получающейся из нее выкидыванием начала координат и вклеиванием вместо него целой проективной прямой. Вот как это делается. Рассмотрим отображение (*расслоение*) $\alpha\colon (\mathbf{R}^2\backslash 0) \to \mathbf{RP}^1$, *определяющее проективную прямую* *).

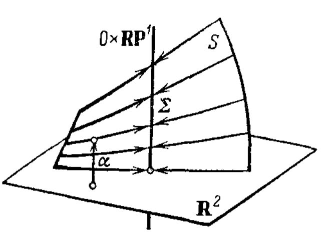


Рис. 66 Сигмапроцесс

Отображение $\alpha$ сопоставляет точке плоскости прямую, соединяющую ее с нулем. График отображения $\alpha$ (рис. 66) представляет собой поверхность $S$ в пространстве $(\mathbf{R}^2\backslash 0) \times \mathbf{RP}^1$. Вложение $\mathbf{R}^2\backslash 0$ в $\mathbf{R}^2$ вкладывает этот график в произведение $M = \mathbf{R}^2 \times \mathbf{RP}^1$ (диффеоморфное внутренности баранки).

Задача 4. Доказать, что замыкание графика в $M$ представляет собой гладкую поверхность.

Указание. Уравнения $y = vx$, $x = uy$ определяют гладкие поверхности.

*) *Проективной прямой* называется множество всех проходящих через 0 прямых на плоскости. Вообще, проективное пространство $\mathbf{RP}^{m-1}$ есть множество прямых, проходящих через 0 в $\mathbf{R}^m$

Эта поверхность $\Sigma$ (замыкание графика) состоит из самого графика и линии $0\times \mathbf{RP}^1$ (диффеоморфной окружности). Проектирование $M$ на первый сомножитель, $\mathbf{R}^2$, определяет гладкое отображение поверхности $\Sigma$ на плоскость. Это отображение называется *сдуванием*. Оно переводит всю окружность $0\times \mathbf{RP}^1$ в точку 0 и диффеоморфно отображает остальную часть $\Sigma$ (т. е. график) на плоскость без точки.

Задача 5. Доказать, что поверхность $\Sigma$ диффеоморфна листу Мёбиуса.

Всевозможные геометрические объекты, имеющие особенность в точке 0, можно поднять с плоскости без точки на $\Sigma$, пользуясь указанным выше диффеоморфизмом. При этом оказывается, что при переходе наверх (на $\Sigma$) особенности упрощаются.

Повторяя процедуру раздутия, можно, как говорят, *разрешать* особенности. Например, можно превратить любую алгебраическую кривую с особенностью в точке 0 в кривую, не имеющую особенностей, кроме точек обычного самопересечения.

Задача 6. Разрешить особенность полукубической параболы $x^2=y^3$.

*Ответ*. См. рис. 67.

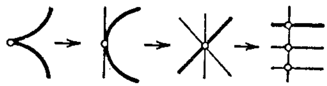

Рис. 67. Разрешение особенности.

При исследовании векторных полей и полей направлений также полезно раздутие с центром в особой точке. Выше мы видели, что в случае однородного поля направлений первое же раздутие приводит к уравнению с разделяющимися переменными.

Задача 7. Докажите, что гладкое векторное поле на плоскости, равное 0 в начале координат, поднимается на поверхность $\Sigma$ в виде поля, гладко продолжающегося на вклеиваемую при сигма-процессе окружность.

**4. Квазиоднородные уравнения.** Зафиксируем на плоскости систему линейных координат $(x, y)$ и зафиксируем два вещественных числа $\alpha$ и $\beta$.

Определение. *Группой квазиоднородных растяжений плоскости* называется однопараметрическая группа линейных преобразований

$$g^s(x,\ y)=(e^{\alpha s}x,\ e^{\beta s}y).$$

Числа $\alpha$ и $\beta$ называются *весами* переменных $x$ и $y$. (Наряду с «квазиоднородный» употребляются термины *взвешенно-однородный*, *обобщенно-однородный*.) Обозначение: $\alpha=\deg x$, $\beta=\deg y$.

Если $\alpha=\beta=1$, то $\{g^s\}$ — обычная группа растяжений.

Определение. Уравнение называется *квазиоднородным* (*с весами* $\alpha$, $\beta$), если задающее его поле направлений на плоскости инвариантно относительно группы квазиоднородных растяжений.

Задача 1. Подобрать веса так, чтобы поле направлений уравнения $dy/dx=-x/y^3$ было квазиоднородным.

*Ответ* $\alpha=2$, $\beta=1$.

Теорема. *Квазиоднородное уравнение* $dy/dx=F(x,\ y)$ *с весами* $\deg x=\alpha$, $\deg y=\beta$ *приводится к уравнению с разделяющимися переменными переходом к координатам* $(x,\ y^\alpha/x^\beta)$ *в области* $x>0$.

Доказательство. Орбиты группы квазиоднородных растяжений — половины «парабол» $y^\alpha=Cx^\beta$ (рис. 30 стр. 33). Выберем в качестве линии $\Gamma$ (п. 2) прямую $x=1$ с параметром $y$ на ней. Квазиоднородные растяжения переводят параллельные $\Gamma$ прямые в параллельные. Поэтому теорема вытекает из леммы п. 2 и замечания к ней.

Выясним теперь, как узнать по правой части уравнения, квазиоднородно ли оно.

Определение. Функция $f$ называется *квазиоднородной, степени* $r$, если она удовлетворяет тождеству $f(e^{\alpha s}x,\ e^{\beta s}y) \equiv e^{rs}f(x,\ y)$.

Иными словами, $f$ — общий собственный вектор операторов $(g^s)^*$ (где $g^s$ — квазиоднородное растяжение) с собственными числами $e^{rs}$.

Пример. Многочлен квазиоднороден степени $r$ (при весах $\alpha$, $\beta$), если и только если показатели входящих в него мономов $x^p y^q$ лежат на диаграмме Ньютона $\alpha p + \beta q = r$ (рис. 68).

Квазиоднородная степень квазиоднородного многочлена называется также *весом.* Например, вес $x$ равен $\alpha$, вес $y$ равен $\beta$, вес $x^2y^3$ равен $2\alpha + 3\beta$ и т. д. Приписывание весов называется также *градуированием.*

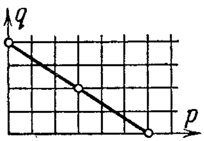


Рис. 68. Диаграмма Ньютона квазиоднородной функции.

Задача 2. Подобрать веса переменных так, чтобы многочлен $x^2y + y^4$ был квазиоднородным степени 1.

*Ответ.* $\deg y = 1/4$, $\deg x = 3/8$.

Задача 3. Докажите, что функция $f$ переменных $x_i$ весов $\alpha_i$ квазиоднородна степени $r$, если и только если она удовлетворяет соотношению Эйлера $\sum \alpha_i x_i \partial f/\partial x_i = rf$.

Замечание. Векторное поле $\sum \alpha_i x_i \partial/\partial x_i$ называется *квазиоднородным эйлеровым полем* (это — поле фазовой скорости группы квазиоднородных растяжений). Соотношение Эйлера означает, что $f$ — собственный вектор оператора дифференцирования вдоль эйлерова поля, с собственным числом $r$.

Теорема. *Для того чтобы поле направлений уравнения* $dy/dx = F(x, y)$ *было квазиоднородным, необходимо и достаточно, чтобы правая часть была квазиоднородной и ее квазиоднородная степень была равна разности степеней* $y$ *и* $x$:

$$\deg F = \deg y - \deg x = \beta - \alpha.$$

Доказательство. Под действием квазиоднородных растяжений $g^s$ величина $y$ и, следовательно, $dy$ увеличивается в $e^{\beta s}$ раз, а $x$ (и, следовательно, $dx$) — в $e^{\alpha s}$ раз. Чтобы поле направлений перешло при таком растяжении в себя нужно, чтобы значение $F$ в новой точке было во столько же раз больше, чем в старой, во сколько раз увеличивается отношение $dy/dx$ (или $y/x$), т. е. в $e^{(\beta-\alpha)s}$ раз, что и требовалось.

Замечание. Таким образом, при вычислении весов можно обращаться с $dy/dx$, как с дробью, считая $d$ «множителем» веса нуль. Тогда вес $dx$ есть $\alpha$, вес $dy$ есть $\beta$, вес $dy/dx$ есть $\beta - \alpha$.

Условие квазиоднородности уравнения состоит в том, что веса левой и правой частей одинаковы.

Задача 4. Подобрать веса переменных так, чтобы дифференциальное уравнение фазовых кривых уравнения Ньютона $\ddot{x} = Cx^k$ было квазиоднородным.

Решение. Уравнение фазовых кривых $dy/dx = Cx^k/y$. Следовательно, $2\beta = (k+1)\alpha$.

**5. Соображения подобия и размерностей.** *Квазиоднородные уравнения* с фазовыми пространствами любой размерности определяются аналогично тому, как это сделано выше для двумерного случая. *Квазиоднородные векторные поля* определяются условием $\deg \partial/\partial x_i = -\deg x_i$. Например, эйлерово поле имеет степень 0.

Задача 1. Доказать, что если $f$ — квазиоднородная функция степени $r$, а $v$ — квазиоднородное поле степени $s$, то производная $f$ вдоль $v$ — квазиоднородная функция степени $r+s$.

Задача 2. Пусть $\dot{x}=P$, $\dot{y}=Q$, где $P$ и $Q$ — однородные многочлены степени $m$. Докажите, что если какая-либо из фазовых кривых замкнута и проходится за время $T$, то при растяжении в $e^s$ раз из нее получится замкнутая фазовая кривая с периодом обращения $e^{s(1-m)}T$.

Задача 3. Пусть $\dot{x}=v(x)$, где $v$ — квазиоднородное поле степени $r$. Докажите, что если $T$ — период обращения по замкнутой кривой $\gamma$ и $g^s$ — квазиоднородное растяжение, то $g^s\gamma$ — тоже замкнутая фазовая кривая и период обращения — $e^{-sr}T$.

Задача 4. Как зависит от амплитуды $x_{\max}$ период колебаний «мягкого маятника», $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x^3$?

*Ответ.* Обратно пропорционален амплитуде.

При применении соображений подобия часто встречаются не только первые, но и вторые производные. Посмотрим, как они ведут себя при квазиоднородных растяжениях. Очевидна

Теорема. *При квазиоднородном растяжении $(x, y)\mapsto(e^{\alpha s}x, \ e^{\beta s}y)$ график функции $y=\varphi(x)$ преобразуется в график функции $y=\Phi(x)$, для которой*

$$\frac{d^k\Phi}{dx^k}\ (\textit{в новой точке}) = e^{(\beta-k\alpha)s}\frac{d^k\varphi}{dx^k}\ (\textit{в старой точке}).$$

Иными словами, $d^ky/(dx)^k$ преобразуется как $y/x^k$ (чем и объясняется удобство обозначения Лейбница). Следовательно, *чтобы узнать, квазиоднородно ли уравнение, включающее высшие производные, достаточно приписать букве $d$ вес нуль и потребовать одинаковости весов левой и правой частей.*

Задача 5. Докажите, что если частица в силовом поле с однородной степени $m$ силой проходит траекторию $\gamma$ за время $T$, то та же частица пройдет гомотетичную траекторию $\lambda\gamma$ за время $T'=\lambda^{(1-m)/2}T$.

Решение. Уравнение Ньютона $d^2x/dt^2=F(x)$, в котором $F$ однородна степени $m$, переходит в себя при подходящих квазиоднородных растяжениях: нужно взять веса $\alpha$ (для $x$) и $\beta$ (для $t$) так, чтобы $\alpha-2\beta=m\alpha$. Берем $\alpha=2$, $\beta=1-m$. Растяжению $x'=\lambda x$ соответствует $T'=\lambda^{(1-m)/2}T$.

Задача 6. Докажите, что квадраты времени прохождения подобных траекторий в поле тяготения относятся как кубы линейных размеров *).

Решение. Из предыдущей задачи при $m=-2$ (закон всемирного тяготения) получаем $T'=\lambda^{3/2}T$.

Задача 7. Выясните, как зависит от амплитуды период колебаний в случае возвращающей силы, пропорциональной отклонению («линейный осциллятор») и кубу отклонения («мягкая» сила).

*Ответ.* Для линейного маятника период не зависит от амплитуды, а для мягкого обратно пропорционален ей.

Задача 8. Уравнение теплопроводности имеет вид $\dfrac{\partial u}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ($t$ — время, $x$ — расстояние, $u$ — температура). Известно, что вследствие годовых колебаний температуры земля в некоторой местности промерзает на метр. На какую глубину она промерзала бы вследствие суточных колебаний температуры такой же амплитуды?

---

*) Это частный случай 3-го закона Кеплера, в котором подобие траекторий не предполагается. Закон всемирного тяготения был найден из двух предыдущих задач, закон Кеплера был известен раньше.

Решение. Уравнение переходит в себя при квазиоднородных растяжениях $(t, x) \mapsto (e^{2s}t, e^s x)$. Следовательно, уменьшение периода в 365 раз влечет уменьшение глубины промерзания в $\sqrt{365}$ раз.

*Ответ* На глубину 5 см

Использование соображений подобия восходит к Галилею, который объяснял ими ограничение роста земных животных. вес растет пропорционально кубу линейного размера, а прочность костей — квадрату Для водных животных этого ограничения нет, и киты достигают гораздо больших размеров, чем, скажем, слоны. Многочисленные применения этих соображений в разных областях естествознания носят названия: *теория подобия*, *теория размерностей*, *скэйлинг*, *автомодельность* и др.

**6. Методы интегрирования дифференциальных уравнений.** Есть еще несколько приемов, иногда позволяющих явно решить дифференциальное уравнение. Например, рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

Перепишем его в виде

$$Q dy - P dx = 0$$

(1-форма равна 0 на векторах, касающихся интегральных кривых). Если форма является полным дифференциалом функции,

$$Q\,dy - P\,dx = dF,$$

то вдоль каждой интегральной кривой функция $F$ постоянна.

Зная линии уровня функции $F$, можно найти интегральные кривые. Достаточно даже, чтобы форма $Qdy - Pdx$ становилась полным дифференциалом после умножения на подходящую функцию (ведь одновременное умножение $P$ и $Q$ на одну и ту же функцию не меняет исходного уравнения). Такая функция называется *интегрирующим множителем*. Интегрирующий множитель всегда существует (в окрестности точки, где $Q$ отлично от нуля), но найти его не легче, чем решить исходное уравнение.

Основной метод решения и изучения дифференциальных уравнений — подбор диффеоморфизмов (замен переменных), приводящих к простейшему виду соответствующее поле направлений, векторное поле или фазовый поток. Например, для однородных и квазиоднородных уравнений такие замены переменных указаны выше.

Существует ряд приемов отыскания замен переменных для интегрирования дифференциальных уравнений специального вида. Списки таких уравнений и приемов имеются в задачниках (см., например, «Сборник задач по дифференциальным уравнениям» А. Ф. Филиппова, §§ 4, 5, 6, 8, 9, 10) и в справочниках (см., например, книгу Э. Камке «Справочник по дифференциальным уравнениям», содержащую около 1600 уравнений). Каждый может расширить эти списки следующим образом: взять любое уже решенное уравнение и сделать в нем любую замену переменных. Мастера интегрирования дифференциальных уравнений (например, Якоби) достигали этим способом значительных успехов в решении конкретных прикладных задач. В последнее десятилетие мы являемся свидетелями неожиданного возрождения интереса к некоторым специальным точно интегрируемым уравнениям, которые оказались связанными с тонкими вопросами алгебраической геометрии с одной стороны и физики частицеобразных решений уравнений в частных производных (солитонов, инстантонов и т. п.) — с другой.

Однако все эти методы интегрирования имеют два принципиальных недостатка. Во-первых, уже такое простое уравнение, как $dx/dt = x^2 - t$, не решается в квадратурах, т. е. решение не выражается в виде конечной комбинации элементарных и алгебраических функций и интегралов от них *). Во-вторых, громоздкая формула, дающая решение в явном виде, часто менее полезна, чем простая приближенная формула. Например, уравнение $x^3 - 3x = 2a$ можно явно решить по формуле Кардано $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 - 1}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 - 1}}$. Однако если мы хотим решить уравнение при $a = 0{,}01$, то полезнее заметить, что оно имеет при малых $a$ корень $x \approx -(2/3)\,a$ — обстоятельство вовсе не очевидное с точки зрения формулы Кардано. Точно так же уравнение маятника $\ddot{x} + \sin x = 0$ решается в явном виде при помощи интегралов (эллиптических). Однако большинство вопросов о поведении маятника проще решить, исходя из приближенного уравнения малых колебаний ($\ddot{x} + x = 0$) и из качественных соображений, не использующих явную формулу (см. § 12).

Точно решаемые уравнения бывают полезны в качестве примеров, так как на них можно иногда заметить явления, которые имеют место и в более сложных случаях. Например, исследование точного решения уравнения $\dot{x} = kx$ позволяет доказать теорему единственности для самого общего уравнения с гладкой правой частью (см. § 2, п. 3). Другие примеры доставляют так называемые автомодельные решения уравнений математической физики.

Задача 1. Найти решения уравнения Лапласа **) в $\mathbf{R}^2$ и в $\mathbf{R}^3$, зависящие только от расстояния точки до начала координат.

*Ответ*: $C \ln 1/r + \mathrm{const}$, $C/r + \mathrm{const}$ (ньютоновские потенциалы; строго говоря, $\Delta(\ln 1/r) = -2\pi\delta$ в $\mathbf{R}^2$, $\Delta(1/r) = -4\pi\delta$ в $\mathbf{R}^3$ (почему?)).

---

*) Доказательство этой теоремы Лиувилля близко к доказательству неразрешимости уравнений степени 5 в радикалах (Руффини — Абель — Галуа): оно выводится из неразрешимости некоторой группы. В отличие от обычной теории Галуа, речь идет здесь не о конечной группе, а о неразрешимой группе Ли. Наука, занимающаяся этими вопросами, называется дифференциальной алгеброй.

**) Оператором Лапласа в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ называется оператор $\Delta = \mathrm{div}\,\mathrm{grad} = \sum \partial^2/\partial x_i^2$ ($x_i$ — декартовы координаты). Уравнение Лапласа имеет вид $\Delta u = 0$. Решения этого уравнения называются *гармоническими функциями*. Например, установившееся распределение температуры задается гармонической функцией. Оператор Лапласа измеряет отличие среднего значения функции в малом шаре от ее значения в центре шара. Среднее гармонической функции по любому шару точно равно ее значению в центре шара (докажите!).

Всякий раз, когда найдена точно решаемая задача, открывается возможность приближенно исследовать близкие задачи методами теории возмущений.

Однако опасно распространять результаты, полученные при изучении точно решаемой задачи, на близкие задачи общего вида: нередко точно интегрируемое уравнение потому и интегрируется, что его решения ведут себя проще, чем у близких неинтегрируемых задач. Например, уравнение фазовых кривых модели Лотка — Вольтерра удается проинтегрировать (п. 7 § 2) лишь благодаря тому, что все эти кривые замкнуты (в то время как у большинства близких неинтегрируемых моделей большинство фазовых кривых — незамкнутые спирали).

*Глава 2*

# Основные теоремы

В этой главе формулируются теоремы о существовании и единственности решений и первых интегралов, о зависимости решений от начальных данных и от параметров. Доказательства изложены в гл. 4, здесь лишь обсуждается связь этих результатов друг с другом.

## § 7. Теоремы о выпрямлении

Здесь формулируется основная теорема о выпрямлении поля направлений, и из нее выводятся теоремы существования, единственности и дифференцируемой зависимости решения от параметров и начальных условий, теоремы о продолжении и о локальных фазовых потоках.

**1. Выпрямление поля направлений.** Рассмотрим гладкое поле направлений в области $U$ $n$-мерного пространства.

Определение. *Выпрямлением* поля направлений называется диффеоморфизм, переводящий его в поле параллельных направлений (рис. 69). Поле называется *выпрямляемым*, если существует его выпрямление.

Теорема 1 (основная). *Всякое гладкое поле направлений выпрямляемо в окрестности каждой точки. Если поле $r$ раз непрерывно дифференцируемо (класса $C^r$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$), то и выпрямляющий диффеоморфизм можно выбрать класса $C^r$.*

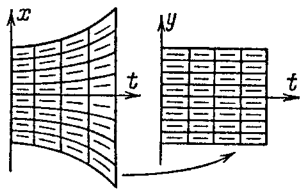

Рис 69. Выпрямление поля направлений

Пример. Поле направлений уравнения $\dot{x} = x$ (рис. 69) выпрямляется диффеоморфизмом $(t, x) \mapsto (t, y = xe^{-t})$. Действительно, этот диффеоморфизм переводит интегральные кривые $x = Ce^t$ на плоскости $(t, x)$ в параллельные прямые $y = C$ на плоскости $(t, y)$.

Задача 1. Выпрямить поля направлений уравнений $\dot{x} = t$ и $\dot{x} = x^2$ в окрестности начала координат.

Задача 2. Всякое ли гладкое поле направлений на плоскости выпрямляемо в целом?

*Ответ.* Нет, см. рис. 60.

Задача* 3. Пусть в $\mathbf{R}^3$ дано (гладкое) поле двумерных плоскостей (в каждой точке приложена плоскость). Всегда ли можно выпрямить его (превратить в поле параллельных плоскостей подходящим диффеоморфизмом)?

Указание. Выпрямляемое поле является полем плоскостей, касательных к семейству поверхностей.

*Ответ*. Нет. Рассмотрим, например, поле плоскостей, заданное уравнением $y\,dx+dz=0$ (вектор принадлежит плоскости поля, если на нем эта 1-форма обращается в нуль). Не существует *ни одной* поверхности, касающейся плоскостей этого поля.

Доказательство основной теоремы 1 будет дано в § 32. Вот две ее переформулировки.

Теорема 2. *Все гладкие поля направлений в областях одинакового числа измерений локально диффеоморфны (переводятся друг в друга диффеоморфизмом).*

$1 \Rightarrow 2$: по основной теореме все поля локально диффеоморфны одному стандартному полю. $2 \Rightarrow 1$: из локальной диффеоморфности любому полю вытекает, в частности, локальная диффеоморфность стандартному, т. е. локальная выпрямляемость.

Теорема 3. *Дифференциальное уравнение $\dot{x}=\boldsymbol{v}(t, x)$ с гладкой правой частью $\boldsymbol{v}$ локально эквивалентно простейшему уравнению $dy/d\tau=0$.*

Иными словами: *В окрестности каждой точки расширенного фазового пространства $(t, x)$ существует допустимая система координат $(\tau, y)$ (переход к которой — диффеоморфная замена переменных), в которой уравнение записывается в простейшем виде: $dy/d\tau=0$.*

$1 \Rightarrow 3$: сначала выпрямим поле направлений $\boldsymbol{v}$, а затем рассмотрим декартовы координаты, в которых ось времени $\tau$ параллельна прямым выпрямленного поля направлений. $3 \Rightarrow 1$: всякое поле направлений локально записывается как поле направлений подходящего дифференциального уравнения. Переход к локальной системе координат, в которой уравнение имеет вид $dy/d\tau=0$, выпрямляет заданное поле.

Задача* 4. Можно ли выпрямить во всем расширенном фазовом пространстве $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ поле направлений уравнения $\dot{x}=v(t, x)$ с гладкой правой частью, заданной во всем этом пространстве?

Задача 5. Докажите, что систему координат теоремы 3 можно выбрать так, чтобы время не преобразовывалось ($\tau\equiv t$).

Задача 6. Выпрямить поле направлений уравнения $\dot{x}=x+t$ на всей плоскости сохраняющим время диффеоморфизмом $(t, x)\mapsto (t, y(t, x))$.

Задача 7. Можно ли выпрямить поле направлений уравнения $\dot{x}=x^2$ на всей плоскости сохраняющим время диффеоморфизмом?

*Ответ*. Нет.

Основная теорема о выпрямлении открыта, в сущности, Ньютоном. В знаменитом «втором письме» Ньютона к секретарю Королевского общества Ольденбургу (от 24 октября 1676 года) он зашифровал метод ее доказательства в виде второй (длинной) анаграммы (переписку с Лейбницем, жившим в Германии, Ньютон предпочитал вести через Ольденбурга). В современных терминах метод Ньютона состоит в следующем.

Пусть дано уравнение $\dot{x}=v(t, x)$. Будем искать выпрямляющий диффеоморфизм $y=h(t, x)$, для которого $y=x$ при $t=0$ (время не преобразовываем) Из условия $\dot{y}=0$ получаем для $h$ уравнение $\partial h/\partial t + (\partial h/\partial x) v \equiv 0$. Разложим $v$ и $h$ в ряды по степеням $t$:

$$h = h_0 + th_1 + \ldots, \qquad v = v_0 + tv_1 + \ldots$$

Тогда $h_0(x) \equiv x$, поэтому $\partial h/\partial x = E + th_{1*} + \ldots$ Подставим ряды для $h$ и для $v$ в уравнение для $h$. Развернем левую часть в ряд по $t$. Приравняем нулю коэффициенты при $t^0$, $t^1, \ldots$ в этом ряду (на основании единственности коэффициентов ряда Тейлора). Мы получим последовательно

$$h_1 + v_0 = 0, \qquad 2h_2 + h_{1*}v_0 + v_1 = 0, \quad \ldots$$

В уравнение для $h_k$ входят, кроме него, лишь производные от $h_m$ с меньшими номерами. Поэтому мы можем последовательно («рекуррентно») найти сначала $h_1$, потом $h_2$ и так все члены искомого ряда.

В этом состоит *метод Ньютона интегрирования дифференциальных уравнений с помощью рядов*. Чтобы применять этот метод, нужно было уметь разлагать данные функции в ряды. Для этого Ньютону пришлось открыть свою формулу бинома $(1+t)^a = 1 + at + \ldots$

Задача 8. Решить методом Ньютона уравнение $\dot{x} = x$ с начальным условием $\varphi(0) = 1$.

Решение. $\varphi = 1 + t\varphi_1 + t^2\varphi_2 + \ldots \Rightarrow \varphi_1 + 2\varphi_2 t + 3\varphi_3 t^2 + \ldots = 1 + \varphi_1 t + \varphi_2 t^2 + \ldots$, следовательно, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = \varphi_1/2$, $\varphi_3 = \varphi_2/3, \ldots$, откуда $\varphi_k = 1/k!$. Так и был впервые выведен ряд для экспоненты.

Все дальнейшее развитие анализа даже и сегодня следует по намеченному Ньютоном пути.

Доказательством сходимости построенных Ньютоном рядов много занимались в XIX веке. Сходимость рядов для $h$ в аналитическом случае была доказана Коши *). Теорема Коши была перенесена на случай конечной гладкости Пикаром, его доказательство и изложено в § 32.

Основная теорема 1 — утверждение такого же характера, как теоремы линейной алгебры о приведении квадратичных форм или матриц линейных операторов к нормальному виду. Она дает исчерпывающее описание локального поведения поля направлений, сводя все вопросы к тривиальному случаю параллельного поля.

В анализе родственной теоремой является теорема о неявной функции. Гладкое отображение $f: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ называется *невырожденным в точке* 0, если ранг производной в этой точке имеет максимальное возможное значение (т. е. равен меньшему из чисел $m$ и $n$). Пусть $f(0) = 0$.

Два таких отображения $f$, $g$ называются *локально эквивалентными в точке* 0, если одно из них переходит в другое под действием диффеоморфизмов пространств прообраза и образа, оставляющих 0 на месте: $h: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$, $k: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $f \circ h = k \circ g$.

Иными словами, *два отображения локально эквивалентны, если при подходящих выборах допустимых систем локальных координат в прообразе и в образе (с началом в 0) они записываются одинаковыми формулами.*

Теорема о неявной функции. *В окрестности невырожденных точек всякие два гладких отображения (пространств фиксированных размерностей $m$ и $n$) эквивалентны друг другу.*

---

*) На необходимость доказательства сходимости обратил внимание еще Эйлер, заметивший, что ряды, получаемые аналогичным путем в других задачах, иногда расходятся. Эйлер искал в виде ряда по $t$ решение уравнения $dx/dt = (x-t)/t^2$, равное 0 при $t=0$. Получился всюду расходящийся ряд $x = \sum (k-1)!\,t^k$.

В частности, *всякое отображение эквивалентно своей линейной части в невырожденной точке*. Поэтому сформулированная теорема является одной из многочисленных теорем о линеаризации.

В качестве локальной нормальной формы, к которой приводится отображение $f$ диффеоморфизмами $h$ и $k$, естественно выбрать следующую простейшую:

$$y_i = x_i \quad \text{при} \quad i \leqslant r, \quad y_i = 0 \quad \text{при} \quad i > r,$$

где $r = \min(m, n)$ — ранг производной $f$ в нуле, $x_i$ — координаты точки в пространстве-прообразе, $y_i$ — в пространстве образе. Иными словами, $f$ — вложение, если размерность прообраза меньше, чем образа, и расслоение — в противном случае.

Читатель, привыкший к более сложным формулировкам теоремы о неявной функции, легко проверит их эквивалентность приведенной простой геометрической формулировке.

Все перечисленные теоремы о нормальных формах описывают орбиты действий различных групп («замен переменных») на множествах (матриц, форм, полей, отображений, соответственно).

**2. Теоремы существования и единственности.** Из основной теоремы 1 о выпрямлении вытекает

Следствие 1. *Через каждую точку области, в которой задано гладкое поле направлений, проходит интегральная кривая.*

Доказательство. Рассмотрим выпрямляющий данное поле диффеоморфизм. Выпрямленное поле состоит из параллельных направлений. В нем через каждую точку проходит интегральная кривая (а именно прямая). Диффеоморфизм, обратный к выпрямляющему, переводит эту прямую в искомую интегральную кривую.

Следствие 2. *Две интегральные кривые гладкого поля направлений, имеющие общую точку, совпадают в окрестности этой точки.*

Доказательство. Для выпрямленного поля это очевидно, а выпрямляющий диффеоморфизм переводит интегральные кривые исходного поля в интегральные кривые выпрямленного.

Следствие 3. *Решение дифференциального уравнения $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x)$ с начальным условием $(t_0, x_0)$ из области гладкости правой части существует и единственно (в том смысле, что всякие два решения с общим начальным условием совпадают в некоторой окрестности точки $t_0$).*

Доказательство. Применим следствия 1 и 2 к полю направлений данного уравнения в расширенном фазовом пространстве. Получаем следствие 3.

Замечание. В следствии 3 и в дальнейшем $x$ — точка фазового пространства любой (конечной) размерности $m$. Это следствие называется *теоремой существования и единственности решений системы $m$ уравнений первого порядка.*

**3. Теоремы о непрерывной и дифференцируемой зависимости решений от начального условия.** Рассмотрим значение решения $\varphi$ дифференциального уравнения $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x)$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ в момент времени $t$ как функцию $\Phi$ от $(t_0, x_0; t)$ со значениями в фазовом пространстве.

Из основной теоремы 1 о выпрямлении вытекает

Следствие 4. *Решение уравнения с гладкой правой частью гладко зависит от начальных условий.*

Это означает, что *указанная выше функция* $\Phi$ *определена, непрерывна и гладка в окрестности каждой точки* $(t_0, x_0; t_0)$ (*класса* $C^r$, *если* $v$ — *класса* $C^r$).

Доказательство. Для простейшего уравнения $(v\equiv 0)$ это очевидно $(\Phi\equiv x_0)$. Общее уравнение сводится к нему диффеоморфизмом (подробности оставляются читателю).

Замечание. Теорема о дифференцируемости по начальному условию доставляет весьма эффективный метод исследования влияния малого возмущения начального условия на решение. Если при каком-либо начальном условии решение известно, то для определения отклонения решения с близким начальным условием от данного «невозмущенного» решения получается в первом приближении линейно однородное уравнение (уравнение в вариациях). Возникающая таким образом «теория возмущений» — просто один из вариантов метода рядов Ньютона.

Задача 1. Найти производную решения $\varphi$ уравнения $\dot{x}=x^2+x\sin t$ по начальному значению $\varphi(0)=a$ при $a=0$.

Решение. По следствию 4 решение разлагается по $a$ по формуле Тейлора, $\varphi=\varphi_0+a\varphi_1+\ldots$ (многоточие — малая порядка выше первого относительно $a$). Здесь $\varphi_0$ — невозмущенное решение (с нулевым начальным условием), $\varphi_1$ — искомая производная. Для нашего уравнения $\varphi_0\equiv 0$. Подставляя ряд в уравнение и приравнивая в левой и правой части члены с одинаковыми степенями $a$ (на основании единственности ряда Тейлора), получаем для $\varphi_1$ уравнение в вариациях $\dot{\varphi}_1=\varphi_1\sin t$ с начальным условием $\varphi_1(0)=1$ (почему?).

*Ответ.* $e^{1-\cos t}$.

Задача 2. Найти близкий к оси $x$ отрезок фазовой кривой обобщенной системы Лотка — Вольтерра $\dot{x}=x(1-ya(x, y))$, $\dot{y}=y(x-1)$, проходящей через точку $x=1$, $y=\varepsilon$ (с погрешностью порядка $\varepsilon^2$).

Решение. Уравнение фазовых кривых: $dy/dx=y(x-1)/(x(1-ya))$. Невозмущенное решение: $y\equiv 0$. Уравнение в вариациях: $dy/dx=y(x-1)/x$.

*Ответ.* $y=\varepsilon e^{x-1}/x$, *независимо от вида функции* $a$.

Задача 3. Найти производную решения уравнения маятника $\ddot{\theta}=-\sin\theta$ с начальным условием $\theta(0)=a$, $\dot{\theta}(0)=0$ по $a$ при $a=0$.

Решение. Для применения следствия 4 уравнение нужно записать в виде системы. Получающаяся система уравнений в вариациях может быть записана в виде одного уравнения второго порядка. Удобно выписывать не системы и их решения, а только эквивалентные им уравнения второго порядка и их решения. Невозмущенное решение: $\theta=0$. Уравнение в вариациях — это уравнение малых колебаний маятника, $\ddot{\theta}=-\theta$.

*Ответ.* $\cos t$.

Предостережение. Пользуясь приближенными формулами для возмущенного решения, полученными при помощи уравнения в вариациях, не следует забывать, что они дают хорошее приближение при фиксированном $t$ и малом отклонении $\varepsilon$ начального условия от невозмущенного: погрешность при фиксированном $t$ есть $O(\varepsilon^2)$, но неравномерно по $t\to\infty$ (константа в $O$ растет вместе с $t$).

Например, полученная в задаче 2 формула дала бы неверное представление о виде фазовых кривых обычной модели Лотка — Вольтерра, если бы мы стали применять ее для описания вида этих кривых в целом (как мы знаем из § 2, эти кривые замкнуты; далекая от оси $x$ часть кривой отнюдь не описывается ответом задачи 2).

Точно так же решение полного уравнения маятника с начальным условием $(a, 0)$ близко к решению уравнения малых колебаний (с тем же начальным условием) при фиксированном $t$: их разность порядка $O(a^3)$ (почему?). Однако при любом фиксированном $a \neq 0$ погрешность растет с ростом $t$ и при достаточно больших $t$ приближенное решение теряет связь с возмущенным (из-за различия периодов малых и истинных колебаний). Переставлять между собой предельные переходы $t \to \infty$ и $a \to 0$ нельзя!

Задача 4. Найти первый (линейный по $a$) член разложения в ряд Тейлора решения уравнения мягкого маятника $\ddot{x} = -x^3$ с начальным условием $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = a$.

Решение. Невозмущенное решение: $x \equiv 0$. Уравнение в вариациях. $\ddot{\varphi}_1 = 0$. Начальное условие: $\varphi_1(0) = 0$, $\dot{\varphi}_1(0) = 1$ (почему?).

*Ответ.* $x \approx at$.

Из теоремы о дифференцируемости следует, что ошибка этой приближенной формулы не превосходит $O(a^2)$ при каждом фиксированном $t$. Однако при любом фиксированном $a \neq 0$ приближение становится совершенно неудовлетворительным при достаточно больших $t$. Это видно, например, из того, что приближенное решение неограниченно растет, а настоящее описывает периодические колебания малой вместе с $a$ амплитуды (величина амплитуды порядка $\sqrt{a}$, по соображениям подобия).

Для оценки области применимости приближенной формулы можно сосчитать следующие приближения: $x = at + a^2\varphi_2 + a^3\varphi_3 + \ldots$ Подставляя в уравнение, получаем $a^2\ddot{\varphi}_2 + a^3\ddot{\varphi}_3 + \ldots = -a^3t^3 + \ldots$ Значит, $\varphi_2 \equiv 0$, $\ddot{\varphi}_3 = -t^3$, $\dot{\varphi}_3 = -t^4/4$, $\varphi_3 = -t^5/20$, $x \approx at - a^3t^5/20 + \ldots$ Второй член мал по сравнению с первым, если $a^2t^4/20 \ll 1$, т. е. $t \ll a^{-1/2}$. Иными словами, значение приближенного решения должно быть малым по сравнению с амплитудой истинного колебания, $at \ll \sqrt{a}$.

Задача 5. Доказать, что при указанном условии относительная погрешность приближенного решения действительно мала.

Решение. Это следует из соображений подобия. Квазиоднородные растяжения $X = e^s x$, $T = e^{-s}t$ переводят уравнение $\ddot{x} = -x^3$ в себя. Решение с начальным условием $(0, a)$ переходит в решение с начальным условием $(0, A = e^{2s}a)$. Приближенное решение $x \approx at$ переходит в $X \approx AT$. Выберем $s$ так, чтобы $A = 1$. При $A = 1$ решение $X \approx T$ имеет малую относительную погрешность, пока $T \ll 1$. Но растяжения не меняют относительных погрешностей. Значит, и относительная погрешность приближения $x \approx at$ мала при $T \ll 1$. Но $T = e^{-s}t$, $a = e^{-2s}$. Значит, $T \ll 1$ при $t \ll a^{-1/2}$. Таким образом, при малых $a$ приближение дает малую относительную погрешность, даже при очень больших $t$, лишь бы $t$ было мало по сравнению с большим числом $1/\sqrt{a}$.

В приложениях теории дифференциальных уравнений всегда приходится иметь дело с большим числом величин, некоторые из которых «очень малы», а некоторые «очень велики». Разобраться, что велико по сравнению с чем (т. е. в каком порядке делать предельные переходы), не всегда легко; исследование этого вопроса — порой полдела.

**4. Преобразование за время от $t_0$ до $t$.** Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x} = v(t, x)$ с правой частью, задающей гладкое поле направлений в области расширенного фазового пространства (любой конечной размерности $1 + m$).

Определение. Преобразованием за время от $t_0$ до $t$ называется отображение области фазового пространства в фазовое пространство, сопоставляющее начальному условию в момент $t_0$ значение решения с этим начальным условием в момент $t$ (рис. 70).

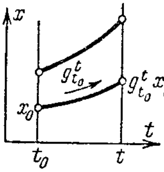

Рис. 70. Преобразование за время от $t_0$ до $t$.

Это преобразование обозначается $g_{t_0}^t$.

В обозначениях следствия 4

$$g_{t_0}^t x_0 = \Phi(t_0, x_0; t).$$

Из основной теоремы о выпрямлении вытекает

Следствие 5. *Преобразования за время от $t_0$ до $t$ для уравнения с гладкой правой частью*

1) *определены в окрестности каждой фазовой точки $x_0$ для $t$, достаточно близких к $t_0$;*

2) *являются локальными диффеоморфизмами (класса $C^r$ если правая часть класса $C^r$) и гладко зависят от $t$ и от $t_0$;*

3) *для $s$ и $t$, достаточно близких к $t_0$, имеет место тождество $g_{t_0}^t x = g_s^t g_{t_0}^s x$ (для всех $x$ из достаточно малой окрестности точки $x_0$);*

4) *при фиксированном $\xi$ функция $\varphi(t) = g_{t_0}^t \xi$ есть решение уравнения $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x)$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0) = \xi$.*

Следствие 5 с очевидностью вытекает из предыдущих следствий. Можно также воспользоваться выпрямлением, не меняющим времени. Для выпрямленного уравнения ($\dot{y} = 0$) все преобразования за время от $t_0$ до $t$ тождественны, поэтому свойства 1) — 4) выполнены.

Рассмотрим, в частности, случай автономного уравнения $\dot{x} = v(x)$. В этом случае имеет место очевидная

Теорема. *Отображение за время от $t_0$ до $t$ для автономного уравнения зависит только от интервала времени $t - t_0$ и не зависит от начального момента $t_0$.*

Доказательство. Сдвиг расширенного фазового пространства автономного уравнения вдоль оси $t$ переводит в себя поле направлений, а значит, переводит друг в друга интегральные кривые. При сдвиге на $s$ решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ переходит в решение $\psi$ с начальным условием $\psi(t_0 + s) = x_0$. При любом $t$ имеем $\psi(t+s) = \varphi(t)$. Следовательно, $g_{t_0}^t \equiv g_{t_0+s}^{t+s}$, что и утверждалось.

Обозначим отображение $g_{t_0}^{t_0+\tau}$ короче: $g^\tau$. Отображения $g^\tau$

1) определены при достаточно малых $|\tau|$ в окрестности избранной точки фазового пространства;

2) являются диффеоморфизмами этой окрестности в фазовое пространство и гладко зависят от $\tau$;

3) при всех достаточно малых $|s|$ и $|t|$ и при всех $x$ из некоторой окрестности избранной точки выполняется групповое свойство $g^s g^t x = g^{s+t} x$;

4) при фиксированном $\xi$ функция $\varphi(t) = g^t \xi$ есть решение уравнения $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$ с начальным условием $\varphi(0) = \xi$.

Семейство $\{g^t\}$ называется *локальным фазовым потоком* векторного поля $\boldsymbol{v}$.

Задача 1. Предположим, что уравнение $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x)$ имеет $T$-периодические коэффициенты ($\boldsymbol{v}(t+T, x) \equiv \boldsymbol{v}(t, x)$) и что все отображения за время от $t_0$ до $t$ для него определены всюду. Докажите, что преобразования за времена, кратные $T$, образуют группу: $g_0^{kT} = A^k$ при любом целом $k$. Какое из двух следующих соотношений верно: $g_0^{kT+s} = A^k g_0^s$, $g_0^{kT+s} = g_0^s A^k$?

*Ответ.* Второе.

**5. Теоремы о непрерывной и дифференцируемой зависимости от параметра.** Предположим, что правая часть данного уравнения $\dot{x} = \boldsymbol{v}(t, x; \alpha)$ гладко зависит от параметра $\alpha$, пробегающего некоторую область $A$ пространства $\mathbf{R}^a$.

Из основной теоремы 1 о выпрямлении вытекает

Следствие 6. *Значение в момент $t$ решения с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ гладко зависит от начального условия, времени и параметра $\alpha$.*

Обозначим это значение через $\Phi(t_0, x_0; \alpha; t)$. Следствие утверждает, что *функция $\Phi$ (со значениями в фазовом пространстве) определена, непрерывна и гладка в окрестности каждой точки $(t_0, x_0; \alpha_0, t_0)$ произведения расширенного фазового пространства на ось времени и на область изменения параметра (класса $C^r$, если правая часть класса $C^r$).*

Доказательство. Здесь полезна маленькая хитрость. Рассмотрим «расширенное уравнение» $\dot{x}=\boldsymbol{v}(t, x; \alpha)$, $\dot{\alpha}=0$ с фазовым пространством размерности $m+a$ (где $m=\dim\{x\}$). Решение этого уравнения с начальным условием $(t_0, x_0, \alpha)$ есть пара $(x=\varphi(t), \alpha=\alpha_0)$, первая компонента которой $\varphi$ — решение исходного уравнения при $\alpha=\alpha_0$, удовлетворяющее начальному условию $\varphi(t_0)=x_0$. По следствию 4 эта пара гладко зависит от $(t_0, x_0; t; \alpha_0)$. Следовательно, и первая компонента гладко зависит от этих аргументов, что и требовалось.

Замечание. Трюк с расширением сводит теорему о гладкой зависимости от параметра к гладкой зависимости от начальных условий. Обратно, из гладкой зависимости от параметра (при фиксированном начальном условии) легко вывести гладкую зависимость от начального условия. Достаточно сдвинуть уравнение, чтобы начальное условие превратить в параметр: $\boldsymbol{v}_\alpha(t, x)=\boldsymbol{v}(t, x-\alpha)$.

Теорема о дифференцируемой зависимости от параметра доставляет весьма эффективный метод приближенного решения уравнений, близких к «невозмущенным», для которых решение известно. Достаточно представить решение возмущенного уравнения в виде ряда Тейлора по степеням возмущения, подставить этот ряд в возмущенное уравнение и приравнять члены при одинаковых степенях возмущения. Свободный член ряда для решения будет известным решением невозмущенного уравнения. Для определения следующих членов получатся рекуррентно разрешаемые уравнения. Наиболее важное из них, уравнение для членов первой степени по возмущению — это неоднородное уравнение в вариациях (ср. § 3).

Описанный метод постоянно используется во всех приложениях теории дифференциальных уравнений под названием *теории возмущений* или *метод малого параметра*. Он является одной из разновидностей метода рядов Ньютона.

Задача 1. Найти производную решения логистического уравнения $\dot{x}=x(a-x)$ с начальным условием $x(0)=1$ по параметру $a$ при $a=1$.

Решение. Пусть $a=1+\varepsilon$, возмущенное решение $x=\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+O(\varepsilon^2)$. При подстановке в возмущенное уравнение получаем уравнение

$$\dot{\varphi}_0+\varepsilon\dot{\varphi}_1+\ldots=(\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+\ldots)(1+\varepsilon-\varphi_0-\varepsilon\varphi_1-\ldots).$$

Невозмущенное уравнение $\dot{x}=x(1-x)$ имеет решением $\varphi_0\equiv 1$. Приравнивая коэффициенты при $\varepsilon$, получаем уравнение в вариациях $\dot{\varphi}_1=1-\varphi_1$ с начальным условием $\varphi_1(0)=0$ (почему?).

*Ответ* $1-e^{-t}$.

Замечание. Физик приведенные вычисления оформил бы так. Ясно, что при $a=1+\varepsilon$ решение $x=1+y$ мало отличается от 1. Пренебрежем отличием $x$ перед скобкой в уравнении от 1. Получаем приближенное уравнение $\dot{x}\approx a-x$, $\dot{y}\approx\varepsilon-y$, откуда $y\approx\varepsilon(1-e^{-t})$.

Традиционная математическая «строгость» запрещает пренебрегать отличием от единицы первого $x$ в уравнении, но не второго. На самом деле «физическое» рассуждение правильно — оно просто является удобной стенограммой приведенных выше вычислений.

Задача 2. Найти производную решения уравнения маятника с постоянным крутящим моментом, $\ddot{\theta}=a-\sin\theta$ по моменту $a$ при $a=0$. В начальный момент маятник покоится $(\theta=\dot{\theta}=0)$.

Решение. $\theta=ay+\ldots$, $a\ddot{y}=a-ay$, $\ddot{y}=1-y$, $y-1=z$, $\ddot{z}=-z$, $z(0)=-1$, $\dot{z}(0)=0$, $z=-\cos t$, $y=1-\cos t$.

*Ответ.* В первом приближении эффект малого крутящего момента состоит в сдвиге положения равновесия в точку $a$, причем маятник совершает малые колебания с частотой 1 вокруг этой точки; поэтому производная решения по $a$ равна $1-\cos t$.

Предостережение. Строго говоря, все наши приближенные решения обоснованы теоремой о дифференцируемости только при малых $|t|$. В действительности нетрудно обосновать их для любого конечного интервала времени $|t|\leqslant T$, если только величина возмущения $\varepsilon$ не превосходит некоторой, зависящей от $T$, величины. На этом интервале времени погрешность первого приближения теории возмущений оценивается сверху величиной $O(\varepsilon^2)$, но константа в $O$ растет с ростом $T$.

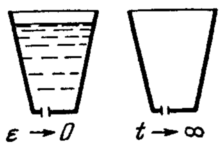

Рис. 71. Асимптотическое поведение решений возмущенного уравнения.

Крайне рисковано распространять полученные таким образом выводы на бесконечный интервал времени: переставлять предельные переходы $t\to\infty$ и $\varepsilon\to 0$ нельзя.

Пример. Рассмотрим ведро с водой, в дне которого имеется маленькая дырка радиуса $\varepsilon$ (рис. 71). Для любого $T$ существует столь малое $\varepsilon$, что в течение большого времени $(t<T)$ ведро почти полно. Но при любом фиксированном $\varepsilon>0$ ведро становится пустым, когда время стремится к бесконечности.

Задача 3. Найти производную решения уравнения малых колебаний маятника $\ddot{\theta}=-\omega^2\theta$ с начальным условием $\theta(0)=1$, $\dot{\theta}(0)=0$ по параметру $\omega$ при $\omega=1$.

Решение. Точное решение дается формулой $\theta=\cos\omega t$. Следовательно, производная равна $-t\sin t$.

Если бы мы знали точное решение только при $\omega=1$ и стали бы искать решение для $\omega=1+\varepsilon$ методом малого параметра, то мы получили бы $\theta\approx\cos t-\varepsilon t\sin t$. Мы могли бы подумать, что истинное решение не ограничено, если бы забыли, что приближением можно пользоваться только при малых $\varepsilon t$.

**6. Теоремы о продолжении.** Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{x}=v(t,x)$, заданное гладким полем направлений в области $U$ расширенного фазового пространства. Пусть $\Gamma$ — подмножество области $U$.

Определение. Решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ *продолжается вперед* (*назад*) *до* $\Gamma$, если существует решение с тем же начальным условием, график которого пересекается с $\Gamma$ в точке, где $t\geqslant t_0$ $(\leqslant t_0)$.

Решение *продолжается вперед (назад) неограниченно*, если существует решение с тем же начальным условием, определенное при всех $t \geqslant t_0$ (при всех $t \leqslant t_0$).

Пример. Ни одно решение уравнения $\dot{x} = x^2 + 1$ не продолжается неограниченно ни вперед, ни назад.

Определение. Множество называется *компактом*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Компактные подмножества евклидова пространства — это его замкнутые и ограниченные множества.

*Границей* множества называется множество точек, в любой окрестности которых есть как точки, принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему точки.

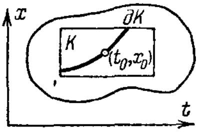


Рис. 72. Продолжение решения до границы компакта.

Из основной теоремы о выпрямлении очевидно вытекает.

Следствие 7. *Решение с начальным условием из компакта в расширенном фазовом пространстве можно продолжить вперед и назад до границы этого компакта.*

Иными словами, *через любую внутреннюю точку компакта проходит интегральная кривая, пересекающая границу компакта как с одной, так и с другой стороны от начальной точки* (рис. 72).

*Продолжение единственно в том смысле, что всякие два решения с общим начальным условием совпадают всюду, где оба определены.*

Задача 1 Верно ли, что интегральную кривую любого гладкого поля направлений в области евклидова пространства, проходящую через точку компакта $K$, можно продолжить до его границы?

*Ответ.* Нет, пример — поле направлений фазовых кривых маятника в области $x_1^2 + x_2^2 > 0$, $K$ — кольцо $1 \leqslant x_1^2 + x_2^2 \leqslant 2$.

Таким образом, для справедливости теоремы существенно, что поле направлений в расширенном фазовом пространстве «невертикально».

Доказательство следствия 7. Вначале докажем единственность. Рассмотрим точную верхнюю грань значений времени, при которых два решения с общим начальным условием совпадают. Левее этой точки решения совпадают. Если в этой точке оба определены, то они совпадают и в ней, так как они непрерывны. Но тогда они совпадают и правее (по локальной теореме единственности). Значит, указанная точка — конец одного из интервалов определения. Это доказывает единственность продолжения вперед (для продолжения назад рассуждения аналогичны). Теперь построим продолжение.

По локальной теореме существования у каждой точки расширенного фазового пространства есть такая окрестность, что решение с начальным условием в любой из точек этой окрестности продолжается вперед и назад на общий для всех точек этой окрестности интервал времени. Из покрытия компакта такими окрестностями выбираем конечное подпокрытие. Из конечного набора интервалов времени, соответствующих выбранным окрестностям, выбираем самый короткий. Обозначим его через $\varepsilon$.

Решение с начальным условием в исходной точке продолжается вперед на $\varepsilon$ (так как эта точка принадлежит компакту и, значит, покрыта одной из наших окрестностей). Возьмем значение этого решения через время $\varepsilon/2$ после исходного момента. Если соответствующая ему точка интегральной кривой еще лежит в компакте, то решение с начальным условием в ней продолжается вперед еще на $\varepsilon$ (итого на $3\varepsilon/2$ от исходного момента). Опять сдвигаем время на $\varepsilon/2$ (т. е. рассматриваем значение продолженного решения в момент через $\varepsilon$ после исходного) и опять продолжаем решение на $\varepsilon$, и т. д. Через конечное число шагов интегральная кривая покинет компакт (так как его проекция на ось $t$ не может быть неограниченной, а $t$ на каждом шагу увеличивается на $\varepsilon/2$). Следовательно, наступит момент, когда интегральная кривая пересечет границу компакта, что и требовалось.

З а д а ч а 2. Докажите, что любое решение уравнения $\dot{x}=v(t, x)$, заданного полем направлений в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$, продолжается неограниченно, если $v$ растет на бесконечности не быстрее, чем первая степень $x$, т. е. если $|v(t, x)|\leqslant k|x|$ при всех $t$ и $|x|\geqslant r$, где $r$ и $k$ — постоянные.

У к а з а н и е. Сравнивая с движением в поле $\dot{x}=kx$, построить компакты, до границ которых придется добираться сколь угодно долго.

Предположим теперь, что область определения правой части уравнения $\dot{x}=v(t, x)$ содержит цилиндр $\mathbf{R}\times K$, где $K$ — компакт в *фазовом* пространстве.

О п р е д е л е н и е. Решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ продолжается вперед (назад) до границы компакта $K$, если существует решение с тем же начальным условием, принимающее значения из границы компакта $K$ при некотором $t\geqslant t_0$ $(t\leqslant t_0)$.

Из следствия 7 очевидно вытекает

С л е д с т в и е 8. *Решение с начальным значением из данного компакта $K$ в фазовом пространстве продолжается вперед (назад) либо неограниченно, либо до границы компакта $K$.*

П р и м е р. Решение уравнения маятника $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=-x_1$ с начальным условием $x_1=1$, $x_2=0$ не продолжается до границы компакта $x_1^2+x_2^2\leqslant 2$.

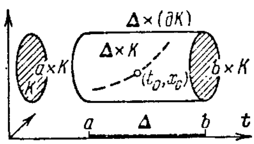

Рис. 73. Продолжение до границы фазового компакта.

Д о к а з а т е л ь с т в о с л е д с т в и я 8. Рассмотрим отрезок $\Delta=[a, b]$ оси $t$, содержащий $t_0$. Цилиндр $\Delta\times K$ в расширенном фазовом пространстве (рис. 73) компактен. По предыдущей теореме решение продолжается до его границы. Эта граница состоит из двух «торцов» ($a\times K$ и $b\times K$) и «боковой поверхности» $\Delta\times(\partial K)$ (по формуле Лейбница, $\partial(\Delta\times K)=(\partial\Delta)\times K+\Delta\times(\partial K)$). Если при любом $b>t_0$ интегральная кривая пересечет торец $b\times K$, то решение продолжается вперед неограниченно; если же при каком-либо $b$ пересечет боковую поверхность — то до границы компакта.

С л е д с т в и е 9. *Решение автономного уравнения $\dot{x}=\boldsymbol{v}(x)$ с начальным значением из любого компакта фазового пространства продолжается вперед (назад) либо неограниченно, либо до границы этого компакта.*

Ибо цилиндр $\mathbf{R}\times K$ принадлежит расширенному фазовому пространству автономного уравнения для любого компакта $K$ в фазовом пространстве.

З а д а ч а 3. Докажите, что векторное поле $\boldsymbol{v}$ определяет фазовый поток, если все решения уравнения $\dot{x}=\boldsymbol{v}(x)$ продолжаются неограниченно.

**7. Выпрямление векторного поля.** Рассмотрим гладкое векторное поле $\boldsymbol{v}$ в области $U$.

*Выпрямлением* поля называется диффеоморфизм, превращающий его в поле параллельных векторов одинаковой длины в евклидовом пространстве (рис. 74).

Из основной теоремы о выпрямлении легко вытекает

С л е д с т в и е 10. *Всякое гладкое векторное поле локально выпрямляемо в окрестности каждой неособой точки (точки, где вектор поля отличен от нуля).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Векторы поля в окрестности неособой точки отличны от нуля и, значит, определяют поле направлений в этой области

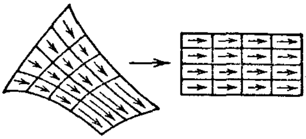

Рис. 74. Выпрямление векторного поля.

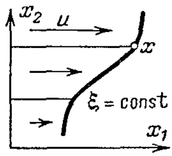


Рис. 75. Построение выпрямляющих координат.

фазового пространства. По основной теореме это поле выпрямляемо. Выполним выпрямляющий диффеоморфизм. Мы добьемся параллельности векторов поля, но их длины будут, вообще говоря, зависеть от точки. В выпрямляющих координатах уравнение, заданное нашим полем, примет вид

$$\dot{x}_1=u(x),\ \dot{x}_2=\ldots=\dot{x}_n=0,\ \text{причем}\ u(0)\neq 0.$$

Введем вместо $x_1$ новую координату $\xi$, определив $\xi(x)$ как время движения от плоскости $x_1=0$ до точки $x$ (рис. 75). Решая уравнение, находим это время по формуле Ньютона: $\xi(x)=\int\limits_0^{x_1}\frac{d\eta}{u(\eta;\ x_2,\ \ldots,\ x_n)}$. В координатах $(\xi,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ уравнение принимает вид $\dot{\xi}=1$, $\dot{x}_2=\ldots=\dot{x}_n=0$, т. е. поле выпрямлено.

З а м е ч а н и е. Теорема о выпрямлении векторного поля — еще одна переформулировка теоремы о выпрямлении поля направлений (чтобы вывести вторую из первой, достаточно выбрать по вектору, гладко зависящему от точки, на прямых данного поля направлений, что локально всегда легко сделать).

Вот еще две очевидные переформулировки следствия 10:

Следствие 11. *Любые два гладких векторных поля в областях одинакового числа измерений переводятся друг в друга диффеоморфизмами в достаточно малых окрестностях любых неособых точек.*

Следствие 12. *Всякое дифференциальное уравнение $\dot{x}=v(x)$ может быть записано в нормальной форме $\dot{x}_1=1$, $\dot{x}_2=\ldots=\dot{x}_n=0$ при подходящем выборе координат в достаточно малой окрестности любой неособой точки поля.*

Иными словами, *всякое уравнение $\dot{x}=v(x)$ локально эквивалентно простейшему уравнению $\dot{x}=v$ ($v\neq 0$ не зависит от $x$) в окрестности любой неособой точки.*

Задача 1. Выпрямить векторное поле фазовой скорости маятника $x_2\partial/\partial x_1 - x_1\partial/\partial x_2$ в окрестности точки $x_1=1$, $x_2=0$.

Решение. Годятся полярные координаты. Пусть $x_1=r\cos\theta$, $x_2=-r\sin\theta$ ($r>0$, $|\theta|<\pi$). В этих координатах уравнение имеет вид $\dot{r}=0$, $\dot{\theta}=1$, поэтому поле выпрямлено: оно имеет вид $\partial/\partial\theta$.

Задача 2. Выпрямить поля

1) $x_1\partial/\partial x_1+2x_2\partial/\partial x_2$ при $x_1>0$;
2) $\partial/\partial x_1+\sin x_1\partial/\partial x_2$;
3) $x_1\partial/\partial x_1+(1-x_1^2)\,\partial/\partial x_2$ при $x_1^2<1$.

## § 8. Применения к уравнениям выше первого порядка

Основные теоремы о системах любого числа уравнений любого порядка выводятся здесь из аналогичных теорем для систем уравнений первого порядка.

**1. Эквивалентность уравнения $n$-го порядка и системы $n$ уравнений первого порядка.**

Определение. *Дифференциальным уравнением $n$-го порядка* называется уравнение

$$\frac{d^nx}{dt^n}=F\left(t;\ x,\ \frac{dx}{dt},\ \ldots,\ \frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right), \tag{1}$$

где $F$ — дифференцируемая (класса $C^r$, $r\geqslant 1$) функция, заданная в области $U$ пространства размерности $1+n$ (время $t$ и производные неизвестной функции порядков от 0 до $n-1$ включительно).

*Решением* уравнения (1) называется $C^n$-отображение $\varphi\colon I\to\mathbf{R}$ интервала вещественной оси в вещественную ось, для которого

1) точка с координатами $(\tau,\ \varphi(\tau),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(\tau))$ принадлежит области $U$ при любом $\tau$ из $I$;

2) при любом $\tau$ из $I$

$$\left.\frac{d^n\varphi}{dt^n}\right|_{t=\tau}=F(\tau;\ \varphi(\tau),\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(\tau)).$$

Пример. Решением уравнения малых колебаний маятника, $\ddot{x}=-x$, является функция $\varphi(t)=\sin t$, а также функция $\varphi(t)=\cos t$

(рис. 76). Следовательно, *графики решений уравнения второго порядка могут пересекаться* (в отличие от графиков решений уравнения первого порядка, т е. интегральных кривых, которые по теореме единственности либо не пересекаются, либо совпадают на целом интервале)

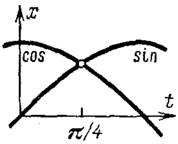


Рис 76. Графики двух решений уравнения второго порядка

Фазовым пространством уравнения маятника является плоскость с координатами $(x, \dot{x})$: задание этих двух чисел в начальный момент определяет все движение маятника Рассмотрим вопрос о размерности фазового пространства для общего уравнения $n$-го порядка (1): сколько чисел нужно задать в начальный момент, чтобы однозначно определить решение во все моменты времени?

Теорема. *Уравнение $n$-го порядка* (1) *эквивалентно системе $n$ уравнений первого порядка*

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \ldots, \quad \dot{x}_{n-1} = x_n, \qquad \dot{x}_n = F(t;\ x_1, \ \ldots, \ x_{n-1}) \tag{2}$$

*в том смысле, что если $\varphi$ — решение уравнения* (1), *то вектор из производных* $(\varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(n-1)})$ — *решение системы* (2), *а если* $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — *решение системы* (2), *то* $\varphi_1$ — *решение уравнения* (1)

Доказательство очевидно.

Итак, фазовое пространство процесса, описываемого дифференциальным уравнением порядка $n$, имеет размерность $n$: все течение процесса ($\varphi$) описывается заданием в начальный момент времени $t_0$ набора $n$ чисел — значений производных $\varphi$ порядка меньше $n$ в точке $t_0$.

Замечание. Причина, по которой для однозначного определения решения уравнения $n$-го порядка нужно задать в начальный момент $n$ начальных условий, становится, быть может, понятнее, если рассмотреть дифференциальное уравнение как предел разностных.

Зафиксируем число $h > 0$ (называемое *шагом*). *Первой разностью* данной функции $\varphi$ с шагом $h$ называется функция, значение которой в точке $t$ равно $\varphi(t+h) - \varphi(t)$. Первая разность обозначается $\Delta\varphi$. Вторая разность $\Delta^2\varphi$ определяется как $\Delta(\Delta\varphi)$.

Задача 1 Доказать, что $(\Delta^2\varphi)(t) = \varphi(t+2h) - 2\varphi(t+h) + \varphi(t)$.

Аналогично определяется $n$-я разность $\Delta^n\varphi = \Delta(\Delta^{n-1}\varphi)$.

Задача 2. Доказать, что $\Delta^n\varphi \equiv 0$, если и только если $\varphi(t + kh)$ — многочлен степени меньше $n$ от $k \in \mathbf{Z}$.

Например, если выписать подряд значения $k^2$, строчкой ниже — их разности, затем разности разностей, то в третьей строке будет всюду стоять число 2; если начать с $k^3$, то в четвертой строке — всюду 6, и т д.:

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 \\
& 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & \\
1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 \\
& 7 & & 19 & & 37 & & 61 & \\
& & 12 & & 18 & & 24 & & \\
& & & 6 & & 6 & & &
\end{array}$$

*Разностное уравнение первого порядка* — это уравнение вида $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}=v(t,\varphi)$, т. е. $\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}=v(t,\varphi(t))$. Из такого уравнения, зная одно число $\varphi(t_0)$, можно найти $\varphi(t_0+h)$, по нему $\varphi(t_0+2h)$, и т. д. При $h\to 0$ разностное уравнение переходит в дифференциальное. Поэтому неудивительно, что и для дифференциального уравнения первого порядка решение определяется значением в начальный момент одного числа.

*Разностное уравнение второго порядка* имеет вид

$$\frac{\Delta^2\varphi}{(\Delta t)^2}=F\left(t;\ \varphi,\ \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\right),$$

т. е.

$$\frac{\varphi(t+2h)-2\varphi(t+h)+\varphi(t)}{h^2}=F\left(t;\,\varphi(t),\,\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}\right)$$

Зная значения $\varphi$ в два разделенных интервалом $h$ момента времени, мы можем найти из этого уравнения значение $\varphi$ еще через время $h$. Итак, все значения $\varphi(t_0+kh)$ определяются двумя первыми из них.

При $h\to 0$ разностное уравнение второго порядка переходит в дифференциальное. Поэтому неудивительно, что и для дифференциального уравнения второго порядка решение определяется заданием в начальный момент двух чисел ($n$ чисел для уравнения $n$-го порядка). Теорема на стр. 86 как раз и обосновывает возможность перехода к пределу при $h\to 0$.

Задача 3. Доказать, что уравнению $d^nx/dt^n=0$ удовлетворяют все многочлены степени меньше $n$ и только они.

Задача 4. Найти размерность многообразия решений уравнения Гельмгольца $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+u=0$ в области $x^2+y^2>0$, зависящих только от расстояния до начала координат.

Решение. Искомая функция от $r$ должна удовлетворять уравнению второго порядка, следовательно, решения определяются двумя числами.

**2. Теоремы существования и единственности.** Из теоремы п. 1 и теорем существования и единственности для системы уравнений первого порядка (§ 7) вытекает

Следствие. *Пусть* $u=(u_0;\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ — *точка области* $U$ *определения правой части уравнения* (1). *Решение* $\varphi$ *уравнения* (1) *с начальным условием*

$$\varphi(u_0)=u_1,\quad \dot\varphi(u_0)=u_2,\ \ldots,\ \varphi^{(n-1)}(u_0)=u_n \tag{3}$$

*существует и единственно (в том смысле, что всякие два решения с общим начальным условием совпадают на пересечении интервалов определения).*

При записи начального условия уравнения (1) обычно вместо $\varphi$ пишут $x$.

Пример. Решения $\cos t$ и $\sin t$ уравнения маятника $\ddot{x}=-x$ удовлетворяют при $t=\pi/4$ начальным условиям $x(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, $\dot{x}(\pi/4)=-\sqrt{2}/2$ и $x(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, $\dot{x}(\pi/4)=\sqrt{2}/2$ соответственно (рис. 76). Эти начальные условия различны, поэтому не удивительно, что графики решений пересекаются, не совпадая. Теорема единственности для уравнения второго порядка запрещает несовпадающим графикам лишь иметь в точке пересечения общую касательную. Графики решений одного уравнения третьего порядка могут касаться, но тогда обязаны иметь в точке касания разные кривизны и т. д.

Задача 1. Пусть известно, что уравнение (1) имеет решениями функции $t$ и $\sin t$. Найти порядок уравнения $n$.

Решение. У функций $t$ и $\sin t$ в нуле совпадают значения производных порядков 0, 1 и 2. Если бы они удовлетворяли общему уравнению третьего порядка, они совпадали бы по теореме единственности. Уравнение порядка $n \geqslant 4$, которому удовлетворяют обе функции, придумать несложно, например, $x^{(n)}+x^{(n-2)}=0$.

*Ответ.* $n \geqslant 4$.

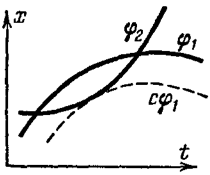


Рис. 77. Невозможное расположение графиков.

Задача 2. Могут ли графики двух решений уравнения $\ddot{x}+p(t)\dot{x}+q(t)x=0$ иметь изображенный на рис. 77 вид?

Решение. Нет, так как решения $c\varphi_1$ и $\varphi_2$ имеют общее начальное условие и не совпадают.

Задача 3. Рассмотрим уравнение $2x=t^2\ddot{x}$. Решения $x\equiv 0$ и $x=t^2$ оба удовлетворяют начальному условию $x=\dot{x}=0$ при $t=0$. Почему они не совпадают?

Решение. Теорема единственности относится к уравнениям вида (1), т. е. уравнениям, разрешенным относительно старшей производной, а рассматриваемое уравнение нельзя записать в таком виде (в окрестности нуля).

Задача 4. Решить разностное уравнение $\Delta^3\varphi=0$ с начальным условием $\varphi(0)=0$, $(\Delta\varphi)(0)=0$, $(\Delta^2\varphi)(0)=2$ при $t$, кратных шагу $h=1$.

Решение. $\varphi=a+bt+ct^2$, $\Delta\varphi=b+2ct+c$, $\Delta^2\varphi=2c$. Из начальных условий $c=1$, $b=-1$, $a=0$.

*Ответ.* $\varphi=t^2-t$.

**3. Теоремы дифференцируемости и продолжения.** Поскольку уже установлена эквивалентность уравнения $n$-го порядка системе уравнений первого порядка, мы заключаем, что решение уравнения $n$-го порядка гладко зависит от начальных условий и параметров (если правая часть гладко зависит от параметров); читатель легко сформулирует и теорему о продолжении.

Задача 1. Найти в первом приближении по $\varepsilon$ влияние малого сопротивления среды $\varepsilon F(x, \dot{x})$ на движение падающего с высоты $h$ тела.

Решение. Речь идет об уравнении $\ddot{x}=-g+\varepsilon F(x, \dot{x})$ и начальных условиях $x(0)=h$, $\dot{x}(0)=0$.

По теореме о дифференцируемости по параметру, решение имеет вид $\varphi=\varphi_0+\varepsilon\varphi_1+\ldots$, где $\varphi_0(t)=h-gt^2/2$. Подставляя $x=\varphi(t)$ в уравнение и приравнивая члены ряда по $\varepsilon$, находим $\ddot{\varphi}_1=F(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$, откуда $\varphi_1(t)=\int_0^t\int_0^s F(\varphi_0(\tau), \dot{\varphi}_0(\tau))\,d\tau\,ds$. Например, если $F=-\dot{x}$, то $\varphi_1=gt^3/6$. Значит, отставание во времени падения в первом приближении пропорционально высоте: $-\varepsilon\varphi_1/\dot{\varphi}_0=\varepsilon t^2/6=\varepsilon h/3g$.

Задача 2. Докажите, что все решения уравнения маятника, $\ddot{\theta}=-\sin\theta$ продолжаются неограниченно.

Задача 3. При каких натуральных $k$ неограниченно продолжаются все решения уравнения $\ddot{x}=x^k$?

*Ответ.* Только при $k=1$.

**4. Системы уравнений.** Под *системой дифференциальных уравнений* мы будем понимать систему уравнений относительно $n$ неизвестных функций

$$\frac{d^{n_i}x_i}{dt^{n_i}}=F_i(t;\ x,\ \ldots),\qquad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

где среди аргументов каждой из функций $F_i$ находятся независимое переменное $t$, зависимые переменные $x_j$ и их производные порядков меньше $n_j$ $(j=1,\ \ldots,\ n)$ соответственно.

Решение системы определяется, как в п. 1. Следует подчеркнуть, что решением системы является векторная функция, заданная на интервале. Таким образом, $(\varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_n)$ — это не $n$ решений, а одно решение системы $n$ уравнений — замечание, равно относящееся к системам алгебраических и дифференциальных уравнений.

Прежде всего выясним, какое фазовое пространство соответствует системе (4).

Т е о р е м а. *Система* (4) *эквивалентна системе* $N=\sum\limits_{i=1}^{n} n_i$ *уравнений первого порядка.*

Иными словами: *размерность фазового пространства системы* (4) *равна* $N$.

Для доказательства надо ввести в качестве координат в фазовом пространстве производные $x_j$ порядка меньше $n_j$.

Например, пусть $n=n_1=n_2=2$. Тогда система имеет вид

$$\ddot{x}_1=F_1(t;\ x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2),\quad \ddot{x}_2=F_2(t;\ x_1,\ \dot{x}_1,\ x_2,\ \dot{x}_2)$$

и эквивалентна системе из четырех уравнений

$$\dot{x}_1=x_3,\ \dot{x}_2=x_4,\ \dot{x}_3=F_1(t;\ x),\ \dot{x}_4=F_2(t;\ x),$$

где $x=(x_1,\ x_3,\ x_2,\ x_4)$.

П р и м е р. Система $n$ дифференциальных уравнений второго порядка механики Ньютона

$$m_i\ddot{q}_i=-\frac{\partial U}{\partial q_i},\qquad i=1,\ \ldots,\ n, \tag{5}$$

где $U$ — потенциальная энергия, $m_i>0$ — массы, эквивалентна системе $2n$ уравнений Гамильтона

$$\dot{q}_i=\frac{\partial H}{\partial p_i},\quad \dot{p}_i=-\frac{\partial H}{\partial q_i},\qquad i=1,\ \ldots,\ n,$$

где $p_i=m_i\dot{q}_i$, а $H=T+U$ — полная энергия $(T=\sum m_i\dot{q}_i^2/2=\sum p_i^2/(2m_i)$ — кинетическая энергия). Таким образом, размерность фазового пространства системы (5) равна $2n$.

Теоремы о существовании, единственности, дифференцируемости по начальным условиям и параметрам, а также теоремы о продолжении переносятся на системы вида (4) автоматически: для однозначного определения решения достаточно в начальный момент задать производные $x_i$ порядка меньше $n_i$. Например, для системы уравнений Ньютона (5) достаточно задать $n$ координат и $n$ скоростей в начальный момент.

Задача 1. На материальную точку массы $m$, движущуюся относительно Земли со скоростью $\boldsymbol{v}$, действует (в связанной с Землей системе координат) сила Кориолиса $\boldsymbol{F}=2m[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{\Omega}]$, где $\boldsymbol{\Omega}$ — вектор угловой скорости Земли. Камень брошен (без начальной скорости) в шахту глубиной 10 м на широте Ленинграда ($\lambda=60°$). Насколько сила Кориолиса отклонит его от вертикали?

Решение. По условию $\ddot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{g}+2[\dot{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{\Omega}]$. Величину условий скорости Земли, $\Omega\approx 7{,}3\cdot 10^{-5}c^{-1}$, считаем малым параметром. По теореме о дифференцируемости, $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0+\Omega\boldsymbol{y}+O(\Omega^2)$, $\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{g}t^2/2$. Подставляя $\boldsymbol{x}$ в уравнение, получаем $\Omega\ddot{\boldsymbol{y}}=2[\boldsymbol{g}t, \boldsymbol{\Omega}]$, $\boldsymbol{y}(0)=\dot{\boldsymbol{y}}(0)=0$. Значит, $\Omega\boldsymbol{y}=[\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\Omega}]\,t^3/3$. Следовательно, $[\Omega\boldsymbol{y}]=\dfrac{2t}{3}\,|h|\,|\Omega|\cos\lambda$.

*Ответ*. Камень отклонится на восток на 0,3 мм.

Замечание. Задача об отклонении камня сыграла выдающуюся роль в истории физики. Эффект отклонения камня на восток (а не на запад, как это кажется на первый взгляд) был предсказан Ньютоном в письме к Гуку от 28 ноября 1679 года; Ньютон просил Гука проделать эксперимент с камнем для доказательства вращения Земли, тогда не общепризнанного.

В ответном письме (от 6 января 1680 года) Гук сформулировал закон всемирного тяготения. Ньютон в то время неточно представлял себе орбиту камня. Возникшая дискуссия заставила Ньютона отказаться от его намерения оставить занятия наукой и послужила поводом написания «Математических начал натуральной философии» — знаменитых «Principia», с которых началась современная физика.

В письме Гука правильно указан показатель $-2$ в законе тяготения (в Principia Ньютон пишет, что Врен, Гук и Галлей независимо друг от друга нашли, что третий закон Кеплера соответствует именно этому показателю). Кроме закона Кеплера, Гук ссылается на наблюдения Галлея об отставании маятниковых часов при поднятии на гору Св. Елены. В письме Гука явно сказано, что камень движет та же сила, которая заставляет планеты двигаться по кеплеровым эллипсам; критикуя нарисованную Ньютоном спираль, Гук утверждал, что орбитой камня в отсутствие сопротивления воздуха будет «эксцентрический эллиптоид».

Ньютон истолковал эллиптоид как эллипс и заинтересовался, как Гук нашел орбиту. После больших трудов ему удалось доказать, что орбита действительно эллипс (как при падении на Землю, так и внутри шахты). Доказательство было (и остается) столь трудным математически, что Ньютон пришел к заключению, что Гук «утверждал больше, нежели знал». В дальнейшем он никогда не ссылался на письмо Гука. В письме к Галлею о своей дискуссии с Гуком Ньютон дал описание разницы между подходами математика и физика к естествознанию, остающееся актуальным и сегодня: «Математики, которые все открывают и устанавливают и проделывают всю работу, должны довольствоваться ролью сухих вычислителей и чернорабочих; другой, который всего лишь все схватывает и на все претендует, присваивает себе все изобретения как своих последователей, так и своих предшественников».

Гук бросал стальные шары с высоты 10 м и утверждал, что наблюдал систематическое отклонение на юго-восток (что практически невозможно из-за крайней малости этого отклонения по сравнению с аэродинамическими эффектами). В отсутствие сопротивления камень внутри шахты в однородной Земле подчинялся бы закону Гука (сила притяжения прямо пропорциональна расстоянию до центра Земли), но сам Гук вряд ли мог об этом знать. Орбита камня в этом случае — эллипс (в невращающейся с Землей системе координат), с центром в центре Земли и малой полуосью около 400 км (почему?); орбита проходится за то же время, за которое облетает Землю близкий спутник, т. е. за полтора часа (почему?).

Задача 2. Из газет известно, что космонавт Леонов, выйдя в открытый космос, бросил к Земле заглушку от кинокамеры. Куда она полетела?

Решение. Это задача о влиянии *малого* возмущения начального условия на решение. Уравнение движения по закону всемирного тяготения можно записать в виде

$\ddot{\boldsymbol{r}}=-\gamma \boldsymbol{r}/r^3$. Движение и космонавта, и заглушки происходит в плоскости круговой орбиты, поэтому можно считать, что $\boldsymbol{r}\in\mathbb{R}^2$. Запишем уравнение движения в полярных координатах. Для этого введем орты $\boldsymbol{e}_r=\boldsymbol{r}/r$ и перпендикулярный ему $\boldsymbol{e}_\varphi$, направленный вперед вдоль круговой орбиты. Ясно, что $\dot{\boldsymbol{e}}_r=\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, $\dot{\boldsymbol{e}}_\varphi=-\dot\varphi\boldsymbol{e}_r$. Дифференцируя величину $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}_r$, мы находим $\dot{\boldsymbol{r}}=\dot r\boldsymbol{e}_r+r\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$, $\ddot{\boldsymbol{r}}=\ddot r\boldsymbol{e}_r+2\dot r\dot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+r\ddot\varphi\boldsymbol{e}_\varphi-r\dot\varphi^2\boldsymbol{e}_r$. Следовательно, *уравнение Ньютона в полярных координатах* принимает вид системы двух уравнений второго порядка

$$\ddot r-r\dot\varphi^2=-\gamma r^{-2},\qquad r\ddot\varphi+2\dot r\dot\varphi=0.$$

Выберем за единицу длины радиус круговой орбиты станции ($\approx 6400$ км). Единицу времени выберем так, чтобы угловая скорость движения по орбите была равна единице. Тогда движение по орбите описывается формулами $r=1$, $\varphi=t$, и, значит, $\gamma=1$. Начальные условия для станции (и космонавта): $r(0)=1$, $\dot r(0)=0$, $\varphi(0)=0$, $\dot\varphi(0)=1$. Начальные условия для заглушки отличаются лишь тем, что $\dot r(0)=-v$ — скорость броска, т. е. начальная скорость заглушки относительно космонавта. Предположим, что скорость броска, скажем, 10 м/с. Тогда $v\approx 1/800$ (так как наша единица скорости близка к первой космической скорости, т. е. составляет примерно 8 км/с).

Величина 1/800 мала по сравнению с 1, поэтому мы должны исследовать влияние *малого изменения начального условия* на невозмущенное решение $r=1$, $\varphi=t$. По теореме о дифференцируемости по начальному условию, решение, близкое к невозмущенному, ищем в виде $r=1+r_1+\ldots$, $\varphi=t+\varphi_1+\ldots$, где точки означают малые порядка $v^2$. Подставляя эти выражения в уравнения Ньютона с $\gamma=1$ и отбрасывая малые порядка $v^2$, получаем *уравнения в вариациях*

$$\ddot r_1=3r_1+2\dot\varphi_1,\qquad \ddot\varphi_1+2\dot r_1=0.$$

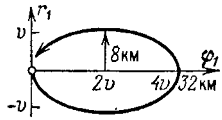


Рис. 78. Движение заглушки относительно станции.

Решение уравнений в вариациях с начальными условиями заглушки ($r_1(0)=\varphi_1(0)=\dot\varphi_1(0)=0$, $\dot r_1(0)=-v$) легко найти, заметив, что $\dot\varphi_1+2r_1\equiv 0$ и, значит, $\ddot r_1=-r_1$. Это решение имеет вид $r_1=-v\sin t$, $\varphi_1=2v(1-\cos t)$. По теореме о дифференцируемости, истинное решение уравнений Ньютона отличается от найденного малыми порядка $v^2$ (при не слишком больших $t$). Следовательно, заглушка описывает относительно космонавта эллипс (рис. 78) с полуосями $v$ и $2v$. Наша единица длины — радиус орбиты, а $v\approx 1/800$. Значит, длины полуосей эллипса составляют около 8 и 16 км.

Вначале заглушка движется вниз (к Земле), но затем начинает обгонять космонавта и уходит на 32 км вперед по орбите; наконец, она возвращается сверху, описав примерно стокилометровый эллипс как раз за время одного оборота станции по орбите.

Разумеется, в этом расчете мы пренебрегли величинами порядка $v^2$, и на самом деле движение заглушки относительно космонавта не будет периодическим (виток не замкнется, причем погрешность будет порядка 1/800 от размера эллипса, т. е. заглушка пролетит на расстоянии порядка 10 м от станции). Мы пренебрегли также многими эффектами (световым давлением, отличием направления броска от вертикали, отличием орбиты станции от круговой и т. д.), дающими бóльшие погрешности.

В. В. Белецкий, из увлекательной книги которого «Очерки о движении космических небесных тел» (М.: Наука, 1972) заимствована задача о заглушке, замечает, что заглушка вряд ли была видна на расстоянии больше километра, а первый километр эллипса очень близок к прямой, поэтому Леонов увидел, как брошенная им заглушка *полетела прямо к Земле*.

**5. Терминологические замечания.** Рассмотренные выше уравнения и системы иногда называют *нормальными* или *разрешенными относительно старших производных*. В этом курсе никакие другие уравнения и системы не рассматриваются, так что термин уравнение или система всегда означает нормальную систему или систему, эквивалентную нормальной (как, например, система уравнений Ньютона (5)).

Функции, входящие в правую часть системы, могут задаваться разными способами: явно, неявно, параметрически и т. п.

Пример. Запись $\dot{x}^2=x$ есть сокращенное обозначение двух разных дифференциальных уравнений, $\dot{x}=\sqrt{x}$ и $\dot{x}=-\sqrt{x}$, фазовым пространством каждого из которых служит полупрямая $x\geqslant 0$. Эти уравнения

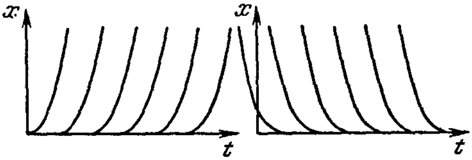


Рис. 79. Интегральные кривые двух уравнений, объединенных записью $\dot{x}^2=x$.

задаются двумя разными векторными полями, гладкими при $x>0$ (рис. 79).

При неявном задании правой части следует внимательно относиться к выяснению ее области определения и остерегаться двусмысленных обозначений.

Пример. *Уравнением Клеро* называется уравнение $x=\dot{x}t-f(\dot{x})$. Уравнение Клеро

$$x=\dot{x}t-\dot{x}^2/2 \qquad (6)$$

есть краткая запись двух разных дифференциальных уравнений, заданных при $x\leqslant t^2/2$. Каждое из них удовлетворяет теореме существования

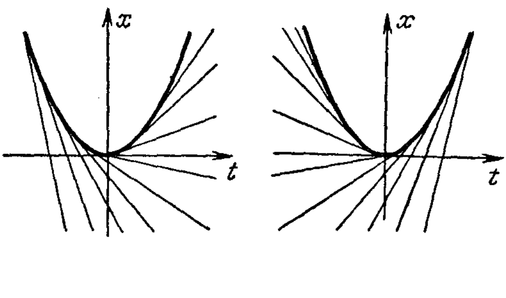


Рис. 80. Интегральные кривые двух уравнений, записанных вместе в виде уравнения Клеро.

и единственности в области под параболой, $x<t^2/2$ (рис. 80). Через каждую точку этой области проходят две касательные к параболе. Каждая касательная состоит из двух полукасательных. Каждая полукасательная — интегральная кривая одного из двух уравнений, объединенных формулой (6).

Задача 1. Исследовать уравнение Клеро $x=\dot{x}t-\dot{x}^3$.

Замечание. При исследовании уравнений, правая часть которых задана неявно, т. е. уравнений вида $F(t, x, \dot{x})=0$, часто бывает полезно рассматривать заданное этим уравнением поле направлений не на плоскости с координатами $(t, x)$, а на поверхности $E$ в трехмерном пространстве с координатами $(t, x, p)$, заданной уравнением $F(t, x, p)=0$ (рис. 81).

Это трехмерное пространство называется пространством 1-струй *) функций. Его точки — это всевозможные невертикальные (т. е. непараллельные оси $x$) направления во всех точках плоскости $(t, x)$. Точка $(t, x, p)$ — это направление прямой $dx=p\,dt$ в точке $(t, x)$. 1-форма $\alpha=dx-p\,dt$ задает описанную ниже контактную структуру в многообразии 1-струй. Векторы, приложенные в точке трехмерного пространства струй, на которых эта форма обращается в нуль, составляют плоскость. Она называется *контактной плоскостью.* Контактная плоскость вертикальна (содержит направление оси $p$). Все контактные плоскости образуют *поле контактных плоскостей* в пространстве струй, оно и называется *контактной структурой.*

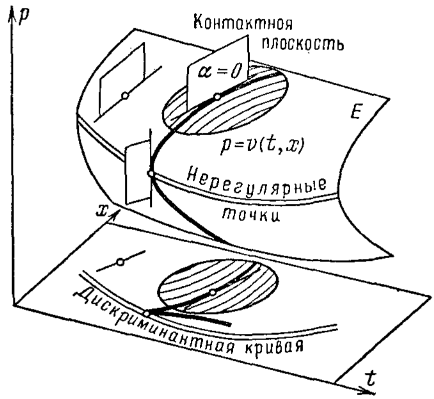


Рис. 81. Поверхность $E$ и следы контактных плоскостей на ней.

Предположим, что поверхность $E$, задающая уравнение, гладкая (это условие выполнено для уравнений $F=0$ с $F$ общего положения). Рассмотрим проектирование поверхности $E$ на плоскость с координатами $(t, x)$ параллельно $p$-направлению. Точка на поверхности называется *регулярной*, если в ней касательная плоскость поверхности не вертикальна (т. е. не содержит прямую $p$-направления). В окрестности регулярной точки проектирование — диффеоморфизм (по теореме о неявной функции), а поверхность — график гладкой функции $p=v(t, x)$. Эта функция задает дифференциальное уравнение $\dot{x}=v(t, x)$ (в окрестности проекции рассматриваемой регулярной точки). В ту же точку плоскости могут проектироваться другие точки поверхности, регулярные или нет. Каждой регулярной точке соответствует свое поле направлений на плоскости и свое дифференциальное уравнение; в уравнении $F=0$ объединены все эти различные дифференциальные уравнения.

Рассмотрим в регулярной точке поверхности $E$ контактную плоскость. Она пересекает касательную плоскость по прямой. Таким образом, в окрестности регулярной точки на $E$ возникает гладкое поле направлений — поле следов контактных плоскостей. Очевидна

Теорема. *При проектировании поверхности $E$, заданной уравнением $p=v(t, x)$, на плоскость $(t, x)$ вдоль оси $p$ поле следов контактных плоскостей на $E$ переходит в поле направлений уравнения $dx/dt=v(t, x)$ на плоскости.*

*) $k$-струей функции называется ее многочлен Тейлора степени $k$.

Следствие. *Указанное проектирование переводит интегральные кривые поля следов на $E$ в интегральные кривые уравнения на плоскости.*

Касательная плоскость поверхности $E$ в нерегулярных точках вертикальна. Но она все равно может пересекаться с контактной плоскостью по прямой (для поверхности $E$ общего положения полное совпадение касательной плоскости с контактной будет лишь в отдельных исключительных точках).

В окрестности неисключительной нерегулярной точки на поверхности $E$ следы контактных плоскостей задают гладкое поле направлений. Таким образом, поле следов контактных плоскостей на поверхности $E$ продолжается в неисключительные нерегулярные точки. Продолженное поле называется *полем направлений уравнения $F=0$ на $E$*, его интегральные кривые называются *интегральными кривыми уравнения $F=0$ на $E$*.

Проекции кусков этих кривых между нерегулярными точками на плоскость $(t, x)$ локально являются интегральными кривыми соответствующих уравнений $dx/dt = v(t, x)$ (в целом это неверно, даже если нерегулярных точек нет!).

Переход от плоскости к поверхности $E$ часто бывает полезен как для исследования, так и для решения уравнения.

Задача 2. Найти интегральные кривые уравнения $\dot{x}^2 = t$ на поверхности $p^2 = t$ и их проекции на плоскость $(t, x)$.

Решение. За координаты на $E$ примем $p$ и $x$. В этих координатах уравнение следов контактных плоскостей $(dx = p\,dt)$ принимает вид $dx = 2p^2\,dp$. Интегральные кривые: $x + C = 2p^3/3$. Их проекции — полукубические параболы $(x+C)^2 = 4t^3/9$ (рис. 82). Нерегулярные точки образуют линию $p=0$. Все они неисключительные.

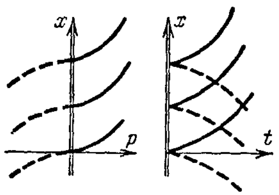


Рис. 82. Проекции интегральных кривых.

Проекция линии нерегулярных точек на плоскость $(t, x)$ называется *дискриминантной кривой*. В данном случае дискриминантная кривая — ось $x$.

Точка возврата делит полукубическую параболу на две части. Каждая из них — интегральная кривая одного из двух уравнений $\dot{x} = \sqrt{t}$ (или $-\sqrt{t}$) в полуплоскости $t > 0$. Можно показать, что проекции на плоскость интегральных кривых на $E$ для уравнения общего положения имеют в общей точке дискриминантной кривой точку возврата (более того, в окрестности такой точки уравнение приводится к виду $\dot{x}^2 = t$ диффеоморфизмом плоскости $(t, x)$). Однако это верно не для всех уравнений.

Задача 3. Найти интегральные кривые уравнения Клеро $x = t\dot{x} - f(\dot{x})$ на поверхности $x = pt - f(p)$, их проекции на плоскость $(t, x)$ и дискриминантную кривую.

Решение. За координаты на $E$ принимаем $p$ и $t$. Уравнение следов контактных плоскостей $(dx = p\,dt)$ принимает вид $t\,dp + p\,dt - f'\,dp = p\,dt$ или $(t - f')\,dp = 0$. Нерегулярные точки: $t = f'$. Все они исключительные. Интегральные кривые на $E$: $p = \text{const}$ (в области, где $t \neq f'$). Это прямые. Их проекции на плоскость $(t, x)$ — также прямые: $x = tC - f(C)$. Уравнение Клеро — это просто *уравнение семейства прямых, запараметризованных тангенсом угла наклона к оси абсцисс*

Дискриминантная кривая параметрически задается уравнениями $t = f'(C)$, $x = tC - f(C)$. В окрестности точки, где $f'' \neq 0$, эти формулы задают гладкую кривую, являющуюся графиком функции $x = g(t)$. Действительно, вблизи точки, где $f'' \neq 0$, можно выразить $C$ через $t$ и затем $x$ через $t$. Прямая $x = tC - f(C)$ касается дискриминантной кривой в такой точке (почему?) Итак, *дискриминантная кривая уравнения Клеро является огибающей семейства прямых, описываемого этим уравнением.*

Переход от функции $f$ к функции $g$ называется *преобразованием Лежандра.* Преобразованием Лежандра функции $g$ будет снова $f$ (докажите). Поэтому функции $f$ и $g$ называются *двойственными друг другу.*

Задача 4. Вычислить преобразование Лежандра функции $|p|^\alpha/\alpha$ ($\alpha>1$).

*Ответ.* $|t|^\beta/\beta$, где $\alpha^{-1}+\beta^{-1}=1$.

Геометрический смысл преобразования Лежандра состоит в следующем. Рассмотрим множество всех невертикальных (не параллельных оси $x$) прямых на плоскости $(t, x)$. Прямая задается своим уравнением $x=at-b$. Таким образом, невертикальные прямые можно рассматривать как точки на плоскости с координатами $(a, b)$. Эта плоскость называется *двойственной к исходной плоскости.* Координаты $a$ и $b$ называются *тангенциальными координатами* прямой.

Плоскость, двойственная к плоскости $(a, b)$, есть исходная плоскость $(t, x)$, ввиду полной симметрии уравнения $x+b=at$ относительно замены $(t, x)\mapsto(a, b)$: прямая на плоскости прямых есть точка исходной плоскости.

Рассмотрим на плоскости $(t, x)$ гладкую кривую, $x=g(t)$. Касательная к этой кривой меняется при движении вдоль кривой. Соответствующая касательной точка двойственной плоскости описывает при этом некоторую кривую. Эта кривая называется *двойственной к исходной кривой.* Кривая, двойственная к построенной,— исходная кривая. Если для исходной кривой $g''\neq 0$, то двойственная кривая является графиком функции $b=f(a)$. Функции $f$ и $g$ — преобразования Лежандра друг друга.

Доказательство этих фактов (имеющих многочисленные обобщения и приложения во всех областях математики) оставляется любознательному читателю в виде задачи.

## § 9. Фазовые кривые автономной системы

Здесь рассматриваются простейшие геометрические свойства фазовых кривых автономных систем, т. е. систем, правые части которых не зависят от времени.

### 1. Автономные системы.

Определение. Система дифференциальных уравнений называется *автономной,* если она переходит в себя при произвольных сдвигах вдоль оси времени.

Иными словами, система называется автономной, если ее правая часть не зависит от времени. Например, автономное уравнение $n$-го порядка — это уравнение

$$x^{(n)}=F(x, \ldots, x^{(n-1)}).$$

Замечание. При описании эволюционных процессов дифференциальными уравнениями обычно возникают именно автономные системы: независимость правой части от $t$ отражает независимость от времени законов природы (без чего невозможно научное ее изучение). Термин «автономный» означает «самостоятельный» и отражает независимость эволюции состояния рассматриваемой системы от всех других. Неавтономные системы возникают при описании природы чаще всего следующим образом. Предположим, что мы рассматриваем часть I физической системы I+II. Тогда, хотя закон эволюции всей системы со временем и не меняется, влияние части II на часть I может привести к тому, что закон эволюции части I будет меняться со временем.

Например, влияние Луны на Землю вызывает приливы. Математически это влияние выражается тем, что величина ускорения силы тяжести, входящая в уравнение движения земных объектов, становится переменной.

В таких случаях говорят, что выделенная часть I неавтономна. Поэтому и все системы, правая часть которых явно зависит от времени, называются неавтономными. Разумеется, неавтономные системы могут получиться и в других случаях, например, в процессе преобразований при решении автономных систем. Пример: переход к неавтономному уравнению с разделяющимися переменными при интегрировании системы Лотка — Вольтерра (п. 7 § 2).

Задача 1. Автономно ли уравнение в вариациях для малого возмущения решения автономной системы при малом изменении начальных условий?

*Ответ.* Если невозмущенное решение — состояние равновесия, то автономно, в общем случае — нет.

**2. Сдвиг по времени.** Начнем с примера. Рассмотрим автономное уравнение $n$-го порядка

$$x^{(n)}=F(x,\ \dot{x},\ \ldots,\ x^{(n-1)}). \qquad (1)$$

Теорема. *Предположим, что* $x=\sin t$ *— решение уравнения* (1), *тогда функция* $x=\cos t$ *— тоже решение.*

Это сразу следует из следующего предложения.

Теорема. *Пусть* $\varphi\colon \mathbf{R}\to U$ *— решение автономного уравнения* $\dot{x}=v(x)$, *заданного векторным полем* $v$ *в фазовом пространстве* $U$, *и пусть* $h^s\colon \mathbf{R}\to\mathbf{R}$ *— сдвиг оси времени,* $h^s(t)=s+t$. *Тогда* $\varphi\circ h^s$ *при любом* $s$ *тоже решение.*

Иными словами, если $x=\varphi(t)$ — решение, то $x=\varphi(t+s)$ — тоже решение.

Доказательство. Это очевидно: поле направлений автономного уравнения переходит в себя при сдвигах вдоль оси времени, следовательно, интегральные кривые переходят при таких сдвигах в интегральные кривые.

Следствие. *Через каждую точку фазового пространства автономной системы проходит одна и только одна фазовая кривая.*

Замечание. Здесь и ниже всюду идет речь о максимальных фазовых кривых, т. е. о фазовых кривых, являющихся образами решений, непродолжаемых на более длинный интервал (решение $\varphi\colon I\to U$ может не продолжаться либо потому, что интервал $I$ уже вся прямая, либо потому, что $\varphi(t)$ подходит к границе области $U$, когда $t$ подходит к концу интервала).

Доказательство следствия. Предположим, что через точку проходят две фазовые кривые — образы решений $\varphi$ и $\psi$, определенных на всей прямой (случай, когда решения не продолжаются неограниченно, оставляется читателю). Тогда существуют моменты времени $a$ и $b$, такие, что $\varphi(a)=\psi(b)$ (т. к. обе кривые проходят через одну точку). Сдвигая одно из решений вдоль оси времени, мы получаем новое решение, $\varphi\circ h^{a-b}$. Это решение имеет с решением $\psi$ общее начальное условие при $t=b$. Значит, они совпадают. Следовательно, $\psi$ получается из $\varphi$ сдвигом вдоль оси времени. Итак, образы отображений $\varphi$ и $\psi$ совпадают, что и требовалось доказать.

Замечание. Фазовые кривые *неавтономной* системы (образы решений в фазовом пространстве) могут пересекаться, не совпадая. Поэтому за решениями неавтономных систем лучше следить по интегральным кривым.

Задача 1. Пусть через каждую точку фазового пространства системы $\dot{x}=v(t, x)$ проходит одна и только одна фазовая кривая. Следует ли из этого, что система автономна?

*Ответ.* Нет, пример: $\dot{x}=1+t^2$.

**3. Замкнутые фазовые кривые.** Мы уже знаем, что разные фазовые кривые автономной системы не пересекаются. Посмотрим, может ли пересекать себя одна фазовая кривая. Иными словами, может ли решение автономной системы первого порядка несколько раз принимать одно и то же значение.

Теорема. *Максимальная фазовая кривая автономной системы либо не самопересекается, либо сводится к одной точке, либо является замкнутой фазовой кривой (диффеоморфной окружности).*

С примерами замкнутых фазовых кривых мы уже сталкивались (например, предельные циклы, см. § 2).

Доказательство теоремы основано на следующих четырех леммах.

Лемма 1. *Решение $\varphi$ автономной системы первого порядка, дважды принявшее одно значение $\varphi(a)=\varphi(b)$, $b>a$, можно продолжить на всю ось времени, в виде периодического отображения $\Phi$ с периодом $T=b-a$.*

Доказательство. Всякое $s$ однозначно представимо в виде $s=nT+\sigma$, $0\leqslant\sigma<T$. Положим $\Phi(a+s)=\varphi(a+\sigma)$. Тогда $\Phi$ — решение периода $T$, совпадающее с $\varphi$ на отрезке $[a, b]$. Действительно, $\Phi$ совпадает со сдвигом решения $\varphi$ в окрестности каждой точки и, значит, само является решением (по теореме п. 2).

Полученное решение может иметь, кроме $T$, другие периоды. Изучим множество всех периодов отображения прямой.

Лемма 2. *Множество всех периодов любого отображения прямой является подгруппой группы* $\mathbf{R}$.

Доказательство. Число $T$ является периодом отображения $f$, если и только если сдвиг прямой на $T$ переводит $f$ в себя. Сдвиги, переводящие $f$ в себя, образуют подгруппу группы всех сдвигов. Ибо если два сдвига переводят $f$ в себя, то и их произведение, и обратные им сдвиги переводят $f$ в себя.

Замечание. Это рассуждение показывает также, что если какая угодно группа действует на каком угодно множестве, то все преобразования группы, оставляющие на месте фиксированный элемент множества, образуют подгруппу исходной группы. Эта подгруппа называется *стационарной группой* фиксированного элемента.

Лемма 3. *Множество всех периодов непрерывного отображения прямой замкнуто.*

Доказательство. Пусть последовательность периодов $T_i$ отображения $f$ сходится к числу $T$, тогда $f(t+T)=\lim f(t+T_i)=\lim f(t)= =f(t)$ при любом $t$.

Итак, *множество всех периодов непрерывного отображения прямой является замкнутой подгруппой прямой.*

Лемма 4. *Всякая замкнутая подгруппа $G$ группы вещественных чисел $\mathbf{R}$ есть либо $\mathbf{R}$, либо арифметическая прогрессия, образованная целыми кратными некоторого числа, либо* $\{0\}$.

Доказательство. Если $G\neq\{0\}$, то в $G$ есть положительные элементы (вместе с $t$ в $G$ входит $-t$).

Возможные два случая:

1) в $G$ есть сколь угодно близкие к 0 положительные элементы;

2) расстояния от 0 до всех положительных элементов группы больше некоторого положительного числа.

В первом случае $G$ содержит арифметические прогрессии со сколь угодно малыми разностями, следовательно, элементы $G$ есть в любой окрестности любой точки прямой. Поскольку $G$ замкнута, $G=\mathbf{R}$. Во втором случае рассмотрим ближайший к 0 положительный элемент $T$ группы (он существует, так как группа замкнута). Арифметическая прогрессия целых кратных элемента $T$ принадлежит группе. Докажем, что никаких других элементов в группе нет. Действительно, любое другое число $t$ представимо в виде $nT+\tau$, где $0<\tau<T$. Если $t\in G$, то $t-nT=\tau<T$ — положительный элемент группы, вопреки минимальности элемента $T$

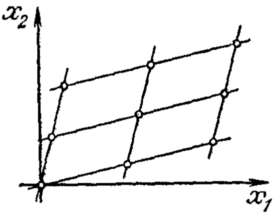


Рис. 83. Замкнутая подгруппа плоскости

Задача 1. Найти все замкнутые подгруппы: 1) плоскости $\mathbf{R}^2$, 2) пространства $\mathbf{R}^n$, 3) окружности $S^1=\{z\in\mathbf{C}: |z|=1\}$.

*Ответ.* 1) и 2) — прямые суммы замкнутых подгрупп прямой (рис. 83); 3) правильные $n$-угольники, образованные корнями степени $n$ из 1, и $S^1$.

Объединяя леммы 2, 3 и 4, мы заключаем, что *множество всех периодов непрерывного периодического отображения прямой либо состоит из всех целых кратных одного наименьшего периода, либо составляет всю прямую* (тогда отображение — константа).

В частности, решение $\Phi$ леммы 1 либо постоянно (и тогда соответствующая фазовая кривая — положение равновесия), либо имеет наименьший период $\theta$. Определим отображение $A$ окружности на фазовую кривую формулой $A$: $(\cos\alpha, \sin\alpha)\mapsto\Phi(\alpha\theta/2\pi)$. Это отображение $A$ определено, так как $\Phi$ имеет период $\theta$. $A$ дифференцируемо, так как $\Phi$ — решение. Отображение $A$ взаимно однозначно отображает окружность на фазовую кривую, так как $\Phi$ не может дважды принять одно значение внутри наименьшего периода (по лемме 1).

Производная $A$ по $\alpha$ всюду отлична от нуля, иначе решение принимало бы значение, являющееся положением равновесия, и тогда по теореме единственности было бы константой. По теореме о неявной функции, $A$ локально диффеоморфно отображает ось $\alpha$ на образ $\Phi$ в фазовом пространстве, т. е. на фазовую кривую. Значит, отображение, обратное $A$, дифференцируемо, т. е. $A$ — диффеоморфизм.

Теорема доказана.

Незамкнутые фазовые кривые, хотя и не могут самопересекаться, могут сложным образом навиваться сами на себя.

Задача 2. Найти замыкания фазовых кривых двойного маятника, $\ddot{x}_1 = -x_1$, $\ddot{x}_2 = -2x_2$.

*Ответ.* Точка, окружности и торы. См. § 24 и § 25, п. 6.

## § 10. Производная по направлению векторного поля и первые интегралы

Многие геометрические понятия можно описывать двумя способами: на языке *точек* пространства или же с помощью *функций*, заданных на нем. Такая дуализация часто оказывается полезной в самых разных отделах математики.

В частности, векторные поля можно описывать не только с помощью скоростей движений, но и как *дифференцирования* функций, а основные теоремы теории дифференциальных уравнений можно сформулировать в терминах *первых интегралов*.

**1. Производная по направлению вектора.** Пусть $v$ — приложенный в точке $x$ области $U$ вектор, и пусть $f\colon U \to \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция. Пусть $\varphi\colon I \to U$ — какая-либо параметризованная кривая, выходящая из $x$ со скоростью $v$, так что $\varphi(0) = x$, $\dot{\varphi}(0) = v$. Возникает сквозное отображение интервала $I$ вещественной оси в вещественную ось, $f \circ \varphi\colon I \to \mathbf{R}$, $(f \circ \varphi)(t) = f(\varphi(t))$, т. е. вещественная функция вещественного переменного $t$ (рис. 84).

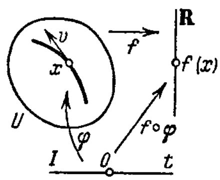

Рис. 84. Производная функция $f$ по направлению вектора $v$.

Определение. *Производной функции $f$ по направлению вектора $v$* называется производная построенной функции в нуле.

Это число обозначается через $L_v f$ ($L$ — в честь Софуса Ли). Чтобы оправдать это определение, надо проверить, что полученное число зависит только от вектора $v$, а не от специального выбора кривой $\varphi$. Это видно, например, из выражения производной по направлению через координаты: по правилу дифференцирования сложной функции

$$L_v f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f \circ \varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} v_i,$$

где производные берутся в точке приложения вектора: здесь $x_i$ — координаты в окрестности этой точки, $v_i$ — компоненты вектора скорости в этой системе координат.

То же самое можно выразить иначе, сказав, что $L_v f$ есть значение 1-формы $df$ на векторе $v$.

Задача 1. Вычислить производную функции $H$ по направлению вектора $\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial q_i}-\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$.

*Ответ.* 0.

**2. Производная по направлению векторного поля.** Пусть теперь $v$ — векторное поле в области $U$.

Определение. *Производной функции* $f\colon U\to\mathbf{R}$ *по направлению поля* $v$ называется новая функция $L_vf\colon U\to\mathbf{R}$, значение которой в каждой точке $x$ равно производной функции $f$ по направлению приложенного в точке $x$ вектора поля: $(L_vf)(x)=L_{v(x)}f$. Функция $L_vf$ называется также *производной Ли* функции $f$.

Пример. Пусть $v=\partial/\partial x_1$ — базисное векторное поле, компоненты которого в системе координат $(x_1, \ldots, x_n)$ равны $(1, 0, \ldots, 0)$. Тогда $L_vf=\partial f/\partial x_1$ — частная производная функции $f$.

Предостережение. При работе с частными производными нужно твердо понимать, что в самом их обозначении кроется опасность: частная производная функции $f$ по $x_1$ зависит не только от того, какая функция в рассматриваемой области принята за координату $x_1$, но в еще большей мере от того, как выбраны прочие координаты. Например, на плоскости с координатами $(x, y)$ частная производная $\partial f/\partial x$ функции $y$ равна нулю, но частная производная $\partial f/\partial x$ той же функции точки плоскости по той же переменной $x$ в системе координат $(x, z)$, где $z=x+y$, равна $-1$. Следовало бы писать $\partial f/\partial x|_{y=\text{const}}$, $\partial f/\partial x|_{z=\text{const}}$.

Производная функции по направлению векторного поля лишена указанного недостатка частной производной: это геометрический объект, по самому своему определению не зависящий ни от какой системы координат. Если гладкие функция $f$ и поле $v$ заданы, то $L_vf$ — вполне определенная функция (класса $C^{r-1}$, если $f$ и $v$ класса $C^r$). Иными словами, если диффеоморфизм переводит на новое место векторное поле и функцию, то производная перенесенной функции по направлению перенесенного поля совпадает с перенесением производной исходной функции по направлению исходного поля. Это свойство операции дифференцирования по направлению называется *естественностью*. Другие примеры естественных операций — сложение и умножение функций, сложение полей и умножение функций на поле.

**3. Свойства производной по направлению.** Здесь мы опять займемся формализацией очевидных фактов. Обозначим через $F$ множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f\colon U\to\mathbf{R}$. Это множество имеет естественную структуру вещественного линейного пространства (так как сложение функций сохраняет дифференцируемость), и даже кольца (так как произведение бесконечно дифференцируемых функций дифференцируемо), или, лучше сказать, $\mathbf{R}$-алгебры (кольца, для элементов которого определено умножение на числа, удовлетворяющее обычным требованиям).

Пусть $v$ — бесконечно дифференцируемое векторное поле в $U$. Производная функции из $F$ по направлению поля $v$ снова принадлежит

$F$ (здесь существенна бесконечная дифференцируемость). Итак, дифференцирование по направлению поля $\boldsymbol{v}$ есть отображение $L_v$: $F \to F$ алгебры бесконечно дифференцируемых функций в себя. Рассмотрим некоторые свойства этого отображения:

1. $L_v(f+g)=L_vf+L_vg$; 2. $L_v(fg)=fL_vg+gL_vf$;
3. $L_{u+v}=L_u+L_v$; 4. $L_{fu}=fL_u$; 5. $L_uL_v=L_vL_u$

($f$ и $g$ — гладкие функции, $u$ и $v$ — гладкие векторные поля).

Задача 1. Докажите свойства 1—5, кроме того из них, которое неверно.

Терминологическое замечание. Алгебраисты называют отображение (коммутативного) кольца в себя *дифференцированием*, если оно обладает свойствами 1 и 2 отображения $L_v$. Все дифференцирования кольца образуют *модуль* над этим кольцом (модуль над кольцом — обобщение линейного пространства над $\mathbf{R}$: элементы модуля можно складывать между собой и умножать на элементы кольца).

Векторные поля в $U$ образуют модуль над $\mathbf{R}$-алгеброй $F$ функций в $U$. Свойства 3 и 4 означают, что операция $L$, переводящая поле $\boldsymbol{v}$ в дифференцирование $L_v$,— гомоморфизм $F$-модуля полей в $F$-модуль всех дифференцирований алгебры $F$. Свойство 5, если оно имеет место, означает, что дифференцирования $L_u$ и $L_v$ коммутируют.

Задача* 2. Является ли гомоморфизм $L$ изоморфизмом?

Аналитики называют отображение $L_v$ *линейным однородным дифференциальным оператором первого порядка*. Это название объясняется тем, что, согласно 1 и 2, оператор $L_v$: $F \to F$ $\mathbf{R}$-линеен. В координатах этот оператор записывается так: $L_v=v_1\,\partial/\partial x_1+\ldots$ $\ldots+v_n\partial/\partial x_n$. Выше мы и само векторное поле $\boldsymbol{v}$ обозначили таким же символом (стр. 59): поле часто отождествляют с оператором дифференцирования вдоль него.

Аналогичный $L_v$ оператор производной Ли вдоль векторного поля $\boldsymbol{v}$ можно определить не только для функций, но для произвольных дифференциально-геометрических объектов, переносимых диффеоморфизмами (векторных полей, форм, тензоров) — производная каждого объекта будет объектом той же природы. Французы называют оператор $L_v$ производной рыбака: рыбак сидит на месте и дифференцирует объекты, проносимые мимо него фазовым потоком.

**4. Алгебра Ли векторных полей.** Свойство 5 для векторных полей $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ выполнено не всегда. Например, для полей $\boldsymbol{u}=\partial/\partial x$ и $\boldsymbol{v}=x\partial/\partial x$ на оси $x$ имеем

$$L_uL_v=\partial/\partial x+x\,\partial^2/\partial x^2, \quad L_vL_u=x\,\partial^2/\partial x^2.$$

Задача 1. Докажите, что дифференциальный оператор $L_aL_b-L_bL_a$ — не второго порядка, как это кажется на первый взгляд, а первого; $L_aL_b-L_bL_a=L_c$, где $\boldsymbol{c}$ — некоторое векторное поле, зависящее от полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Определение. Поле $\boldsymbol{c}$ называется *коммутатором* или *скобкой Пуассона* полей $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и обозначается $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Задача 2. Докажите три свойства коммутатора:

1. $[a, b+\lambda c] = [a, b] + \lambda\,[a, c]$, $\lambda \in \mathbf{R}$ (линейность).
2. $[a, b]+[b, a]=0$ (кососимметричность).
3. $[[a, b], c]+[[b, c], a]+[[c, a], b]=0$ (тождество Якоби).

Определение. Линейное пространство с бинарной операцией, обладающей свойствами 1, 2 и 3, называется *алгеброй Ли*.

Итак, *векторые поля с операцией коммутирования образуют алгебру Ли*. Эта операция столь же фундаментальна для всей математики, как сложение и умножение.

Задача 3. Докажите, что трехмерное ориентированное евклидово пространство становится алгеброй Ли, если определить операцию как векторное произведение.

Задача 4. Докажите, что пространство квадратных матриц порядка $n$ становится алгеброй Ли, если определить операцию как $AB-BA$.

Задача 5. Образуют ли алгебру Ли симметричные матрицы с такой же операцией? Кососимметрические?

Задача 6. Зная компоненты полей $a$ и $b$ в некоторой системе координат, найти компоненты их коммутатора.

*Ответ.* $[a, b]_i = \sum a_j\, \partial b_i/\partial x_j - b_j\, \partial a_i/\partial x_j = L_a b_i - L_b a_i$.

Задача 7. Пусть $\{g^t\}$ — фазовый поток поля $a$, $\{h^s\}$ — поля $b$. Докажите, что потоки коммутируют ($g^t h^s \equiv h^s g^t$) тогда и только тогда, когда коммутатор полей равен нулю.

Задача 8. Пусть $a_\omega$ — поле скоростей точек тела, вращающегося с угловой скоростью $\omega$ вокруг точки 0 в $\mathbf{R}^3$. Найти коммутатор полей $a_\alpha$, $a_\beta$.

*Ответ.* $[a_\alpha, a_\beta] = a_\gamma$, где векторное произведение $\alpha$ и $\beta$.

**5. Первые интегралы.** Пусть $v$ — векторное поле в области $U$, $f\colon U \to \mathbf{R}$ — дифференцируемая функция.

Определение. Функция $f$ называется *первым интегралом* уравнения $\dot{x} = v(x)$, если ее производная по направлению поля $v$ равна нулю: $L_v f \equiv 0$.

Странное наименование первый интеграл осталось от тех времен, когда пытались решить все дифференциальные уравнения путем интегрирования. В те времена интегралом (или частным интегралом) называли также то, что мы теперь называем решением.

Следующие два свойства первого интеграла очевидно эквивалентны соотношению $L_v f \equiv 0$ и могли бы быть приняты за его определение.

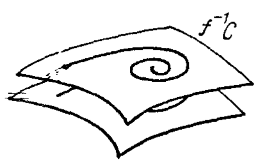


Рис. 85. Фазовая кривая целиком лежит на одной поверхности уровня интеграла.

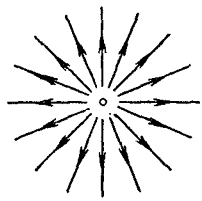

Рис. 86. Система без первых интегралов.

1. *Функция $f$ постоянна вдоль каждого решения $\varphi\colon I \to U$*, т. е. *каждая функция $f \circ \varphi$ постоянна.*

2. *Каждая фазовая кривая поля $v$ принадлежит одному и только одному множеству уровня функции $f$* (рис. 85).

Пример. Рассмотрим систему, фазовым пространством которой является вся плоскость, $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$. Фазовые кривые (лучи) изображены на рис. 86. Покажем, что эта система не имеет ни одного первого интеграла, отличного от постоянной. Действительно, первый интеграл — непрерывная на всей плоскости функция, постоянная на каждом луче, выходящем из начала координат, следовательно — постоянная.

Задача 1. Докажите, что в окрестности предельного цикла всякий первый интеграл постоянен.

Задача 2. При каких $k$ система уравнений $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = kx_2$ на всей плоскости имеет непостоянный первый интеграл?

*Ответ.* При $k \leqslant 0$ (см. рис. 30 на стр. 33).

Задача 3. Докажите, что множество всех первых интегралов данного поля образует алгебру: сумма и произведение первых интегралов — первый интеграл.

Непостоянные первые интегралы встречаются редко. Зато в тех случаях, когда они есть и когда их удается найти, награда бывает весьма значительной.

Пример. Пусть $H$ — дифференцируемая ($r \geqslant 2$ раз) функция $2n$ переменных ($p_1, \ldots, q_n$). Система $2n$ уравнений $\dot{p}_i = -\partial H/\partial q_i$, $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$ называется *системой канонических уравнений Гамильтона.* (Гамильтон показал, что дифференциальные уравнения большого числа задач механики, оптики, вариационного исчисления и других областей естествознания можно записать в таком виде). Функция $H$ называется *функцией Гамильтона* (в механике это обычно полная энергия системы).

Теорема (закон сохранения энергии). *Функция Гамильтона является первым интегралом системы канонических уравнений Гамильтона.*

Доказательство.

$$L_v H = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left[ \frac{\partial H}{\partial p_i} \left( -\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right] = 0,$$

что и требовалось.

**6. Локальные первые интегралы.** Отсутствие непостоянных первых интегралов связано с топологическим устройством фазовых кривых. В общем случае фазовые кривые не укладываются в целом на поверхности уровня никакой функции, поэтому непостоянного первого интеграла и нет. Однако локально, в окрестности неособой точки, фазовые кривые устроены просто и непостоянные первые интегралы существуют.

Пусть $U$ — область в $n$-мерном пространстве, $\boldsymbol{v}$ — дифференцируемое векторное поле в $U$, $x_0$ — неособая точка поля ($\boldsymbol{v}(x_0) \neq 0$).

Теорема. *Существует такая окрестность $V$ точки $x_0$, что уравнение $\dot{x} = \boldsymbol{v}(x)$ в $V$ имеет $n-1$ функционально независимый первый интеграл, $f_1, \ldots, f_{n-1}$, причем любой первый интеграл уравнения в $V$ есть функция от $f_1, \ldots, f_{n-1}$.*

[Набор $m$ функций *функционально независим* в окрестности точки $x_0$, если ранг производной в точке $x_0$ отображения $f\colon U \to \mathbf{R}^m$, заданного этими функциями, равен $m$ (см., например, Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления.— М.: Наука, 1970, т. I, гл. 6)].

Доказательство. Для стандартного уравнения в $\mathbf{R}^n$ $\dot{y}_1=1$, $\dot{y}_2=\ldots=\dot{y}_n=0$, это очевидно: первые интегралы — любые гладкие функции от $y_2, \ldots, y_n$. То же верно для этого уравнения в любой выпуклой области (область называется выпуклой, если вместе с любыми точками она содержит соединяющий их отрезок). В выпуклой области любой интеграл стандартного уравнения сводится к функции от $y_2, \ldots, y_n$. Всякое уравнение в подходящей окрестности неособой точки записывается в подходящих координатах $y$ в стандартном виде. Окрестность эту можно считать выпуклой в координатах $y$ (если это не так, заменим меньшей выпуклой).

Остается заметить, что как свойство функции быть первым интегралом, так и функциональная независимость, от системы координат не зависят.

Задача 1. Приведите пример области, в которой стандартное уравнение имеет первый интеграл, не сводящийся к функции от $y_2, \ldots, y_n$.

**7. Первые интегралы, зависящие от времени.** Пусть $f$ — дифференцируемая функция на расширенном фазовом пространстве уравнения $\dot{x}=\boldsymbol{v}(t, x)$, вообще говоря, неавтономного.

Составим автономную систему, фазовые кривые которой будут интегральными кривыми исходного уравнения. Для этого расширим уравнение, добавив к данному уравнению тривиальное уравнение $\dot{t}=1$:

$$\dot{X}=\boldsymbol{V}(X), \qquad X=(t, x), \qquad \boldsymbol{V}(t, x)=(1, \boldsymbol{v}).$$

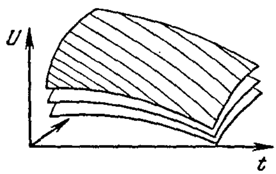

Рис. 87 Интегральные кривые на поверхности уровня первого интеграла, зависящего от времени

Определение. Функция $f$ называется *зависящим от времени первым интегралом* уравнения $\dot{x}=\boldsymbol{v}(t, x)$, если она является первым интегралом расширенного автономного уравнения (рис. 87).

Иными словами: *каждая интегральная кривая исходного уравнения лежит в одном множестве уровня функции.*

Векторное поле $\boldsymbol{V}$ в нуль не обращается. По теореме п. 6 *в окрестности каждой точки расширенного фазового пространства уравнение $\dot{x}=\boldsymbol{v}(t, x)$ имеет столько функционально независимых первых интегралов (зависящих от времени), какова размерность фазового пространства (число компонент вектора $\boldsymbol{x}$); причем каждый (зависящий от времени) первый интеграл выражается через эти специальные в указанной окрестности.*

В частности, автономное уравнение с $n$-мерным фазовым пространством имеет в окрестности любой (не обязательно неособой) точки $n$ зависящих от времени функционально независимых первых интегралов.

Первым интегралом дифференциального уравнения (или системы) любого порядка называется первый интеграл эквивалентной системы первого порядка.

Задача 1. Докажите, что система уравнений Ньютона $\ddot{\boldsymbol{r}}=-\boldsymbol{r}/r^3$ имеет первый интеграл, который в полярных координатах записывается в виде $r^2\dot{\varphi}$ $(\boldsymbol{r}\in\mathbf{R}^2)$.

Этот интеграл, называемый *секториальной скоростью*, открыл Кеплер из наблюдений за движением Марса («второй закон Кеплера»)

Задача 2. Докажите, что секториальная скорость является первым интегралом уравнения $\ddot{r}=ra(r)$ при любом виде функции $a$.

Силовое поле вида $ra(r)$ называется *центральным*. Предыдущая задача показывает, почему из второго закона Кеплера нельзя извлечь закона всемирного тяготения: нужен третий.

Задача 3. Докажите, что при движении в любом центральном поле в трехмерном пространстве каждая из компонент векторного произведения $[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]$ является первым интегралом («закон сохранения момента количества движения»).

Задача 4. Докажите, что если функция Гамильтона не зависит от $q_i$, то $p_i$ — первый интеграл уравнений Гамильтона.

Задача 5. Предположим, что каждое решение уравнения $\dot{x}=\boldsymbol{v}(t, x)$ с $n$-мерным фазовым пространством можно продолжить на всю ось $t$. Докажите, что такое уравнение имеет во всем расширенном фазовом пространстве $n$ функционально независимых первых интегралов (зависящих от времени), через которые все его (зависящие от времени) первые интегралы функционально выражаются.

## § 11. Линейные и квазилинейные уравнения первого порядка с частными производными

Уравнения с частными производными изучены гораздо хуже, чем с обыкновенными. Теорию одного уравнения с частными производными первого порядка удается свести к исследованию специальных обыкновенных дифференциальных уравнений, так называемых *уравнений характеристик*. Сущность связи между уравнением с частными производными и уравнением характеристик состоит в том, что движение сплошной среды можно описывать как с помощью обыкновенных дифференциальных уравнений движения ее частиц, так и с помощью уравнения с частными производными для поля. Ниже подробно разобраны простейшие частные случаи линейных и так называемых квазилинейных уравнений с частными производными первого порядка и также приведен рецепт решения общего уравнения.

**1. Линейное однородное уравнение.**

Определение. *Линейным однородным уравнением первого порядка* в области $U$ называется уравнение $L_{\boldsymbol{a}}u=0$, где $\boldsymbol{a}$ — известное векторное поле в области $U$, а $u$ — неизвестная функция. В координатах оно имеет вид $a_1\,\partial u/\partial x_1+\ \ldots\ +a_n\,\partial u/\partial x_n=0$, $a_k=a_k(x_1, \ldots, x_n)$. Фазовые кривые векторного поля $\boldsymbol{a}$ называются *характеристиками* уравнения $L_{\boldsymbol{a}}u=0$. Уравнение $\dot{x}=\boldsymbol{a}(x)$ называется *уравнением характеристик*.

Замечание. Прилагательное «характеристический» в математике всегда означает «связанный инвариантно» (в данном случае инвариантно относительно выбора системы координат). Так, характеристическая подгруппа группы — это подгруппа, переходящая в себя при всех автоморфизмах группы, характеристическое уравнение матрицы оператора не зависит от выбора базиса, характеристические классы в топологии переходят в себя при диффеоморфизмах и т. д.

Характеристики уравнения $L_{\boldsymbol{a}}u=0$ связаны с ним инвариантно относительно диффеоморфизмов: если диффеоморфизм переводит старое уравнение в новое, то он переводит характеристики старого уравнения в характеристики нового. Можно даже вдобавок умножить поле $a$ на не обращающуюся в нуль функцию — это не изменит ни решений, ни характеристик уравнения.

Задача 1. Найти характеристики уравнения $\partial u/\partial x = y\, \partial u/\partial y$.

Решение. $\dot{x}=1$, $\dot{y}=-y$; $y=Ce^{-x}$.

Теорема. *Функция $u$ является решением уравнения $L_a u=0$, если и только если она является первым интегралом уравнения характеристик.*

Доказательство. Это определение первого интеграла.

Несмотря на очевидность этой теоремы, она очень полезна, так как решать обыкновенное уравнение характеристик легче, чем решать исходное уравнение с частными производными.

Задача 2. Решить уравнение задачи 1

Решение. $u=ye^x$ — решение, все решения исчерпываются функциями от этого.

Задача 3. Решить уравнение $y\, \partial u/\partial x = x\, \partial u/\partial y$ на всей плоскости.

*Ответ.* Решения — функции от $x^2+y^2$.

Задача 4. Исчерпываются ли решения уравнения $x\, \partial u/\partial x = y\, \partial u/\partial y$ на $\mathbf{R}^2$ функциями от $xy$?

*Ответ.* Нет, существует решение, для которого $u(1, 1) \neq u(-1, -1)$.

## 2. Задача Коши.

Определение. *Задачей Коши* для уравнения $L_a u=0$ называется задача об определении функции $u$ по ее значениям на данной гиперповерхности (гиперповерхностью в $\mathbf{R}^n$ называется $(n-1)$-мерная поверхность. Например, в случае $n=2$ гиперповерхность есть кривая, при $n=3$ — обычная поверхность).

Заданная гиперповерхность называется *начальной гиперповерхностью*, а задание на ней искомой функции — *начальным условием*, $u|_\gamma=\varphi$. Функция $\varphi$ называется *начальной функцией*, она задана на начальной гиперповерхности.

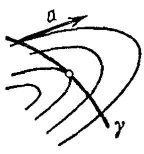


Рис. 88. Неразрешимая задача Коши.

Задача Коши не всегда имеет решение. Действительно, вдоль каждой характеристики значение $u$ постоянно. Но характеристика может пересекать начальную поверхность несколько раз (рис. 88). Если значения начальной функции в этих точках различны, то соответствующая задача Коши не имеет решения ни в какой области, содержащей указанную характеристику.

Определение. Точка на начальной гиперповерхности называется *нехарактеристической*, если характеристика, проходящая через эту точку, трансверсальна (не касательна) к начальной гиперповерхности.

Теорема. *Пусть $x$ — нехарактеристическая точка на начальной гиперповерхности. Тогда существует такая окрестность точки $x$, что задача Коши в этой окрестности имеет решение, и притом только одно.*

Доказательство. По теореме о выпрямлении можно выбрать координаты в окрестности точки $x$ так, что поле $a$ будет иметь компоненты $(1, 0, \ldots, 0)$, а начальная гиперповерхность примет вид $x_1=0$. В этих координатах задача Коши принимает вид $\partial u/\partial x_1=0$, $u|_{x_1=0}=\varphi$. Единственное в выпуклой области решение: $u(x_1, \ldots, x_n)=\varphi(x_2, \ldots, x_n)$

Задача 1 Решить задачу Коши $u|_{x=0}=\sin y$ для уравнения $\partial u/\partial x = y\,\partial u/\partial y$.

Решение. На характеристике $y=Ce^{-x}$; согласно начальному условию, $u=\sin C$.

*Ответ.* $u=\sin(e^x y)$.

Задача 2. Какие точки прямой $x=1$ являются нехарактеристическими для уравнения $y\,\partial u/\partial x = x\,\partial u/\partial y$?

*Ответ.* $y \neq 0$.

Задача 3. Имеет ли решение задача Коши $u|_{x=1}=y^2$ для этого уравнения на $\mathbf{R}^2$ и единственно ли решение?

*Ответ* Решение существует, но не единственно.

Замечание. Решения обыкновенного дифференциального уравнения образуют конечномерное многообразие: каждое решение задается конечным набором чисел (начальных условий). Мы видим, что у линейного однородного уравнения с частными производными первого порядка относительно функции от $n$ переменных «столько решений, сколько существует функций от $n-1$ переменных». Аналогичное явление имеет место и для общих уравнений с частными производными первого порядка.

Причина становится ясной, если рассмотреть дифференциальное уравнение как предел разностных. Те же соображения подсказывают, что для уравнения с частными производными второго порядка нужно задавать на начальной гиперповерхности две функции (значения решения и его производной по трансверсальному начальной гиперповерхности направлению), и т. д. Разумеется, эти соображения не заменяют доказательств соответствующих теорем существования и единственности решений. Эти доказательства можно найти в учебниках по теории уравнений с частными производными, например, в книге Р. Куранта и Д. Гильберта, «Методы математической физики» (М.: Гостехиздат, 1951)

**3. Линейное неоднородное уравнение.**

Определение. *Линейным неоднородным уравнением первого порядка* в области $U$ называется уравнение $L_a u = b$, где $\boldsymbol{a}$ — заданное векторное поле, $b$ — заданная функция, $u$ — искомая функция в области $U$. В координатной записи: $a_1\,\partial u/\partial x_1 + \ldots + a_n\,\partial u/\partial x_n = b$, где $a_k$ и $b$ — известные функции от $x_1, \ldots, x_n$.

Задача Коши ставится так же, как для однородного уравнения.

Теорема. *В достаточно малой окрестности любой нехарактеристической точки начальной поверхности решение существует и единственно.*

Доказательство. Производная неизвестной функции по времени движения вдоль характеристики известна (равна $b$), поэтому ее приращение вдоль отрезка характеристики равно интегралу от $b$ по времени движения вдоль этого отрезка. Например, если $a_1 \neq 0$ в изучаемой точке, то указанное приращение равно $\int b/a_1\,dx_1$ вдоль отрезка характеристики.

Задача 1. Решить задачу Коши $u|_{x=0}=\sin y$ для уравнения $\partial u/\partial x = y\,\partial u/\partial y + y$.

Решение. При изменении $x$ со скоростью 1 значение $u$ на характеристике $y=Ce^{-x}$ меняется со скоростью $Ce^{-x}$. Следовательно, приращение $u$ вдоль этой характеристики при изменении $x$ от 0 до $X$ равно $C(1-e^{-X})$.

Точка $(X, Y)$ лежит на характеристике, где $C=e^X Y$ В этой точке $u=\sin C + C(1-e^{-X})$.

*Ответ.* $u=\sin(e^x y)+y(e^x-1)$.

## 4. Квазилинейное уравнение.

Определение. *Квазилинейным уравнением первого порядка* называется уравнение $L_a u = \beta$ относительно функции $u$, где $\alpha(x) = a(x, u(x))$, $\beta(x) = b(x, u(x))$. Здесь $\boldsymbol{a}$ — векторное поле в $x$-пространстве, зависящее от точки оси $u$, как от параметра, $b$ — функция в $x$-пространстве, также зависящая от точки оси $u$, как от параметра. В координатной записи уравнение имеет вид

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = b(x, u).$$

Отличие от линейного уравнения только в том, что *коэффициенты $a$ и $b$ могут зависеть от значения неизвестной функции.*

Пример. Рассмотрим одномерную среду из частиц, движущихся по прямой по инерции, так что скорость каждой частицы остается неизменной. Обозначим скорость частицы, находящейся в момент $t$ в точке $x$, через $u(t, x)$. Запишем уравнение Ньютона: ускорение частицы равно нулю. Если $x = \varphi(t)$ — движение частицы, то $\dot{\varphi} = u(t, \varphi(t))$ и $\ddot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x}\dot{\varphi} = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x}$. Итак, *поле скоростей среды из невзаимодействующих частиц удовлетворяет квазилинейному уравнению* $u_t + uu_x = 0$.

Задача 1. Построить график решения в момент $t$, если $u = \operatorname{arcctg} x$ при $t = 0$.

Решение. Диффеоморфизм плоскости $(x, u) \mapsto (x + ut, u)$ сдвигает каждую прямую $u = \text{const}$ вдоль оси $x$ на $ut$ и переводит график решения в момент 0 в график решения в момент $t$ (этот диффеоморфизм есть не что иное, как преобразование фазового потока уравнения Ньютона для частиц; плоскость $(x, u)$ — фазовая плоскость частицы).

*Ответ.* См. рис. 89.

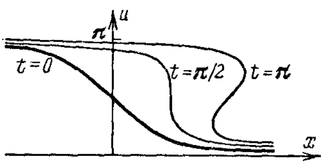


Рис. 89. График решения получается из графика начального условия действием фазового потока.

Замечание. При $t \geqslant \pi/2$ гладкого решения не существует. Начиная с этого момента частицы сталкиваются, и предположение об отсутствии взаимодействия между ними становится физически нереалистическим. В этих условиях движение среды описывают т. н. ударные волны — разрывные решения, удовлетворяющие уравнению левее и правее разрыва и удовлетворяющие на разрыве дополнительным условиям физического происхождения (зависящим от характера взаимодействия при столкновении частиц).

Задача 2. Составить уравнение эволюции поля скоростей среды из невзаимодействующих частиц в силовом поле с силой $F(x)$ в точке $x$.

*Ответ.* $u_t + uu_x = F$.

Задача 3. Решить это уравнение с начальным условием $u|_{t=0} = 0$ для силы $F(x) = -x$.

Решение. Фазовый поток состоит из поворотов, поэтому график $u(t, \cdot)$ — прямая с углом наклона $-t$.

*Ответ.* $u(t, x) = -x \operatorname{tg} t$, $|t| < \pi/2$.

Задача 4. Найти максимальную ширину полосы $0 \leqslant t < C$, в которой существует решение уравнения $u_t + uu_x = \sin x$ с начальным условием $u|_{t=0} = 0$.

*Ответ.* $C = \pi/2$.

**5. Характеристики квазилинейного уравнения.** Разобранный пример показывает, как полезно перейти от уравнения с частными производными для поля скоростей к обыкновенным уравнениям движения частиц среды. Нечто аналогичное можно сделать и в случае общего квазилинейного уравнения первого порядка.

Уравнение $L_{a(x,\,u(x))}u = b(x,\ u(x))$ означает, что если точка $x$ выходит из $x_0$ со скоростью $a_0 = a(x_0,\ u_0)$, где $u_0 = u(x_0)$, то значение $u(x)$ начинает меняться со скоростью $b_0 = b(x_0, u_0)$ (рис. 90). Иными словами, приложенный в точке $(x_0, u_0)$ вектор $A_0$ прямого произведения $x$-пространства и оси $u$, с компонентами $a_0$ и $b_0$, касается графика решения. Пусть $A_0 \neq 0$.

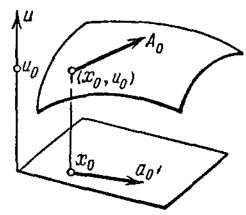

Рис. 90. Геометрический смысл квазилинейного уравнения.

Определение. Прямая направления вектора $A_0$ называется *характеристическим направлением* квазилинейного уравнения в точке $(x_0, u_0)$.

Характеристические направления во всех точках области определения коэффициентов уравнения образуют поле направлений. Это поле называется *характеристическим полем направлений* уравнения. В координатной записи характеристические направления — это направления векторов поля

$$A = \sum a_k(x,\ u)\frac{\partial}{\partial x_k} + b(x, u)\frac{\partial}{\partial u}.$$

Дифференциальное уравнение, заданное полем характеристических направлений, называется *уравнением характеристик*, а его интегральные кривые — *характеристиками*. Таким образом, характеристики являются фазовыми кривыми векторного поля $A$.

Задача 1. Найти характеристики уравнения среды из невзаимодействующих частиц, $u_t + uu_x = 0$.

Решение. $\dot{x} = u$, $\dot{t} = 1$, $\dot{u} = 0$. Характеристики — прямые $x = x_0 + u_0 t$, $u = u_0$.

Замечание 1. Линейное уравнение — частный случай квазилинейного, но характеристики линейного уравнения, рассматриваемого как квазилинейное, отличаются от его характеристик как линейного уравнения: первые лежат в $(x,\ u)$-пространстве, а вторые — их проекции в $x$-пространство.

Замечание 2. Квазилинейные уравнения сохраняют квазилинейный вид при диффеоморфизмах $x$-пространства и даже при диффеоморфизмах пространства-произведения, где определены его коэффициенты $a$ и $b$. Характеристики инвариантно связаны с уравнением: если такой диффеоморфизм переводит старое уравнение в новое, то характеристики старого переходят в характеристики нового. Более того, уравнение можно умножить на не обращающуюся в нуль функцию от $x$ и $u$ — при этом ни решения, ни характеристики не меняются (хотя векторное поле $A$ меняется).

Задача 2. Докажите, что квазилинейное уравнение приводится подходящим локальным диффеоморфизмом пространства-произведения к стандартному виду $\partial u/\partial x_1=0$ в окрестности любой точки $(x, u)$, в которой значение $a$ ненулевое.

**6. Интегрирование квазилинейного уравнения.** Уравнение характеристик для уравнения $\sum a_k\, \partial u/\partial x_k=b$ принято записывать в так называемом *симметричном виде*

$$\frac{dx_1}{a_1}=\ldots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{du}{b},$$

выражающем коллинеарность касательной к характеристике с характеристическим вектором (эти соотношения означают равенство 1-форм на векторах, касающихся характеристики, если знаменатели отличны от нуля).

Определение. Поверхность называется *интегральной поверхностью* поля направлений, если направление поля в каждой точке лежит в ее касательной плоскости.

Теорема. *Чтобы гладкая поверхность была интегральной поверхностью гладкого поля направлений, необходимо и достаточно, чтобы каждая интегральная кривая, имеющая с поверхностью общую точку, целиком на ней лежала.*

Доказательство. По теореме о выпрямлении поле можно диффеоморфизмом превратить в поле параллельных прямых. Для такого поля теорема очевидна.

Из определения характеристического направления вытекает

Теорема. *Функция и тогда и только тогда является решением квазилинейного уравнения, когда ее график является интегральной поверхностью поля характеристических направлений.*

Из двух последних теорем непосредственно вытекает

Следствие. *Функция и тогда и только тогда является решением квазилинейного уравнения, когда ее график содержит вместе с каждой своей точкой интервал характеристики, проходящей через эту точку.*

Таким образом, нахождение решений квазилинейного уравнения сводится к нахождению его характеристик. Если характеристики известны, то остается лишь составить из них поверхность, являющуюся графиком функции: эта функция будет решением квазилинейного уравнения, и все решения получаются этим способом.

Задача 1. Доказать, что задача Коши для квазилинейного уравнения первого порядка имеет решение и притом только одно в достаточно малой окрестности такой точки $x_0$ начальной гиперповерхности и для такого начального условия, что вектор $a(x_0, u(x_0))$ не касается начальной гиперповерхности

Замечание. В отличие от линейного уравнения, для квазилинейного уравнения нельзя говорить о характеристичности самих точек начальной гиперповерхности: будет данная точка характеристической или нет зависит также и от начального значения.

**7. Нелинейное уравнение с частными производными первого порядка.** Как и линейные или квазилинейные уравнения, нелинейные уравнения самого общего вида, $F(x, \partial u/\partial x, u)=0$, интегрируются при помощи характеристик. Но если характеристики линейного уравнения относительно функции в $\mathbf{R}^n$ лежат в $\mathbf{R}^n$, а квазилинейного — в $(n+1)$-мерном пространстве $\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$, то характеристики общего нелинейного уравнения являются кривыми в $(2n+1)$-мерном пространстве 1-струй функций, на котором определена задающая уравнение функция $F$.

Определение. Пространством 1-струй функций от $x=(x_1, \ldots, x_n)$ называется $(2n+1)$-мерное пространство с координатами $(x_1, \ldots, x_n;\ p_1, \ldots, p_n;\ y)$. 1-струя функции $u$ в точке $x$ — это точка этого пространства с координатами $(x,\ p=\partial u/\partial x,\ y=u(x))$. Множество 1-струй функции $u$ во всех точках $x$ ее области определения называется *1-графиком* этой функции.

Уравнение $F(x,\ \partial u/\partial x,\ u)=0$ определяет в пространстве 1-струй гиперповерхность $E$, где $F(x,\ p,\ y)=0$. Решение уравнения $F=0$ — это функция, 1-график которой принадлежит гиперповерхности $E$.

Мы будем предполагать, что вектор производных $F_p$ (с компонентами $\partial F/\partial p_i$) отличен от нуля: без этого требования уравнение могло бы вовсе не содержать $\partial u/\partial x$ и не было бы дифференциальным. Из условия $F_p\neq 0$ вытекает, что гиперповерхность $E$ — гладкая (по теореме о неявной функции). Самая трудная часть теории нелинейного уравнения с частными производными первого порядка — придумать следующее

Определение. *Характеристиками* уравнения $F=0$ называются фазовые кривые следующей трудно запоминаемой системы дифференциальных уравнений на гиперповерхности $E$ в пространстве 1-струй:

$$\dot{x}=F_p,\quad \dot{p}=-F_x-pF_y,\quad \dot{y}=pF_p.$$

Задача 1. Докажите, что фазовая кривая этой системы, начинающаяся на гиперповерхности $E$, целиком лежит на $E$.

Решение. $\dot{F}=F_x\dot{x}+F_p\dot{p}+F_y\dot{y}=0$.

Задача 2. Докажите, что *1-график каждого решения уравнения $F=0$ содержит вместе с каждой своей точкой интервал характеристики, проходящей через эту точку. Обратно, если 1-график функции состоит из целых характеристик, то функция — решение.*

Решение. Вдоль 1-графика решения $dy=p\,dx$ и $dp=(\partial^2u/\partial x^2)\,dx$. Для характеристического вектора первое условие очевидно выполнено, а второе вытекает из равенства нулю сужения $dF$ на 1-график: сужение $F_x\,dx+F_p\,dp+F_y\,dy$ на 1-график имеет вид

$$(F_x+pF_y)\,dx+F_p\,\partial^2u/\partial x^2\,dx$$

Доказательство обратного (а также геометрическую мотивировку странного определения характеристик) можно найти в книге В. И. Арнольда «Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений» М., 1978, § 8, или в книге В. И. Арнольда «Математические методы классической механики», М., 1974, стр. 333—334: они основаны на геометрии поля контактных плоскостей в пространстве струй.

Результат задачи 2 сводит интегрирование нелинейного уравнения первого порядка (например, отыскание решения задачи Коши) к интегрированию системы обыкновенных дифференциальных уравнений — уравнений характеристик. По начальному условию строится подмногообразие пространства 1-струй, проходящие через него характеристики образуют 1-график искомого решения.

Задача 3. Докажите, что характеристики нелинейного уравнения, являющегося квазилинейным, проектируются в характеристики этого квазилинейного уравнения при отображении $(x,\ p,\ y)\mapsto(x,\ y)$.

Задача* 4. Доказать, что характеристики нелинейного уравнения $F=0$ инвариантно связаны с уравнением: при диффеоморфизмах $x$-пространства или даже произведения $x$-пространства на ось значений функции производные преобразуются так, что характеристики старого уравнения переходят в характеристики нового; при умножении $F$ на не обращающуюся в нуль функцию характеристики не меняются.

Замечание. В действительности связь между гиперповерхностью $E$ и характеристиками на ней инвариантна относительно еще более широкой группы диффеоморфизмов пространства струй, перепутывающей аргументы не только со значениями, но и с производными: важно лишь, чтобы диффеоморфизм пространства струй сохранял поле контактных плоскостей (заданных уравнением $dy = p\,dx$). Такие диффеоморфизмы называются *контактными* и образуют *контактную группу*, фундаментальную для теории уравнений с частными производными первого порядка и для геометрической оптики.

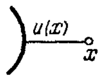

Рис. 91 Решение уравнения Гамильтона — Якоби.

Определение. Уравнением Гамильтона — Якоби называется уравнение с частными производными первого порядка, в которое явно не входит значение неизвестной функции, т. е. уравнение вида $H(x, \partial u/\partial x) = 0$.

Задача 5. Доказать, что расстояние от точки плоскости до гладкой кривой на плоскости (рис. 91) удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби $\sum (\partial u/\partial x_i)^2 = 1$ в окрестности этой кривой (исключая саму кривую).

Задача 6. Доказать, что расстояние от точки евклидова пространства до гладкого подмногообразия (любой размерности) в этом пространстве удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби $\sum (\partial u/\partial x_i)^2 = 1$ в окрестности подмногообразия (исключая само подмногообразие).

Задача 7. Доказать, что всякое решение уравнения Гамильтона — Якоби $\sum (\partial u/\partial x_i)^2 = 1$ в достаточно малой окрестности любой точки евклидова пространства является суммой расстояния до некоторой гладкой гиперповерхности и константы.

Задача 8. Доказать, что характеристики уравнения Гамильтона — Якоби $H = 0$ проектируются на пространство $(x, p)$ в виде фазовых кривых уравнений Гамильтона $\dot{x} = H_p$, $\dot{p} = -H_x$, лежащих на поверхности нулевого уровня функции Гамильтона.

## § 12. Консервативная система с одной степенью свободы

В качестве примера применения первого интеграла к исследованию дифференциального уравнения мы рассмотрим здесь механическую систему с одной степенью свободы, без трения.

**1. Определения.** *Консервативной системой с одной степенью свободы* называется система, описываемая дифференциальным уравнением

$$\ddot{x} = F(x), \tag{1}$$

где $F$ — дифференцируемая на некотором интервале $I$ вещественной оси $x$ функция.

Уравнение (1) эквивалентно системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F(x_1), \quad (x_1, x_2) \in I \times \mathbf{R}. \tag{2}$$

В механике принята следующая терминология:

$I$ — конфигурационное пространство;
$x_1 = x$ — координата;
$x_2 = \dot{x}$ — скорость;
$\ddot{x}$ — ускорение;
$I \times \mathbf{R}$ — фазовое пространство;
(1) — уравнение Ньютона;
$F$ — силовое поле;
$F(x)$ — сила.

Рассмотрим еще следующие функции на фазовом пространстве:

$T=\frac{\dot{x}^2}{2}=\frac{x_2^2}{2}$ — *кинетическая энергия*;

$U=-\int\limits_{x_0}^{x} F(\xi)\,d\xi$ — *потенциальная энергия*;

$E=T+U$ — *полная механическая энергия*.

Очевидно, $F(x)=-\frac{dU}{dx}$, так что *потенциальная энергия определяет систему*.

Пример 1. Для маятника § 1 (рис. 92) $\ddot{x}=-\sin x$, $x$ — угол отклонения, $F(x)=-\sin x$, $U(x)=-\cos x$. Для уравнения малых колебаний маятника $\ddot{x}=-x$

$$F(x)=-x,\qquad U(x)=\frac{x^2}{2}.$$

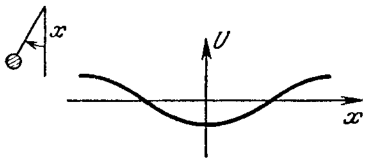

Рис. 92. Потенциальная энергия маятника.

Для уравнения малых колебаний перевернутого маятника $\ddot{x}=x$

$$F(x)=x,\qquad U(x)=-\frac{x^2}{2}$$

(рис. 93).

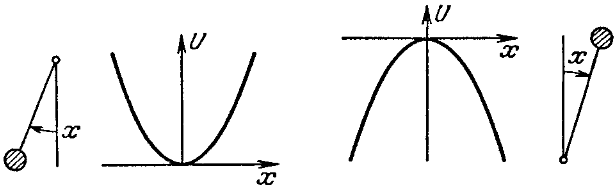

Рис. 93. Потенциальная энергия маятника вблизи нижнего и верхнего положения равновесия.

**2. Закон сохранения энергии.**

Теорема. *Полная энергия $E$ является первым интегралом системы* (2).

Доказательство. Имеем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{x_2(t)^2}{2}+U(x_1(t))\right)=x_2\dot{x}_2+U'\dot{x}_1=x_2F(x_1)-F(x_1)\,x_2=0,$$

что и требовалось доказать.

Доказанная теорема позволяет исследовать и явно «в квадратурах» решать уравнения вида (1), например уравнение маятника.

**3. Линии уровня энергии.** Изучим фазовые кривые системы (2). Каждая из них целиком лежит на одном множестве уровня энергии. Исследуем эти множества уровня.

Теорема. *Множество уровня энергии*

$$\left\{(x_1,\ x_2):\frac{x_2^2}{2}+U(x_1)=E\right\}$$

*является гладкой кривой в окрестности каждой своей точки, исключая лишь положения равновесия, т. е. точки* $(x_1, x_2)$, *где*

$$F(x_1)=0,\ x_2=0.$$

Доказательство. Воспользуемся теоремой о неявной функции. Имеем

$$\frac{\partial E}{\partial x_1}=-F(x_1),\quad \frac{\partial E}{\partial x_2}=x_2.$$

Если одна из производных отлична от 0, то в окрестности рассматриваемой точки множество уровня $E$ является графиком дифференцируемой функции вида $x_1=x_1(x_2)$ или $x_2=x_2(x_1)$. Теорема доказана.

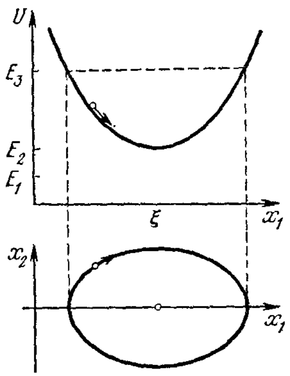

Рис. 94. Шарик в потенциальной яме и фазовая кривая.

Заметим, что исключенные выше точки $(x_1, x_2)$, где $F(x_1)=0$ и $x_2=0$,— это в точности стационарные точки (положения равновесия) системы (2) и особые точки векторного поля фазовой скорости. Далее, эти же точки являются критическими точками *) полной энергии $E(x_1, x_2)$. Наконец, точки $x_1$, где $F(x_1)=0$, — это критические точки потенциальной энергии $U$.

Чтобы нарисовать линии уровня энергии, полезно представлять себе шарик, катающийся в «потенциальной яме» $U$ (рис. 94).

Зафиксируем значение полной энергии $E$. Заметим, что кинетическая энергия неотрицательна. Поэтому потенциальная энергия не превосходит полной. Значит, линия уровня энергии $E$ проектируется на конфигурационное пространство (на ось $x_1$) в множество не превосходящих $E$ значений потенциальной энергии $\{x_1\in I\colon\ U(x_1)\leqslant E\}$ (шарик не может подняться выше уровня $E$ в потенциальной яме).

Далее, скорость тем больше (по абсолютной величине), чем меньше потенциальная энергия: $|x_2|=\sqrt{2(E-U(x_1))}$ (скатываясь в яму, шарик набирает скорость, а поднимаясь, теряет ее). В «точках поворота», где $U(x_1)=E$, скорость равна 0.

Из четности энергии по отношению к $x_2$ следует, что линия уровня энергии симметрична относительно оси $x_1$ (шарик проходит каждую точку туда и обратно с одинаковой скоростью).

Этих простых соображений достаточно, чтобы рисовать линии уровня энергии систем с разнообразными потенциалами $U$. Рассмотрим сначала простейший случай (бесконечно глубокая потенциальная яма с одним притягивающим центром $\xi$), когда $F(x)$ монотонно убывает, $F(\xi)=0$, $I=\mathbf{R}$ (рис. 94).

---

*) *Критической точкой* функции называется точка, в которой полный дифференциал функции равен нулю. Значение функции в такой точке называется *критическим значением*.

Если значение полной энергии $E_1$ меньше минимума потенциальной $E_2$, то множество уровня $E=E_1$ пусто (движение шарика физически невозможно). Множество уровня $E=E_2$ состоит из одной точки $(\xi, 0)$ (шарик покоится на дне ямы).

Если значение $E_3$ полной энергии больше критического значения $E_2=U(\xi)$, то множество уровня $E=E_3$ — гладкая замкнутая симметричная кривая, окружающая положение равновесия $(\xi, 0)$ на фазовой плоскости (шарик катается в яме взад и вперед; он поднимается до высоты $E_3$, в этот момент его скорость обращается в 0, и он скатывается обратно в яму, проходит $\xi$, в этот момент его скорость максимальна, поднимается с другой стороны и т. д.).

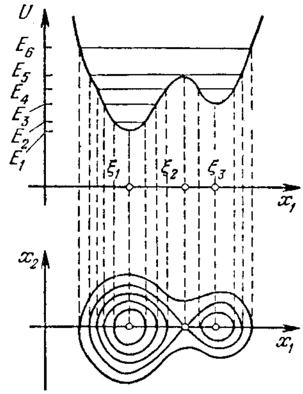

Рис. 95. Линии уровня энергии.

При исследовании более сложных случаев следует поступать подобным же образом, последовательно увеличивая значения полной энергии $E$ и останавливаясь на значениях $E$, равных критическим значениям потенциальной энергии $U(\xi)$ (где $U'(\xi)=0$), следя каждый раз за кривыми со значениями $E$, немного меньшими и немного большими критических.

Пример 1. Пусть потенциальная энергия $U$ имеет три критические точки: $\xi_1$ (минимум), $\xi_2$ (локальный максимум), $\xi_3$ (локальный минимум). На рис. 95 показаны линии уровня $E_1=U(\xi_1)$, $U(\xi_1)<E_2<U(\xi_3)$, $E_3=U(\xi_3)$, $U(\xi_3)<E_4<U(\xi_2)$, $E_5=U(\xi_2)$, $E_6>U(\xi_2)$.

Задача 1. Нарисовать линии уровня энергии для уравнения маятника $\ddot{x}=-\sin x$ и для уравнений маятника вблизи нижнего и верхнего положений равновесия ($\ddot{x}=-x$ и $\ddot{x}=x$).

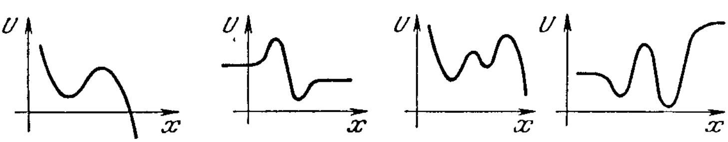

Рис. 96. Нарисуйте линии уровня энергии.

Задача 2. Нарисовать линии уровня энергии для *задачи Кеплера* *) $U=-\frac{1}{x}+\frac{C}{x^2}$ и для потенциалов, представленных на рис. 96.

**4. Линии уровня энергии вблизи особой точки.** При исследовании поведения линий уровня вблизи критического значения энергии полезно помнить о следующих обстоятельствах.

*) Уравнением Ньютона с таким потенциалом описывается изменение расстояния планет и комет от Солнца.

Замечание 1. *Если потенциальная энергия — квадратичная форма $U=kx^2/2$, то линии уровня энергии — кривые второго порядка* $2E=x_2^2+kx_1^2$.

В случае притяжения $k>0$ (т. е. критическая точка 0 — минимум потенциальной энергии $U$ (рис. 97)). В этом случае линии уровня энергии — гомотетичные эллипсы с центром в 0.

В случае отталкивания $k<0$ (т. е. критическая точка 0 — максимум потенциальной энергии (рис. 97)). В этом случае линии уровня энергии — гомотетичные гиперболы с центром в 0 и пара их асимптот: $x_2=\pm\sqrt{k}x_1$. Эти асимптоты называются также *сепаратрисами*, так как они отделяют друг от друга гиперболы разных типов.

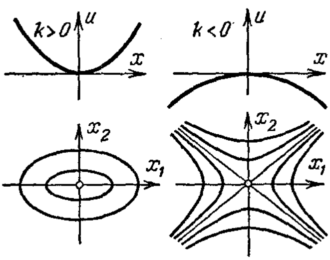


Рис. 97. Линии уровня энергии для притягивающего и отталкивающего квадратичных потенциалов.

Замечание 2. *В окрестности невырожденной критической точки приращение функции является квадратичной формой, если только надлежащим образом выбрать координату.*

Точка 0 является критической точкой дифференцируемой функции $f$, если $f'(0)=0$. Критическая точка 0 *невырождена*, если $f''(0)\neq 0$. Предположим, что $f(0)=0$.

Лемма Морса*). *В окрестности невырожденной критической точки 0 можно выбрать координату $y$ так, что $f=Cy^2$, $C=\operatorname{sgn} f''(0)$.*

Такой координатой будет, конечно, $y=\operatorname{sgn} x\sqrt{|f(x)|}$. Утверждение состоит в том, что соответствие $x\mapsto y$ в окрестности точки 0 диффеоморфно.

Для доказательства удобно воспользоваться следующим предложением:

Лемма Адамара*). *Пусть $f$ — дифференцируемая (класса $C^r$) функция, равная в точке $x=0$ нулю. Тогда $f(x)=xg(x)$, где $g$ — дифференцируемая (класса $C^{r-1}$ в окрестности точки $x=0$) функция.*

Доказательство. Имеем

$$f(x)=\int_0^1\frac{df(tx)}{dt}\,dt=\int_0^1 f'(tx)\,x\,dt=x\int_0^1 f'(tx)\,dt;$$

функция $g(x)=\int_0^1 f'(tx)\,dt$ класса $C^{r-1}$, и лемма доказана.

Применим лемму Адамара к функции $f$ леммы Морса дважды. Находим $f=x^2\varphi(x)$, где $2\varphi(0)=f''(0)\neq 0$. Итак, $y=x\sqrt{|\varphi(x)|}$. Лемма Морса доказана, так как функция $\sqrt{|\varphi(x)|}$ в окрестности точки $x=0$ дифференцируема ($r-2$ раза, если $f$ класса $C^r$).

*) Обе леммы можно распространить на функции многих переменных.

Таким образом, линии уровня энергии в окрестности невырожденной критической точки превращаются либо в эллипсы, либо в гиперболы при диффеоморфном изменении системы координат $(x_1, x_2)$.

Задача 1. Найти касательные к сепаратрисам отталкивающей особой точки $(U''(\xi)<0)$.

*Ответ.* $x_2 = \pm\sqrt{|U''(\xi)|}\,(x_1-\xi)$ (рис. 98).

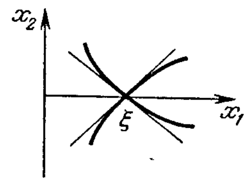


Рис. 98. Касательные к сепаратрисам отталкивающей особой точки.

**5. Продолжение решений уравнения Ньютона.** Пусть потенциальная энергия определена на всей оси $x$. Из закона сохранения энергии непосредственно вытекает

Теорема. *Если потенциальная энергия $U$ всюду положительна* *), *то каждое решение уравнения*

$$\ddot{x} = -\frac{dU}{dx} \tag{1$_1$}$$

*продолжается неограниченно.*

Пример 1. Пусть $U=-x^4/2$. Решение $x=1/(t-1)$ нельзя продолжить до $t=1$.

Установим сначала следующее утверждение, называемое *априорной оценкой*:

Лемма. *Если решение существует при $|t|<\tau$, то оно удовлетворяет неравенствам $|\dot{x}(t)|\leqslant\sqrt{2E_0}$, $|x(t)-x(0)|<\sqrt{2E_0}\,|t|$, где $E_0=\dfrac{\dot{x}(0)^2}{2}+$ $+U(x(0))$ — начальное значение энергии.*

Доказательство. Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{\dot{x}^2(t)}{2}+U(x(t))=E_0,$$

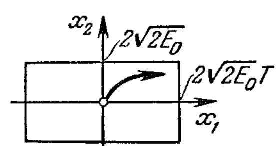


Рис. 99. Прямоугольник, откуда фазовая точка не выйдет за время $T$.

и поскольку $U>0$, первое неравенство доказано. Второе неравенство вытекает из первого, так как $x(t)-x(0)=\int\limits_0^t \dot{x}(\theta)\,d\theta$. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $T$ — произвольное положительное число.

Рассмотрим прямоугольник П (рис. 99) на фазовой плоскости

$$|x_1-x_1(0)|\leqslant 2\sqrt{2E_0}\,T, \quad |x_2|\leqslant 2\sqrt{2E_0}.$$

*) Разумеется, изменение потенциальной энергии $U$ на константу не меняет уравнения (1$_1$). Существенно лишь, что $U$ ограничена снизу.

Рассмотрим в расширенном фазовом пространстве $(x_1, x_2, t)$ параллелепипед $|t| \leqslant T$, $(x_1, x_2) \in \Pi$. По теореме о продолжении решение можно продолжить до границы параллелепипеда. Из леммы следует, что решение может выйти лишь на те грани параллелепипеда, где $|t| = T$. Итак, решение можно продолжать до любого $t = \pm T$, следовательно,— неограниченно.

Задача 1. Доказать неограниченную продолжаемость решений системы уравнений Ньютона $m_i \ddot{m}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, N$, $m_i > 0$, $x \in \mathbf{R}^N$, в случае положительной потенциальной энергии ($U > 0$).

**6. Некритические линии уровня энергии.** Предположим, что потенциальная энергия $U$ определена на всей оси $x$. Пусть $E$ — некритическое значение энергии, т. е. $E$ не равно значению функции $U$ ни в одной из ее критических точек.

Рассмотрим множество точек, где значение $U$ меньше $E$, $\{x: U(x) < E\}$. Это множество (рис. 100) состоит из конечного или счетного числа интервалов, так как функция $U$ непрерывна (два из этих интегралов могут простираться в бесконечность). На концах интервалов $U(x) = E$, следовательно, $U'(x) \neq 0$ (так как $E$ — некритическое значение).

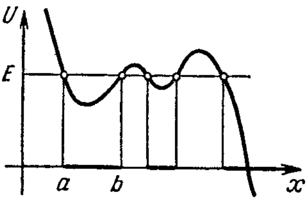


Рис. 100. Множество точек $x$, где $U(x) < E$

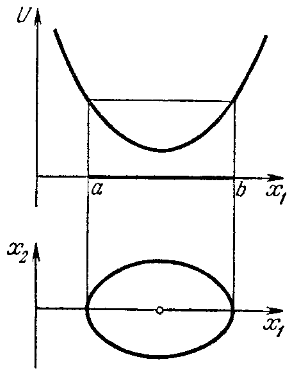


Рис 101 Фазовая кривая, диффеоморфная окружности.

Каждая точка множества $\{x: U(x) \leqslant E\}$ является по этой причине концом ровно одного интервала меньших значений. Поэтому все множество $\{x: U(x) \leqslant E\}$ есть объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся отрезков и, быть может, одного или двух уходящих в бесконечность лучей, или же совпадает со всей осью $x$.

Рассмотрим (рис. 101) один из таких отрезков, $a \leqslant x \leqslant b$,

$$U(a) = U(b) = E, \quad U(x) < E \text{ при } a < x < b.$$

Теорема. *Уравнение* $\frac{x_2^2}{2} + U(x_1) = E$, $a \leqslant x_1 \leqslant b$, *задает на плоскости* $(x_1, x_2)$ *гладкую кривую, диффеоморфную окружности. Эта кривая является фазовой кривой системы* (2)

*Аналогичным образом, луч* $a \leqslant x < \infty$ (*или* $-\infty < x \leqslant b$), *где* $U(x) \leqslant E$, *является проекцией фазовой кривой, диффеоморфной прямой линии, на ось* $x_1$ (рис. 102). *Наконец, в случае, если* $U(x) < E$ *на всей прямой, множество уровня E состоит из двух фазовых кривых*

$$x_2 = \pm\sqrt{2(E - U(x_1))}.$$

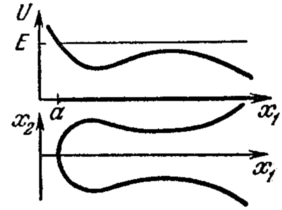


Рис. 102. Фазовая кривая, диффеоморфная прямой.

Итак, множество некритического уровня энергии состоит из конечного или счетного числа гладких фазовых кривых.

**7. Доказательство теоремы п. 6.** Закон сохранения энергии позволяет явно решить уравнение Ньютона. Действительно, при фиксированном значении полной энергии $E$ величина (но не знак) скорости $\dot{x}$ определяется положением $x$:

$$\dot{x} = \pm\sqrt{2(E - U(x))}, \tag{3}$$

а это — уравнение с *одномерным* фазовым пространством, которое мы уже умеем решать.

Пусть $(x_1, x_2)$ — точка нашего множества уровня, причем $x_2 > 0$ (рис. 103). Решение $\varphi$ уравнения (1) с начальным условием $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$ ищем из соотношения (3):

$$t - t_0 = \int\limits_{x_1}^{\varphi(t)} \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}} \tag{4}$$

для $t$, близких к $t_0$.

Заметим теперь, что интеграл $\dfrac{T}{2} = \displaystyle\int\limits_a^b \frac{d\xi}{\sqrt{2(E - U(\xi))}}$ сходится, так как $U'(a) \neq 0$, $U'(b) \neq 0$. Отсюда следует, что формула (4) задает непрерывную на некотором отрезке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ функцию $\varphi$, причем $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$. Эта функция везде удовлетворяет уравнению Ньютона (рис. 104).

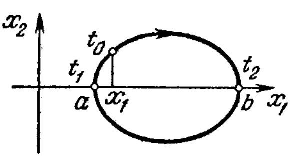


Рис. 103. Половину фазовой кривой (от $a$ до $b$) фазовая точка проходит за конечное время $T/2 = t_2 - t_1$.

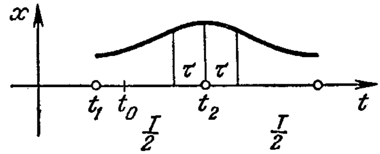


Рис. 104. Продолжение решения уравнения Ньютона с помощью отражений.

Интервал $(t_1, t_2)$ имеет длину $T/2$. Продолжим $\varphi$ на следующий интервал длины $T/2$ из соображений симметрии: $\varphi(t_2 + \tau) = \varphi(t_2 - \tau)$, $0 \leqslant \tau \leqslant T/2$, и далее периодически: $\varphi(t + T) \equiv \varphi(t)$. Функция $\varphi$, построенная теперь на всей прямой, всюду удовлетворяет уравнению Ньютона Кроме того, $\varphi(t_0) = x_1$, $\dot{\varphi}(t_0) = x_2$.

Итак, мы построили решение системы (2) с начальным условием $(x_1, x_2)$. Оно оказалось периодическим, с периодом $T$. Соответствующая замкнутая фазовая кривая есть в точности часть множества уровня $E$ над отрезком $a \leqslant x \leqslant b$. Эта кривая диффеоморфна окружности, как всякая замкнутая фазовая кривая (см. § 9).

Случай, когда интервал простирается до бесконечности (в одну сторону или в обе), проще рассмотренного и предоставляется читателю.

**8. Критические линии уровня.** Критические линии уровня могут быть устроены более сложно. Заметим, что такая линия содержит неподвижные точки $(x_1, x_2)$ (где $U'(x_1)=0$, $x_2=0$), каждая из которых уже является фазовой кривой. Если на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ всюду $U(x)<E$, кроме $U(a)=U(b)=E$, и оба конца — критические точки $(U'(a)=U'(b)=0)$

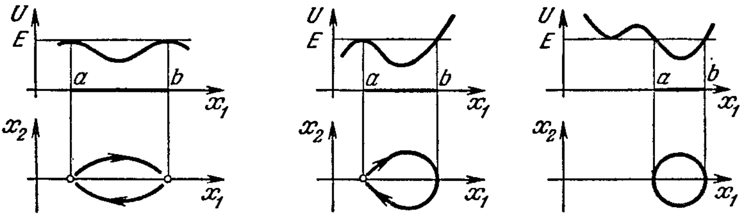


Рис. 105. Разбиение критической линии уровня энергии на фазовые кривые.

то две открытые дуги (рис. 105) $x_2 = \pm\sqrt{2(E-U(x_1))}$, $a<x_1<b$, являются фазовыми кривыми. Время, затрачиваемое фазовой точкой на прохождение такой дуги, бесконечно (теорема продолжения из п. 5 + единственность).

Если $U'(a)=0$, $U'(b)\neq 0$ (рис. 105), то уравнение

$$\frac{x_2^2}{2}+U(x_1)=E, \quad a<x_1\leqslant b,$$

определяет незамкнутую фазовую кривую. Наконец, если $U'(a)\neq 0$, $U'(b)\neq 0$ (рис. 105), то часть множества критического уровня над отрезком $a\leqslant x_1\leqslant b$ — замкнутая фазовая кривая, как в случае некритического уровня $E$.

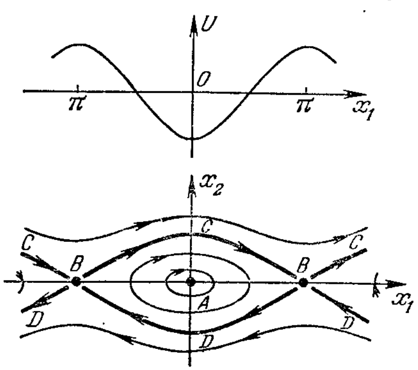


Рис. 106. Фазовые кривые уравнения маятника.

**9. Пример.** Применим все сказанное к уравнению маятника

$$\ddot{x} = -\sin x.$$

Потенциальная энергия равна $U(x)= -\cos x$ (рис. 106). Критические точки: $x_1 = k\pi$, $k=0, \pm 1, \ldots$

Замкнутые фазовые кривые вблизи $x_1=0$, $x_2=0$ похожи на эллипсы. Этим фазовым кривым соответствуют малые качания маятника. Их период $T$ мало зависит от амплитуды, пока она мала. При бо́льших значениях постоянной энергии получаются бо́льшие замкнутые кривые, пока энергия не достигнет критического значения, равного потенциальной энергии маятника, перевернутого вверх ногами. Период колебаний при этом растет (так как время движения по сепаратрисам, из которых состоит критическое множество уровня, бесконечное).

Бо́льшим значениям энергии соответствуют незамкнутые кривые, на которых $x_2$ не меняет знака, т. е. маятник не качается, а вращается. Его скорость достигает наибольшего значения в нижнем, а наименьшего — в верхнем положении.

Заметим, что значения $x_1$, отличающиеся на $2k\pi$, соответствуют одинаковым положениям маятника. Поэтому фазовым пространством маятника естественно считать не плоскость, а цилиндр $\{x_1 \bmod 2\pi, x_2\}$ (рис. 107).

Наворачивая на цилиндр нарисованную уже на плоскости картину, получим фазовые кривые маятника на поверхности цилиндра. Все они — замкнутые гладкие кривые,

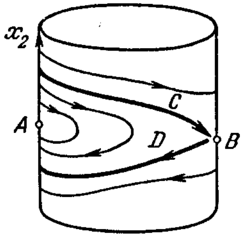


Рис. 107. Цилиндрическое фазовое пространство маятника.

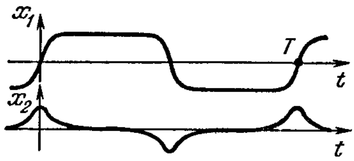


Рис. 108. Угол отклонения маятника и скорость его изменения при амплитуде, близкой к $\pi$.

исключая две стационарные точки $A$, $B$ (нижнее и верхнее положения равновесия) и две сепаратрисы $C$, $D$.

Задача 1. Нарисовать графики функций $x_1(t)$ и $x_2(t)$ для решения с энергией, близкой к критической энергии в верхнем положении, но немного меньшей.

*Ответ.* См. рис. 108. Функции $x_1(t)$, $x_2(t)$ выражаются через эллиптический синус sn и эллиптический косинус cn. Когда $E$ стремится к меньшему критическому значению, колебания маятника приближаются к гармоническим, а sn и cn переходят в sin и cos.

Задача 2. С какой скоростью стремится к бесконечности период $T$ колебаний маятника, когда энергия $E$ стремится к верхнему критическому значению $E_1$?

*Ответ.* С логарифмической ($\sim C \ln (E_1 - E)$).

Указание. См. формулу (4).

Задача 3. Нарисовать фазовые кривые систем с потенциальной энергией

$$U(x) = \pm x \sin x, \ \pm \frac{\sin x}{x}, \ \pm \sin x^2.$$

Задача 4. Нарисовать фазовые кривые уравнения Ньютона с силовым полем

$$F(x) = \pm x \sin x, \ \pm \frac{\sin x}{x}, \ \pm \sin x^2.$$

**10. Малые возмущения консервативной системы.** Исследовав движения консервативной системы, мы можем изучать близкие системы общего вида при помощи теоремы о дифференцируемости по параметру (ср. § 7, 5). При этом мы встретим качественно новые и весьма важные в приложениях явления — так называемые *автоколебания*.

Задача 1. Исследовать фазовые кривые системы, близкой к системе уравнений малых колебаний маятника:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \varepsilon f_1(x_1, x_2), \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \varepsilon f_2(x_1, x_2), \end{cases} \quad \varepsilon \ll 1, \quad x_1^2 + x_2^2 \leqslant R^2.$$

Решение. При $\varepsilon=0$ получаем уравнения малых колебаний маятника. По теореме о дифференцируемости по параметру при малых $\varepsilon$ решение (на конечном интервале времени) отличается поправкой порядка $\varepsilon$ от гармонических колебаний:

$$x_1=A\cos(t-t_0),\qquad x_2=-A\sin(t-t_0).$$

Следовательно, при достаточно малом $\varepsilon<\varepsilon_0(T)$ фазовая точка остается вблизи окружности радиуса $A$ в течение интервала времени $T$.

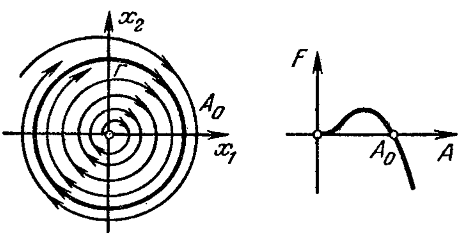

Рис. 109. Фазовые кривые уравнения Ван-дер-Поля и приращение энергии за один оборот.

В отличие от консервативного случая ($\varepsilon=0$), при $\varepsilon\neq 0$ фазовая кривая не обязательно замкнута: она может иметь вид спирали (рис. 109), у которой расстояние между соседними витками мало (порядка $\varepsilon$). Чтобы узнать, приближается ли фазовая кривая к началу координат или уходит от него, рассмотрим приращение энергии $E=\frac{x_1^2}{2}+\frac{x_2^2}{2}$ за один оборот вокруг начала координат. Нас будет особенно интересовать знак этого приращения: на раскручивающейся спирали приращение положительно, на сжимающейся — отрицательно, а на цикле равно 0. Выведем приближенную формулу (5) для приращения энергии.

Производную энергии по направлению нашего векторного поля легко вычислить: она пропорциональна $\varepsilon$ и равна $\dot E(x_1, x_2)=\varepsilon(x_1f_1+x_2f_2)$.

Для вычисления приращения энергии за оборот следовало бы проинтегрировать эту функцию вдоль витка фазовой траектории, которая, к сожалению, нам неизвестна. Но мы уже выяснили, что этот виток близок к окружности. Поэтому интеграл можно с точностью до $O(\varepsilon^2)$ брать по окружности $S$ радиуса $A$:

$$\Delta E=\varepsilon\int_0^{2\pi}\dot E(A\cos t,\ -A\sin t)\,dt+O(\varepsilon^2).$$

Подставляя вычисленное значение $\dot E$, находим *)

$$\Delta E=\varepsilon F(A)+O(\varepsilon^2),\tag{5}$$

где $F(A)=\oint f_1dx_2-f_2dx_1$ (интеграл берется по окружности радиуса $A$ «против часовой стрелки»).

Вычислив функцию $F$, мы сможем исследовать поведение фазовых кривых. Если функция $F$ положительна, то приращение энергии $\Delta E$ за оборот также положительно (при малых положительных $\varepsilon$). В этом случае фазовая кривая — раскручивающаяся спираль; система совершает нарастающие колебания. Если $F<0$, то $\Delta E<0$ и фазовая спираль закручивается. В этом случае колебания затухают.

Может случиться, что функция $F$ меняет знак (рис. 109). Пусть $A_0$ — простой корень функции $F$. Тогда при малых $\varepsilon$ уравнению $\Delta E(x_1, x_2)=0$ удовлетворяет замкнутая кривая $\Gamma$ на фазовой плоскости, близкая к окружности радиуса $A_0$ (это следует из теоремы о неявной функции).

Очевидно, кривая $\Gamma$ является замкнутой фазовой кривой — предельным циклом нашей системы.

Будут ли близкие фазовые кривые наматываться на цикл или сматываться с него, определяется знаком производной $F'=\left.\frac{dF}{dA}\right|_{A=A_0}$. Если $\varepsilon F'>0$, то цикл неустойчив, а если $\varepsilon F'<0$ — устойчив. Действительно, в первом случае приращение энергии за оборот больше нуля, если фазовая кривая находится вне цикла, и меньше нуля, если внутри; поэтому фазовая кривая всегда удаляется от цикла. Во втором же случае фазовые кривые приближаются к циклу и изнутри, и снаружи, как на рис. 109.

*) Мы пользуемся тем, что $dx_1=x_2\,dt$ и $dx_2=-x_1\,dt$ вдоль $S$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} = -x + \varepsilon\dot{x}(1 - x^2)$ (называемое *уравнением Ван-дер-Поля*). Вычисляя интеграл (5) при $f_1 = 0$, $f_2 = x_2(1 - x_1^2)$, получаем $F(A) = \pi\left(A^2 - \frac{A^4}{4}\right)$.

Эта функция имеет простой корень $A_0 = 2$ (рис. 109), причем при меньших $A$ она положительна, а при бо́льших — отрицательна. Поэтому уравнение Ван-дер-Поля имеет при малых $\varepsilon$ устойчивый предельный цикл, близкий к окружности $x^2 + \dot{x}^2 = 4$ на фазовой плоскости.

Сравним движения исходной консервативной системы ($\varepsilon = 0$) с тем, что происходит при $\varepsilon \neq 0$. В консервативной системе возможны колебания с любой амплитудой (все фазовые кривые замкнуты). Амплитуда определяется здесь начальными условиями.

В неконсервативной системе возможны качественно иные явления, например устойчивый предельный цикл. В этом случае при весьма разных начальных условиях устанавливается периодическое колебание одной и той же, вполне определенной амплитуды. Этот установившийся режим называется режимом автоколебаний.

Задача* 2. Исследовать автоколебательные режимы движения маятника с малым трением под действием постоянного вращающего момента $M$:

$$\ddot{x} + \sin x + \varepsilon\dot{x} = M.$$

Указание. Эта задача подробно разобрана для любых $\varepsilon$ и $M$ в книге А. А. Андронова, А. А. Витта, С. Э. Хайкина «Теория колебаний» (М.: Физматгиз, 1959, гл. 7)

*Глава 3*

# Линейные системы

Линейные уравнения — едва ли не единственный большой класс дифференциальных уравнений, для которых имеется достаточно полная теория. Эта теория, являющаяся, в сущности, ветвью линейной алгебры, позволяет полностью решить все линейные автономные уравнения.

Теория линейных уравнений полезна в качестве первого приближения и при исследовании нелинейных задач. Например, она позволяет исследовать устойчивость положений равновесия и топологический тип особых точек векторных полей в случаях общего положения.

## § 13. Линейные задачи

Рассмотрим вначале два примера ситуаций, где возникают линейные уравнения.

**1. Пример: линеаризация.** Рассмотрим дифференциальное уравнение, заданное векторным полем $\boldsymbol{v}$ в фазовом пространстве. Мы уже знаем, что в окрестности неособой точки ($\boldsymbol{v} \neq 0$) поле устроено просто: оно выпрямляется диффеоморфизмом. Рассмотрим теперь устройство поля в окрестности особой точки, т. е. точки, где вектор поля обращается в 0. Такая точка $x_0$ является стационарным решением нашего уравнения. Если уравнение описывает какой-либо физический процесс, то $x_0$ — стационарное состояние процесса, его «положение равновесия». Поэтому исследование окрестности особой точки — это изучение того, как будет развиваться процесс при малом отклонении начальных условий от равновесных (пример: верхнее и нижнее положения равновесия маятника).

При исследовании векторного поля в окрестности точки $x_0$, где вектор поля равен 0, естественно разложить поле в окрестности этой точки в ряд по формуле Тейлора. Первый член ряда Тейлора — линейный. Отбрасывание остальных членов называется *линеаризацией*. Линеаризованное векторное поле можно рассматривать как пример векторного поля с особой точкой $x_0$. С другой стороны, можно надеяться, что поведение решений исходного и линеаризованного уравнений близко (так как при линеаризации отбрасываются малые высшего порядка). Конечно, вопрос о связи решений исходного и линеаризованного уравнений требует специального исследования. Это исследование основывается на подробном анализе линейного уравнения, которым мы и будем вначале заниматься.

Задача 1. Покажите, что линеаризация — инвариантная, т. е. не зависящая от системы координат, операция.

Точнее, пусть поле $v$ в области $U$ задается в системе координат $x_i$ компонентами $v_i(x)$. Пусть особая точка имеет координаты $x_i=0$ (так что $v_i(0)=0$, $i=1, \ldots, n$). Тогда исходное уравнение записывается в виде системы

$$\dot{x}_i = v_i(x), \qquad i=1, \ldots, n.$$

Определение. *Линеаризованным уравнением* называется уравнение

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}\xi_j, \qquad i=1, \ldots, n, \quad a_{i,j} = \left.\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right|_{x=0}.$$

Рассмотрим касательный вектор $\xi \in T_0U$ с компонентами $\xi_i$ ($i=1, \ldots, n$). Линеаризованное уравнение можно записать в виде

$$\dot{\xi} = A\xi,$$

где $A$ — линейное отображение $A$: $T_0U \to T_0U$, заданное матрицей $a_{i,j}$.

Утверждается, что *отображение $A$ не зависит от системы координат $x_i$, участвовавшей в его определении.*

Задача 2. Линеаризовать уравнение маятника $\ddot{x} = -\sin x$ вблизи положений равновесия $x_0 = k\pi$, $\dot{x}_0 = 0$.

**2. Пример: однопараметрические группы линейных преобразований $\mathbf{R}^n$.** Другая задача, сразу сводящаяся к линейным дифференциальным уравнениям,— это задача описания однопараметрических групп линейных преобразований *) линейного пространства $\mathbf{R}^n$.

Заметим, что *касательное пространство к линейному пространству $\mathbf{R}^n$ в любой точке естественно отождествляется с самим линейным пространством.* А именно, мы отождествляем элемент $\dot{\varphi}$ касательного пространства $T_x\mathbf{R}^n$, представителем которого является кривая $\varphi$: $I \to \mathbf{R}^n$, $\varphi(0)=x$, с вектором

$$v = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)-x}{t} \in \mathbf{R}^n$$

самого пространства $\mathbf{R}^n$ (соответствие $v \leftrightarrow \dot{\varphi}$ взаимно однозначное).

Это отождествление зависит от структуры *линейного* пространства $\mathbf{R}^n$ и *не* сохраняется при диффеоморфизмах. Однако в линейных задачах, которыми мы будем теперь заниматься (например, в задаче об однопараметрических группах линейных преобразований), структура линейного пространства в $\mathbf{R}^n$ раз навсегда фиксирована. Поэтому *мы теперь впредь до возвращения к нелинейным задачам отождествляем* $T_x\mathbf{R}^n \equiv \mathbf{R}^n$.

Пусть $\{g^t,\ t\in\mathbf{R}\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований. Рассмотрим движение $\varphi$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ точки $x_0\in\mathbf{R}^n$.

Задача 1. Докажите, что $\varphi(t)$ — решение уравнения

$$\dot{x} = Ax \tag{1}$$

с начальным условием $\varphi(0)=x_0$, где $A$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — линейный оператор ($\equiv\mathbf{R}$ эндоморфизм), заданный соотношением $Ax = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}(g^t x) \quad \forall x\in\mathbf{R}^n$.

Указание. См. § 4, п. 4.

*) Напомним, что мы включаем в определение однопараметрической группы $\{g^t\}$ дифференцируемость $g^t x$ по $x$ и $t$.

Уравнение (1) называется *линейным*. Таким образом, для описания всех однопараметрических групп линейных преобразований достаточно исследовать решения линейных уравнений (1).

Мы увидим далее, что соответствие между однопараметрическими группами $\{g^t\}$ линейных преобразований и линейными уравнениями (1) взаимно однозначно: каждый оператор $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ задает однопараметрическую группу $\{g^t\}$.

Пример 1. Пусть $n=1$, $A$ — умножение на число $k$. Тогда $g^t$ — растяжение в $e^{kt}$ раз.

Задача 2. Найти поле скоростей точек твердого тела, вращающегося вокруг оси, проходящей через точку 0, с угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}$.

*Ответ*: $v(x)=[\omega, x]$.

**3. Линейное уравнение.** Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор в вещественном $n$-мерном пространстве $\mathbf{R}^n$.

Определение. *Линейным уравнением* называется уравнение с фазовым пространством $\mathbf{R}^n$, заданное векторным полем $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}. \tag{1}$$

Полный титул уравнения (1): *система $n$ линейных однородных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.*

Если в $\mathbf{R}^n$ фиксирована система (линейных) координат $x_i$, $i=1, \ldots, n$, то уравнение (1) записывается в виде системы $n$ уравнений: $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $i=1, \ldots, n$, где $(a_{ij})$ — матрица оператора $A$ в рассматриваемой системе координат. Матрица эта называется *матрицей системы*.

Решение уравнения (1) с начальным условием $\varphi(0)=\boldsymbol{x}_0$ дается в случае $n=1$ экспонентой $\varphi(t)=e^{At}\boldsymbol{x}_0$.

Оказывается, и в общем случае решение дается той же формулой: нужно только объяснить, что называется экспонентой линейного оператора. Этой задачей мы теперь и займемся.

## § 14. Показательная функция

Функцию $e^A$, $A \in \mathbf{R}$, можно определить любым из двух эквивалентных способов:

$$e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots, \tag{1}$$

$$e^A = \lim_{n \to \infty}\left(E + \frac{A}{n}\right)^n \tag{2}$$

(где $E$ означает единицу).

Пусть теперь $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор. Чтобы определить $e^A$, прежде всего определим понятие предела последовательности линейных операторов.

**1. Норма оператора.** Зафиксируем в $\mathbf{R}^n$ скалярное произведение и будем обозначать через $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$ ($x\in\mathbf{R}^n$) корень из скалярного квадрата $x$.

Пусть $A$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — линейный оператор.

Определение. *Нормой $A$* называется число

$$\|A\|=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Геометрически $\|A\|$ означает наибольший «коэффициент растяжения» преобразования $A$.

Задача 1. Докажите, что $0\leqslant\|A\|<\infty$.

Указание. $\|A\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|Ax\|$, сфера компактна, а функция $\|Ax\|$ непрерывна.

Задача 2. Докажите, что $\|\lambda A\|=|\lambda|\,\|A\|$, $\|A+B\|\leqslant\|A\|+\|B\|$, $\|AB\|\leqslant\|A\|\,\|B\|$ где $A$ и $B$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — линейные операторы, $\lambda\in\mathbf{R}$ — число.

Задача 3. Пусть $(a_{ij})$ — матрица оператора $A$ в ортонормированном базисе. Покажите, что

$$\max_j\sum_i a_{ij}^2\leqslant\|A\|^2\leqslant\sum_{i,j}a_{ij}^2.$$

Указание. См. Г. Е. Шилов. Введение в теорию линейных пространств.— М.: ГИТТЛ, 1956, § 53.

**2. Метрическое пространство операторов.** Множество $L$ всех линейных операторов $A$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ само является линейным пространством над полем вещественных чисел (по определению, $(A+\lambda B)\,x=Ax+\lambda Bx$).

Задача 1. Найти размерность этого линейного пространства $L$.

*Ответ.* $n^2$.

Указание. Оператор задается своей матрицей.

Определим расстояние между двумя операторами как норму их разности $\rho(A, B)=\|A-B\|$.

Теорема. *Пространство линейных операторов $L$ с метрикой $\rho$ является полным метрическим пространством* *).

Проверим, что $\rho$ — метрика.

По определению $\rho>0$, если $A\neq B$, $\rho(A, A)=0$, $\rho(B, A)=\rho(A, B)$. Неравенство треугольника $\rho(A, B)+\rho(B, C)\geqslant\rho(A, C)$ вытекает из неравенства $\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$ задачи 2 п. 1 ($X=A-B$, $Y=B-C$). Итак, метрика $\rho$ превращает $L$ в метрическое пространство. Его полнота тоже очевидна.

---

*) *Метрическим пространством* называется пара, состоящая из множества $M$ и функции $\rho$: $M\times M\to\mathbf{R}$, называемой метрикой, если

1) $\rho(x, y)\geqslant 0$, $(\rho(x, y)=0)\Leftrightarrow(x=y)$;
2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$ $\forall x, y\in M$;
3) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(z, y)$ $\forall x, y, z\in M$.

Последовательность $x_i$ точек метрического пространства $M$ называется *последовательностью Коши*, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$: $\rho(x_i, x_j)<\varepsilon$ $\forall i, j>N$. Последовательность $x_i$ *сходится* к точке $x$, если $\forall\varepsilon>0$ $\exists N$: $\rho(x, x_i)<\varepsilon$ $\forall i>N$. Пространство называется *полным*, если всякая последовательность Коши сходится.

**3. Доказательство полноты.** Пусть $\{A_i\}$ — последовательность Коши, т. е. для всякого $\varepsilon>0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что $\rho(A_m, A_k)<\varepsilon$ при $m, k>N$. Пусть $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$. Составим последовательность точек $\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^n$, $\boldsymbol{x}_i=A_i\boldsymbol{x}$. Покажем, что $\{\boldsymbol{x}_i\}$ — последовательность Коши в пространстве $\mathbf{R}^n$, снабженном евклидовой метрикой $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$. Действительно, по определению нормы оператора при $m, k>N$

$$\|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_k\|\leqslant\rho(A_m, A_k)\,\|\boldsymbol{x}\|\leqslant\varepsilon\,\|\boldsymbol{x}\|.$$

Поскольку $\|\boldsymbol{x}\|$ — фиксированное (не зависящее от $m$, $k$) число, отсюда следует, что $\{\boldsymbol{x}_i\}$ — последовательность Коши. Пространство $\mathbf{R}^n$ полно. Поэтому существует предел

$$\boldsymbol{y}=\lim_{i\to\infty}\boldsymbol{x}_i\in\mathbf{R}^n.$$

Заметим, что $\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}\|\leqslant\varepsilon\,\|\boldsymbol{x}\|$ при $k>N(\varepsilon)$, причем $N(\varepsilon)$ то же, что и выше, не зависящее от $\boldsymbol{x}$ число.

Точка $\boldsymbol{y}$ зависит от точки $\boldsymbol{x}$ линейно (предел суммы равен сумме пределов). Мы пополучаем линейный оператор $A\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$, $A\in L$. Мы видим, что при $k>N(\varepsilon)$

$$\rho(A_k, A)=\|A_k-A\|=\sup_{\boldsymbol{x}\neq 0}\frac{\|\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{y}\|}{\|\boldsymbol{x}\|}\leqslant\varepsilon.$$

Значит, $A=\lim\limits_{k\to\infty}A_k$ и пространство $L$ полно.

Задача 1. Докажите, что последовательность операторов $A_i$ сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность их матриц в фиксированном базисе. Выведите отсюда другое доказательство полноты.

**4. Ряды.** Пусть дано вещественное линейное пространство $M$, превращенное в метрическое полное пространство метрикой $\rho$ такой, что расстояние между двумя точками $M$ зависит лишь от их разности, причем $\rho(\lambda x, 0)=|\lambda|\,\rho(x, 0)$ $(x\in M,\ \lambda\in\mathbf{R})$. Такое пространство называется *нормированным*, а функция $\rho(x, 0)$ называется нормой $x$ и обозначается $\|x\|$.

Пример 1. Евклидово пространство $M=\mathbf{R}^n$ с метрикой

$$\rho(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{(x-y)(x-y)}.$$

Пример 2. Пространство $L$ линейных операторов $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ с метрикой $\rho(A, B)=\|A-B\|$.

Мы будем обозначать расстояние между элементами $A$ и $B$ из $M$ через $\|A-B\|$.

Поскольку элементы $M$ можно складывать и умножать на числа и последовательности Коши в $M$ имеют пределы, теория рядов вида $A_1+A_2+\ldots$, $A_i\in M$, буквально повторяет теорию числовых рядов. Теория функциональных рядов также непосредственно переносится на функции со значениями в $M$.

Задача 1. Докажите следующие две теоремы:

Признак Вейерштрасса. *Если ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i$ *функций* $f_i\colon X\to M$ *мажорируется сходящимся числовым рядом*:

$$\|f_i\|\leqslant a_i,\qquad \sum_{i=1}^{\infty}a_i<\infty,\qquad a_i\in\mathbf{R},$$

*то он сходится абсолютно и равномерно на* $X$.

Дифференцирование ряда. *Если ряд $\sum f_i$ функций $f_i$: $\mathbf{R} \to M$ сходится и ряд из производных $\frac{df_i}{dt}$ сходится равномерно, то он сходится к производной* $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{\infty} f_i$ ($t$ — координата на прямой $\mathbf{R}$).

Указание. Доказательство для случая $M = \mathbf{R}$ имеется в курсе анализа. На общий случай оно переносится дословно.

**5. Определение экспоненты $e^A$.** Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор

Определение. Экспонентой $e^A$ оператора $A$ называется линейный оператор из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$ $e^A = E + A + \frac{A^2}{2!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$ (где $E$ — тождественный оператор, $Ex = x$).

Теорема. *Ряд $e^A$ сходится при любом $A$ равномерно на каждом множестве $X = \{A\colon \|A\| \leqslant a\}$, $a \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Пусть $\|A\| \leqslant a$. Тогда наш ряд мажорируется числовым рядом $1 + a + \frac{a^2}{2!} + \ldots$, сходящимся к $e^a$. По признаку Вейерштрасса ряд $e^A$ равномерно сходится при $\|A\| \leqslant a$.

Задача 1. Вычислить матрицу $e^{At}$, если матрица $A$ имеет вид

$$1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\quad 2)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\quad 3)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\quad 4)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Ответ.* $1)\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix},\quad 2)\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad 3)\begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix},\quad 4)\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

**6. Пример.** Рассмотрим множество многочленов степени меньше $n$ от одного переменного $x$ с вещественными коэффициентами.

Это множество имеет естественную структуру вещественного линейного пространства: многочлены можно складывать и умножать на числа.

Задача 1. Найти размерность пространства многочленов степени меньше $n$
*Ответ.* $n$; базис, например, $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$.

Будем обозначать пространство многочленов степени меньше $n$ через $\mathbf{R}^n$ *). Производная многочлена степени меньше $n$ есть многочлен степени меньше $n$. Возникает отображение

$$A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \qquad Ap = \frac{dp}{dx}.$$

Задача 2. Доказать, что $A$ — линейный оператор; найти его ядро и образ
*Ответ.* $\operatorname{Ker} A = \mathbf{R}^1$, $\operatorname{Im} A = \mathbf{R}^{n-1}$.

С другой стороны, обозначим через $H^t$ ($t \in \mathbf{R}$) оператор сдвига на $t$, переводящий многочлен $p(x)$ в $p(x+t)$.

Задача 3 Доказать, что $H'$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор. Найти его ядро и образ.

*Ответ* $\operatorname{Ker} H' = 0$, $\operatorname{Im} H' = \mathbf{R}^n$.

Наконец, составим оператор $e^{At}$.

Теорема. $e^{At} = H^t$.

Доказательство. В курсе анализа эта теорема называется формулой Тейлора для многочленов:

$$p(x+t) = p(x) + \frac{t}{1!}\frac{dp}{dx} + \frac{t^2}{2!}\frac{d^2p}{dx^2} + \ldots$$

**7. Экспонента диагонального оператора**. Пусть матрица оператора $A$ диагональна, с диагональными элементами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Легко видеть, что матрица оператора $e^A$ также диагональна, с диагональными элементами $e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}$.

Определение. Оператор $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется *диагональным*, если его матрица в каком-нибудь базисе диагональна. Такой базис называется *собственным*.

Задача 1 Привести пример недиагонального оператора.

Задача 2. Докажите, что собственные числа диагонального оператора $A$ вещественны

Задача 3. Если все $n$ собственных чисел оператора $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ вещественны и различны, то он диагонален.

*Пусть $A$ — диагональный оператор. Тогда вычисление $e^A$ проще всего проводить в собственном базисе.*

Пример 1. Пусть матрица оператора $A$ имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ в базисе $e_1, e_2$. Поскольку собственные числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 0$ вещественны и различны, оператор $A$ диагонален. Собственный базис: $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = e_1 - e_2$. Матрица оператора $A$ в собственном базисе есть $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Поэтому матрица оператора $e^A$ в собственном базисе имеет вид $\begin{pmatrix} e^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Итак в исходном базисе матрица оператора $e^A$ имеет вид

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^2+1 & e^2-1 \\ e^2-1 & e^2+1 \end{pmatrix}.$$

**8. Экспонента нильпотентного оператора.**

Определение. Оператор $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ называется *нильпотентным*, если некоторая его степень равна 0.

Задача 1 Докажите, что оператор с матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ нильпотентный. Вообще, если все элементы матрицы оператора на диагонали и ниже равны 0, то оператор нильпотентный.

Задача 2. Докажите, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ в пространстве многочленов степени меньше $n$ нильпотентный.

*Если оператор $A$ нильпотентный, то ряд для $e^A$ обрывается, т. е. сводится к конечной сумме.*

---

*) Таким образом, мы отождествляем пространство многочленов, в котором выбран указанный выше базис, с изоморфным ему координатным пространством $\mathbf{R}^n$.

Задача 3. Вычислить $e^{tA}(t\in\mathbf{R})$, где $A$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — оператор с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(1 только над главной диагональю).

Указание. Один из способов решения этой задачи — формула Тейлора для многочленов. Оператор дифференцирования $\frac{d}{dx}$ имеет матрицу указанного вида в некотором базисе (каком?). Решение см. в § 25.

**9. Квазимногочлены.** Пусть $\lambda$ — вещественное число. *Квазимногочленом с показателем* $\lambda$ называется произведение $e^{\lambda x}p(x)$, где $p$ — многочлен. Степень многочлена $p$ называется степенью квазимногочлена. Зафиксируем значение показателя $\lambda$.

Задача 1. Докажите, что множество всех квазимногочленов степени меньше $n$ — линейное пространство. Найдите его размерность.

*Ответ.* $n$. Базис, например, $e^{\lambda x}$, $xe^{\lambda x}$, ..., $x^{n-1}e^{\lambda x}$.

Замечание. В понятии квазимногочлена, как и в понятии многочлена, кроется некоторая двусмысленность. Можно понимать (квази-)многочлен как *выражение*, составленное из знаков и букв; в таком случае решение предыдущей задачи очевидно. С другой стороны, можно понимать под (квази-)многочленом *функцию*, т. е. отображение $f$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$. В действительности оба понимания равносильны (когда коэффициенты многочленов вещественные или комплексные числа; мы сейчас рассматриваем (квази-)многочлены с вещественными коэффициентами).

Задача 2. Докажите, что каждая функция $f$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, которую можно записать в виде квазимногочлена, записывается в виде квазимногочлена единственным образом.

Указание. Достаточно доказать, что соотношение $e^{\lambda x}p(x)\equiv 0$ влечет равенство нулю всех коэффициентов многочлена $p(x)$.

Обозначим $n$-мерное линейное пространство квазимногочленов степени меньше $n$ с показателем $\lambda$ через $\mathbf{R}^n$.

Теорема. *Оператор дифференцирования* $\frac{d}{dx}$ — *линейный оператор* $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, *и при любом* $t\in\mathbf{R}$

$$e^{t\frac{d}{dx}}=H^t, \tag{3}$$

*где* $H^t$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — *оператор сдвига на* $t$ (т. е. $(H^tf)(x)=f(x+t)$).

Доказательство. Мы должны доказать прежде всего, что производная и сдвиг квазимногочлена степени меньше $n$ с показателем $\lambda$ суть снова квазимногочлены степени меньше $n$ с показателем $\lambda$.

Действительно,

$$\frac{d}{dx}(e^{\lambda x}p(x))=\lambda e^{\lambda x}p(x)+e^{\lambda x}p'(x),\qquad e^{\lambda(x+t)}p(x+t)=e^{\lambda x}(e^{\lambda t}p(x+t)).$$

Линейность дифференцирования и сдвига сомнений не вызывает.

Остается заметить, что ряд Тейлора для квазимногочлена абсолютно сходится на всей прямой (так как абсолютно сходятся ряды Тейлора для $e^{\lambda x}$ и для $p(x)$),— это и выражает формула (3).

Задача 3. Вычислить матрицу оператора $e^{At}$, если матрица $A$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & 1 \\ 0 & & \ddots & \lambda \end{pmatrix}$$

(на диагонали $\lambda$, над диагональю 1, остальные 0). Например, вычислить

$$\exp\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

*Указание.* Именно такой вид имеет матрица оператора дифференцирования в пространстве квазимногочленов (в каком базисе?). Решение см. в § 25.

## § 15. Свойства экспоненты

Установим теперь ряд свойств оператора $e^A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$; эти свойства позволят нам использовать $e^A$ для решения линейных дифференциальных уравнений.

**1. Групповое свойство.** Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор.

Теорема. *Семейство линейных операторов $e^{tA}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$, является однопараметрической группой линейных преобразований $\mathbf{R}^n$.*

Доказательство. Поскольку мы уже знаем, что $e^{tA}$ — линейный оператор, нужно только проверить, что

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA} \qquad (1)$$

и что $e^{tA}$ дифференцируемо зависит от $t$. Мы докажем, что

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}, \qquad (2)$$

как и положено экспоненте.

Чтобы доказать групповое свойство (1), перемножим сначала формальные ряды по степеням $A$:

$$\left(E + tA + \frac{t^2}{2}A + \ldots\right)\left(E + sA + \frac{s^2}{2}A^2 + \ldots\right) =$$
$$= E + (t+s)A + \left(\frac{t^2}{2} + ts + \frac{s^2}{2}\right)A^2 + \ldots$$

Коэффициент при $A^k$ в произведении будет равен $(t+s)^k/(k!)$, так как формула (1) верна в случае числовых рядов ($A \in \mathbf{R}$). Остается обосновать законность почленного умножения. Это можно сделать так же, как доказывается законность почленного умножения абсолютно сходящихся числовых рядов (ряды для $e^{tA}$ и $e^{sA}$ сходятся абсолютно, так как ряды $e^{|t|a}$, $e^{|s|a}$, где $a = \|A\|$, сходятся). Можно и прямо свести доказательство к числовому случаю.

Лемма. *Пусть $p \in \mathbf{R}[z_1, \ldots, z_n]$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами от переменных $z_1, \ldots, z_n$. Пусть $A_1, \ldots, A_N$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейные операторы. Тогда*

$$\|p(A_1, \ldots, A_n)\| \leqslant p(\|A_1\|, \ldots, \|A_n\|).$$

Доказательство. Это вытекает из неравенств

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \qquad \|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|, \qquad \|\lambda A\| = |\lambda|\|A\|.$$

Лемма доказана.

Обозначим через $S_m(A)$ частную сумму ряда для $e^A$:

$$S_m(A) = \sum_{k=0}^{m} \frac{A^k}{k!}.$$

$S_m$ — многочлен с неотрицательными коэффициентами относительно $A$. Мы должны доказать, что разность $\Delta_m = S_m(tA)S_m(sA) - S_m((t+s)A)$ стремится к 0 при $m \to \infty$.

Заметим, что $\Delta_m$ — это многочлен с неотрицательными коэффициентами относительно $sA$ и $tA$. Действительно, члены степени не выше $m$ по $A$ в произведении рядов все получаются перемножением членов степени не выше $m$ в рядах-сомножителях. Далее, $S_m((s+t)A)$ — частная сумма ряда-произведения. Поэтому $\Delta_m$ — это сумма всех членов степени выше $m$ по $A$ в произведении $S_m(tA)S_m(sA)$. Но все коэффициенты произведения многочленов с неотрицательными коэффициентами неотрицательны.

По лемме $\|\Delta_m(tA, sA)\| \leqslant \Delta_m(\|tA\|, \|sA\|)$. Обозначим неотрицательные числа $\|tA\|$, $\|sA\|$ через $\tau$, $\sigma$. Тогда $\Delta_m(\tau, \sigma) = S_m(\tau) S_m(\sigma) - S_m(\tau + \sigma)$. Поскольку $e^\tau e^\sigma = e^{\tau+\sigma}$, правая часть стремится к 0 при $m \to \infty$. Итак, $\lim\limits_{m \to \infty} \Delta_m(tA, sA) = 0$ и соотношение (1) доказано.

Для доказательства соотношения (2) продифференцируем ряд $e^{At}$ по $t$ формально; получим ряд из производных

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt} \frac{t^k}{k!} A^k = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно в любой области $\|A\| \leqslant a$, $|t| \leqslant T$, так же как и исходный ряд. Поэтому производная суммы ряда существует и равна сумме ряда из производных. Теорема доказана.

Задача 1. Верно ли, что $e^{A+B} = e^A e^B$?

*Ответ.* Нет.

Задача 2. Докажите, что $\det e^A \neq 0$.

Указание. $e^{-A} = (e^A)^{-1}$.

Задача 3. Докажите, что если оператор $A$ в евклидовом пространстве кососимметрический, то оператор $e^A$ — ортогональный.

**2. Основная теорема теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами.** Из доказанной теоремы непосредственно вытекает формула для решения линейного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

Теорема. *Решение уравнения* (3) *с начальным условием* $\varphi(0) = x_0$ *есть*

$$\varphi(t) = e^{tA} x_0, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Доказательство. Согласно формуле дифференцирования (2)

$$\frac{d\varphi}{dt} = Ae^{tA}x_0 = A\varphi(t).$$

Итак, $\varphi$ — решение. Поскольку $e^0=E$, $\varphi(0)=x_0$. Теорема доказана, так как по теореме единственности всякое решение в своей области определения совпадает с решением (4).

**3. Общий вид однопараметрических групп линейных преобразований пространства $\mathbf{R}^n$.**

Теорема. *Пусть $\{g^t\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n\}$ — однопараметрическая группа линейных преобразований. Тогда существует линейный оператор $A\colon \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^n$ такой, что $g^t=e^{At}$.*

Доказательство. Положим $A=\left.\dfrac{dg^t}{dt}\right|_{t=0}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{g^t-E}{t}$.

Мы уже доказали, что движение $\varphi(t)=g^tx_0$ — это решение уравнения (3) с начальным условием $\varphi(0)=x_0$. Согласно (4) $g^tx_0=e^{tA}x_0$, что и требовалось.

Оператор $A$ называют *производящим оператором* группы $\{g^t\}$.

Задача 1. Докажите, что производящий оператор определен группой однозначно.

Замечание. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между линейными дифференциальными уравнениями (3) и их фазовыми потоками $\{g^t\}$; при этом фазовый поток состоит из линейных диффеоморфизмов.

**4. Второе определение экспоненты.**

Теорема. *Пусть $A\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — линейный оператор. Тогда*

$$e^A=\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{A}{m}\right)^m. \tag{5}$$

Доказательство. Рассмотрим разность

$$e^A-\left(E+\frac{A}{m}\right)^m=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_m^k}{m^k}\right)A^k.$$

$\left(\text{Ряд сходится, так как } \left(E+\frac{A}{m}\right)^m \text{ — многочлен, а ряд } e^A \text{ сходится.}\right)$

Заметим, что коэффициенты разности неотрицательны:

$$\frac{1}{k!}\geqslant\frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{m\cdot m\cdot\ldots m}\frac{1}{k!}.$$

Поэтому, полагая $\|A\|=a$, находим

$$\left\|e^A-\left(E+\frac{A}{m}\right)^m\right\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k!}-\frac{C_m^k}{m^k}\right)a^k=e^a-\left(1+\frac{a}{m}\right)^m.$$

Последняя величина стремится к 0 при $m\to\infty$, и теорема доказана.

**5. Пример: формула Эйлера для $e^z$.** Пусть $\mathbf{C}$ — комплексная прямая. Мы можем рассматривать ее как вещественную плоскость $\mathbf{R}^2$, а умножение на комплексное число $z$ — как линейный оператор $A\colon \mathbf{R}^2\to \mathbf{R}^2$. Оператор $A$ есть поворот на угол $\arg z$ с растяжением в $|z|$ раз.

Задача 1. Найти матрицу умножения на $z=u+iv$ в базисе $e_1=1$, $e_2=i$. *Ответ.* $\begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}$.

Найдем теперь $e^A$. По формуле (5) надо вначале составить оператор $E+\frac{A}{n}$. Это — умножение на число $1+\frac{z}{n}$, т. е. поворот на угол $\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)$ с растяжением в $\left|1+\frac{z}{n}\right|$ раз (рис. 110).

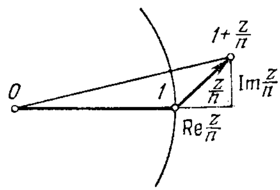

Рис. 110. Комплексное число $1+z/n$.

Задача 2. Докажите, что при $n\to\infty$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\mathrm{Im}\frac{z}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$\left|1+\frac{z}{n}\right|=1+\mathrm{Re}\frac{z}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6}$$

Оператор $\left(E+\frac{A}{n}\right)^n$ есть поворот на угол $n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)$ с растяжением в $\left|1+\frac{z}{n}\right|^n$ раз. Из формул (6) находим пределы угла поворота и коэффициента растяжения:

$$\lim_{n\to\infty} n\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=\mathrm{Im}\,z,\quad \lim_{n\to\infty}\left|1+\frac{z}{n}\right|^n=e^{\mathrm{Re}\,z}.$$

Тем самым доказана

Теорема. *Пусть $z=u+iv$ — комплексное число, $A$: $\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ — оператор умножения на $z$. Тогда $e^A$ есть оператор умножения на комплексное число $e^u(\cos v+i\sin v)$.*

Определение. Комплексное число

$$e^u(\cos v+i\sin v)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$$

называется *экспонентой* комплексного числа $z=u+iv$ и обозначается

$$e^z=e^u(\cos v+i\sin v). \tag{7}$$

Замечание. Если не отличать комплексное число от оператора умножения на это число, то определение превращается в теорему поскольку экспонента оператора уже определена.

Задача 3. Найти $e^0$, $e^1$, $e^i$, $e^{\pi i}$, $e^{2\pi i}$.

Задача 4. Докажите, что $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$ ($z_1\in\mathbf{C}$, $z_2\in\mathbf{C}$).

Замечание. Поскольку экспонента определяется также рядом, имеем

$$e^z=1+z+\frac{z^2}{2!}+\cdots,\quad z\in\mathbf{C} \tag{8}$$

(ряд сходится абсолютно и равномерно в каждом круге $|z|\leqslant a$).

Задача 5. Сравнивая этот ряд с формулой Эйлера (7), вывести ряды Тейлора для $\sin v$, $\cos v$.

Замечание. Обратно, зная ряды Тейлора $\sin v$, $\cos v$, $e^u$, можно было бы доказать формулу (7), приняв формулу (8) за определение $e^z$.

**6. Ломаные Эйлера.** Соединяя формулы (4) и (5), мы получаем метод приближенного решения дифференциального уравнения (3), называемый *методом ломаных Эйлера*.

Рассмотрим дифференциальное уравнение с линейным фазовым пространством $\mathbf{R}^n$, заданное векторным полем $v$. Чтобы найти решение $\varphi$ уравнения $\dot{x} = v(x)$, $x \in \mathbf{R}^n$, с начальным условием $x_0$, поступим следующим образом (рис. 111). Скорость в точке $x_0$ нам известна: это $v(x_0)$. Будем двигаться с постоянной скоростью $v(x_0)$ из $x_0$ в течение времени $\Delta t = t/N$. Попадем в точку $x_1 = x_0 + v(x_0)\,\Delta t$. В течение следующего отрезка времени $\Delta t$ будем двигаться со скоростью $v(x_1)$, и т. д.:

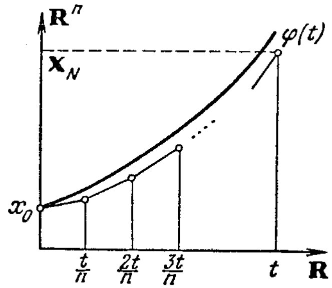


Рис. 111. Ломаная Эйлера.

$$x_{k+1} = x_k + v(x_k)\,\Delta t, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Обозначим через $X_N(t)$ последнюю точку, $x_N$. Заметим, что график, изображающий движение с кусочно-постоянной скоростью,— это ломаная линия из $N$ звеньев в расширенном фазовом пространстве $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$. Эта ломаная и называется ломаной Эйлера. Естественно ожидать, что при $N \to \infty$ последовательность ломаных Эйлера сходится к интегральной кривой, так что последняя точка $X_N$ будет при больших $N$ близка к значению решения $\varphi$ с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ в точке $t$.

Теорема. *Для линейного уравнения* (3) $\lim\limits_{N \to \infty} X_N(t) = \varphi(t)$.

Доказательство. По определению ломаной Эйлера при $v(x) = Ax$ имеем $X_N = \left(E + \frac{At}{N}\right)^N x_0$. Поэтому $\lim\limits_{N \to \infty} X_N = e^{tA}x_0$ (см. (5)). Итак, $\lim\limits_{N \to \infty} X_N = \varphi(t)$ (см. (4)).

Задача 1. Докажите, что не только конец ломаной Эйлера стремится к $\varphi(t)$, но и вся последовательность кусочно-линейных функций $\varphi_n\colon I \to \mathbf{R}^n$, графиками которых служат ломаные Эйлера, равномерно сходится к решению $\varphi$ на отрезке $[0, t]$.

Замечание. Ломаная Эйлера в общем случае (когда векторное поле $v$ зависит от $x$ нелинейно) также может быть записана в виде $X_N = \left(E + \frac{tA}{N}\right)^N x_0$, где $A$ — нелинейный оператор, переводящий точку $x$ в точку $v(x)$. В дальнейшем мы увидим, что и в этом случае последовательность ломаных Эйлера сходится к решению, по крайней мере при достаточно малых $|t|$ (§ 31,9). Таким образом, выражение (4), в котором экспонента определена формулой (5), дает решение вообще всех дифференциальных уравнений *).

Эйлерова теория экспоненты, единообразная во всех своих вариантах от определения числа $e$, формулы Эйлера для $e^z$, формулы Тейлора, формулы (4) для решения линейных уравнений и до метода ломаных Эйлера, имеет много других применений, выходящих за рамки нашего курса.

## § 16. Определитель экспоненты

Если оператор $A$ задан своей матрицей, вычисление матрицы оператора $e^A$ может требовать длинных выкладок. Однако определитель матрицы $e^A$ можно, как мы сейчас увидим, вычислить очень легко.

**1. Определитель оператора.** Пусть $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор.

О п р е д е л е н и е. *Определителем* оператора $A$ называется определитель матрицы оператора $A$ в каком-нибудь базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$; обозначение: $\det A$.

Определитель матрицы оператора $A$ не зависит от базиса. Действительно, если $(A)$ — матрица оператора $A$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, то матрицей оператора $A$ в другом базисе будет $(B)(A)(B^{-1})$, и

$$\det(B)(A)(B^{-1}) = \det(A).$$

*Определитель матрицы — это ориентированный объем параллелепипеда* **), *ребра которого задаются столбцами матрицы.*

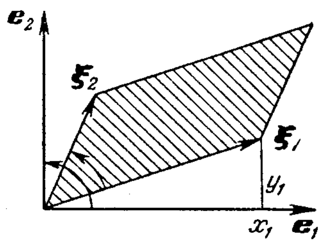


Рис. 112. Определитель матрицы равен ориентированной площади параллелограмма, натянутого на ее столбцы.

Например, при $n=2$ (рис. 112) определитель $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$ есть площадь параллелограмма, натянутого на векторы $\xi_1$, $\xi_2$ с компонентами $(x_1, y_1)$ и $(x_2, y_2)$, взятая со знаком плюс, если упорядоченная пара векторов $(\xi_1, \xi_2)$ задает ту же ориентацию $\mathbf{R}^2$, что и базисная пара векторов $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$ и со знаком минус в противном случае.

Столбец с номером $i$ в матрице оператора $A$ в базисе $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ составлен из координат образа базисного вектора $A\boldsymbol{e}_i$. Поэтому *опре-*

*) Практически приближенно решать уравнение с помощью ломаных Эйлера неудобно, так как приходится брать очень малый шаг $\Delta t$, чтобы получить заданную точность. Чаще пользуются различными усовершенствованиями этого метода, в которых интегральная кривая аппроксимируется не отрезком прямой, а отрезком параболы той или иной степени. Наиболее часто используются методы Адамса, Штермера и Рунге. С ними можно познакомиться по учебникам приближенных вычислений.

**) Параллелепипед с ребрами $\xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbf{R}^n$ есть подмножество $\mathbf{R}^n$, состоящее из всех точек вида $x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$, $0 \leqslant x_i \leqslant 1$. При $n=2$ параллелепипед называется параллелограммом. Если вы знакомы с каким-либо определением объема, то легко докажете выделенное утверждение. Если же нет, то можете принять его за определение объема параллелепипеда.

*делитель оператора $A$ — это ориентированный объем образа единичного куба (параллелепипеда с ребрами $e_1, \ldots, e_n$) при отображении $A$.*

Задача 1 Пусть П — параллелепипед с линейно независимыми ребрами Докажите, что отношение (ориентированного) объема образа параллелепипеда $A\Pi$ к (ориентированному) объему П не зависит от П и равно $\det A$.

Замечание Читатель, знакомый с теорией измерения объемов в $\mathbf{R}^n$, может заменить П любой фигурой, имеющей объем.

Итак, *определитель оператора $A$ — это коэффициент изменения ориентированного объема: при применении $A$ ориентированный объем любой фигуры меняется в* $\det A$ *раз.* Геометрически вовсе не очевидно, что растяжение объема для всех фигур одинаково (даже в случае плоскости), ведь форма фигуры при линейном преобразовании сильно меняется.

**2. След оператора.** *Следом матрицы $A$* называется сумма ее диагональных элементов. След обозначается tr (от английского «trace») или Sp (от немецкого «Spur»): $\operatorname{tr} A = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii}$.

След матрицы оператора $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ не зависит от базиса, но лишь от самого оператора $A$.

Задача 1 Докажите, что след матрицы равен сумме всех $n$ ее собственных чисел, а определитель — их произведению.

Указание. Примените формулу Виета к многочлену

$$\det|A-\lambda E| = (-\lambda)^n + (-\lambda)^{n-1}\sum_{i=1} a_{i,i} + \ldots$$

Собственные числа уже не зависят от базиса. Это позволяет дать следующее

Определение. *Следом оператора $A$* называется след его матрицы в каком-нибудь (и тогда в любом) базисе.

**3. Связь определителя и следа.** Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор, $\varepsilon \in \mathbf{R}$. Легко доказывается

Теорема. *При* $\varepsilon \to 0$ $\det(E+\varepsilon A) = 1 + \varepsilon \operatorname{tr} A + O(\varepsilon^2)$.

Доказательство. Определитель оператора $E+\varepsilon A$ равен произведению собственных чисел. Собственные числа оператора $E+\varepsilon A$ (с учетом кратностей) равны $1+\varepsilon\lambda_i$, где $\lambda_i$ — собственные числа $A$. Поэтому $\det(E+\varepsilon A) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1+\varepsilon\lambda_i) = 1 + \varepsilon\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i + O(\varepsilon^2)$, что и требовалось доказать.

Второе доказательство. Ясно, что $\varphi(\varepsilon) = \det(E+\varepsilon A)$ — многочлен относительно $\varepsilon$, причем $\varphi(0)=1$. Нужно доказать, что $\varphi'(0) = \operatorname{tr} A$. Определитель матрицы $\|x_{i,j}\|$ обозначим через $\Delta(\{x_{i,j}\})$. По правилу дифференцирования сложной функции $\left.\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \left.\frac{\partial\Delta}{\partial x_{i,j}}\right|_E \frac{dx_{i,j}}{d\varepsilon}$, где $x_{i,j}(\varepsilon)$ — элементы матрицы $E+\varepsilon A$ Частная производная $\left.\frac{\partial\Delta}{\partial x_{i,j}}\right|_E$ равна по определению

$\left.\frac{d}{dh}\right|_{h=0} \det(E+he_{i,j})$, где $e_{i,j}$ — матрица, единственный ненулевой элемент которой — это 1 в $i$-й строке, $j$-м столбце. Но $\det(E+he_{i,j})=1$ при $i \neq j$ и $1+h$ если $i=j$. Итак, $\left.\frac{\partial \Delta}{\partial x_{i,j}}\right|_E=0$, если $i \neq j$, и 1, если $i=j$. Поэтому $\left.\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}=$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_{i,i}}{d\varepsilon} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = \operatorname{tr} A, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Между прочим, мы заново доказали независимость следа от базиса

Следствие. *При малом изменении ребер параллелепипеда на изменение объема влияет лишь изменение каждого ребра в его собственном направлении; изменение же в направлении других ребер дает в изменение объема лишь вклад второго порядка малости.*

Например, площадь параллелограмма, близкого к квадрату (рис. 113), малыми второго порядка малости отличается от площади заштрихованного прямоугольника.

Можно было бы доказать это следствие из элементарно-геометрических соображений; это привело бы к геометрическому доказательству предыдущей теоремы.

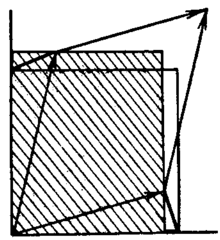

Рис. 113. Приближенное определение площади параллелограмма, близкого к квадрату.

**4. Определитель оператора $e^A$.**

Теорема. *Для любого линейного оператора $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$*

$$\det e^A = e^{\operatorname{tr} A}.$$

Доказательство. Согласно второму определению экспоненты $\det e^A = \det\left(\lim_{m\to\infty}\left(E+\frac{A}{m}\right)^m\right) = \lim_{m\to\infty}\left(\det\left(E+\frac{A}{m}\right)^m\right)$, ибо определитель матрицы — многочлен (и следовательно, непрерывная функция) от элементов. Далее, по предыдущей теореме

$$\det\left(E+\frac{A}{m}\right)^m = \left(\det\left(E+\frac{A}{m}\right)\right)^m = \left(1+\frac{1}{m}\operatorname{tr} A + O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)^m, \quad m\to\infty$$

Остается заметить, что $\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{a}{m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right)\right)^m = e^a$ для любого $a \in \mathbf{R}$, в частности для $a=\operatorname{tr} A$.

Следствие 1. *Оператор $e^A$ невырожден.*

Следствие 2. *Оператор $e^A$ сохраняет ориентацию $\mathbf{R}^n$* (т. е. $\det A > 0$).

Следствие 3. (формула Лиувилля). *Фазовый поток $\{g^t\}$ линейного уравнения*

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

*за время $t$ меняет объем любой фигуры в $e^{at}$ раз, где $a=\operatorname{tr} A$.*

Действительно, $\det g^t = \det e^{At} = e^{\operatorname{tr} At} = e^{t \operatorname{tr} A}$.

В частности, отсюда вытекает

Следствие 4. *Если след $A$ равен 0, то фазовый поток уравнения* (1) *сохраняет объемы (т. е. $g^t$ переводит любой параллелепипед в параллелепипед того же объема).*

Действительно, $e^0=1$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение маятника с коэффициентом трения $-k$

$$\ddot{x}=-x+k\dot{x},$$

эквивалентное системе

$$\dot{x}_1=x_2, \quad \dot{x}_2=-x_1+kx_2$$

с матрицей (рис. 114) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$.

След этой матрицы равен $k$. Итак, при $k<0$ преобразование фазового потока $g^t$ $(t>0)$ переводит каждую область фазовой плоскости

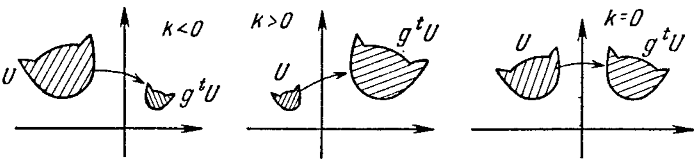


Рис 114. Поведение площадей при преобразованиях фазового потока уравнения маятника.

в область меньшей площади. В системе с отрицательным трением $(k>0)$, наоборот, площадь области $g^tU$, $t>0$, больше площади $U$. Наконец, когда трения нет $(k=0)$, фазовый поток $g^t$ сохраняет площади (неудивительно: в этом случае, как мы уже знаем $g^t$ есть поворот на угол $t$).

Задача 1. Пусть вещественные части всех собственных чисел $A$ отрицательны. Докажите, что фазовый поток $g^t$ уравнения (1) уменьшает объемы $(t>0)$.

Задача 2. Докажите, что собственные числа оператора $e^A$ равны $e^{\lambda_i}$, где $\lambda_i$ — собственные числа оператора $A$. Выведите отсюда доказанную выше теорему.

## § 17. Практическое вычисление матрицы экспоненты — случай вещественных и различных собственных чисел

При практическом решении дифференциальных уравнений оператор $A$ задан своей матрицей в некотором базисе и требуется явно вычислить матрицу оператора $e^A$ в том же базисе. Начнем с простейшего случая.

**1. Диагональный оператор.** Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=Ax, \quad x\in \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

где $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — диагональный оператор. В базисе, в котором матрица оператора $A$ диагональна, она имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_i$ — собственные числа. Матрица оператора $e^{At}$ имеет диагональный вид

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Итак, решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi_0(0)=(x_{1_0}, \ldots, x_{n_0})$ имеет в этом базисе вид $\varphi_k=e^{\lambda_k t}x_{k_0}$. К этому базису и надо перейти, если матрица оператора $A$ дана в другом базисе.

Если все $n$ собственных чисел оператора $A$ вещественны и различны, то он диагонален ($\mathbf{R}^n$ распадается в прямую сумму одномерных инвариантных относительно $A$ подпространств).

Поэтому решать уравнение (1) в случае, когда собственные числа оператора $A$ вещественны и различны, нужно следующим образом:

1) составить *вековое* или *характеристическое* уравнение

$$\det|A-\lambda E|=0;$$

2) найти его корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; мы предполагаем, что они вещественны и различны;

3) найти собственные векторы $\xi_1, \ldots, \xi_n$ из линейных уравнений $A\xi_k=\lambda_k\xi_k$, $\xi_k\neq 0$;

4) разложить начальное условие по собственным векторам

$$\boldsymbol{x}_0=\sum_{k=1}^{n} C_k\xi_k;$$

5) написать ответ $\varphi(t)=\sum\limits_{k=1}^{n} C_k e^{\lambda_k t}\xi_k$;

В частности, получаем

Следствие. *Пусть $A$ — диагональный оператор. Тогда элементы матрицы $e^{At}$ ($t\in\mathbf{R}$) в любом базисе являются линейными комбинациями экспонент $e^{\lambda_k t}$, где $\lambda_k$ — собственные числа матрицы $A$.*

**2. Пример.** Рассмотрим маятник с трением

$$\dot{x}_1=x_2, \qquad \dot{x}_2=-x_1-kx_2.$$

Матрица оператора $A$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}, \quad \operatorname{tr} A=-k, \quad \det A=1.$$

Поэтому характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+k\lambda+1=0$; корни вещественны и различны, когда дискриминант положителен, т. е. когда $|k|>2$. Итак, при достаточно большом (по абсолютной величине) коэффициенте трения $k$ оператор $A$ диагонален.

Рассмотрим случай $k>2$. В этом случае оба корня $\lambda_1$, $\lambda_2$ отрицательны. В собственном базисе уравнение запишется в виде

$$\dot{y}_1=\lambda_1 y_1, \quad \lambda_1<0, \quad \dot{y}_2=\lambda_2 y_2, \quad \lambda_2<0.$$

Отсюда, как § 2, получаем решение $y_1(t)=e^{\lambda_1 t}y_1(0)$, $y_2(t)=e^{\lambda_2 t}y_2(0)$ и картинку (узел, рис. 115). При $t\to+\infty$ все решения стремятся к 0, почти все интегральные кривые касаются оси $y_1$, если $|\lambda_2|$ больше $|\lambda_1|$ (тогда $y_2$ стремится к 0 быстрее $y_1$). Картинка на плоскости $(x_1, x_2)$ получается линейным преобразованием.

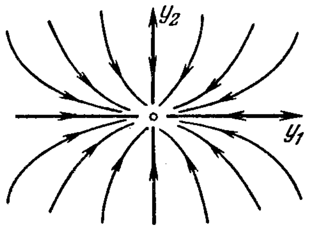

Рис. 115. Фазовые кривые маятника с сильным трением в собственном базисе.

Пусть, например, $k=3^1/_3$, так что $\lambda_1=-{}^1/_3$, $\lambda_2=-3$.

Собственный вектор $\xi_1$ находим из условия $x_1=-3x_2$; получаем $\xi_1=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_1$. Аналогично $\xi_2=\boldsymbol{e}_1-3\boldsymbol{e}_2$. Поскольку $|\lambda_1|<|\lambda_2|$, фазовые кривые имеют вид, изображенный на рис. 116. Рассматривая рис. 116, мы приходим к следующему удивительному выводу: если **коэффициент трения** $k$ достаточно велик ($k>2$), то маятник не совершает затухающих колебаний, а сразу идет к положению равновесия: его скорость $x_2$ меняет знак не более одного раза.

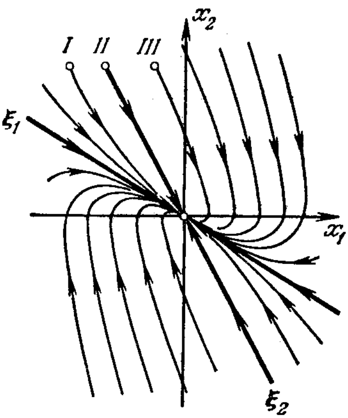

Рис. 116. Фазовые кривые уравнения маятника с сильным трением в обычном базисе.

Задача 1. Каким движениям маятника соответствуют фазовые кривые $I$, $II$, $III$ на рис. 116? Нарисовать примерный график $x(t)$.

Задача 2. Исследовать движение перевернутого маятника с трением, $\ddot{x}=x-k\dot{x}$.

**3. Дискретный случай.** Все сказанное о показательной функции $e^{At}$ непрерывного аргумента $t$ относится и к показательной функции $A^n$ дискретного аргумента $n$. В частности, если $A$ — диагональный оператор, то для вычисления $A^n$ удобно перейти к диагональному базису.

Пример. Последовательность Фибоначчи 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... определяется тем, что каждый следующий член равен сумме двух предыдущих, $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$, и двумя начальными членами, $a_0=0$, $a_1=1$.

Задача 1. Найти формулу для $a_n$. Показать, что $a_n$ растет, как геометрическая прогрессия, и найти $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a_n}{n}=\alpha$.

Указание. Заметим, что вектор $\xi_n$ $(a_n, a_{n-1})$ выражается линейно через $\xi_{n-1}$: $\xi_n=A\xi_{n-1}$, $A=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$, причем $\xi_1=(1, 0)$. Поэтому $a_n$ есть первая компонента вектора $A^{n-1}\xi_1$.

*Ответ.* $\alpha=\ln((\sqrt{5}+1)/2)$, $a_n=(\lambda_1^n-\lambda_2^n)/\sqrt{5}$, где $\lambda_{1,2}=(1\pm\sqrt{5})/2$ — собственные числа $A$.

Такое же рассуждение сводит исследование любой рекуррентной последовательности $a_n$ порядка $k$, заданной правилом

$$a_n = c_1 a_{n-1} + \ldots + c_k a_{n-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

и $k$ начальными членами *), к изучению показательной функции $A^n$, где $A$. $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$ - линейный оператор. Поэтому, когда мы научимся вычислять матрицу экспоненты, мы одновременно изучим все рекуррентные последовательности.

Возвращаясь к общей задаче о вычислении $e^{At}$, заметим, что корни характеристического уравнения $\det(A - \lambda E) = 0$ могут быть комплексными. Чтобы изучить этот случай, мы вначале рассмотрим линейное уравнение с комплексным фазовым пространством $\mathbf{C}^n$

## § 18. Комплексификация и овеществление

Прежде чем изучать комплексные дифференциальные уравнения, вспомним, что́ такое комплексификация вещественного пространства и овеществление комплексного.

**1. Овеществление.** Через $\mathbf{C}^n$ мы будем обозначать $n$-мерное линейное пространство над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$.

*Овеществлением* пространства $\mathbf{C}^n$ называется вещественное линейное пространство, которое совпадает с $\mathbf{C}^n$ как группа и в котором умножение на вещественные числа определено как в $\mathbf{C}^n$, а умножение на комплексные числа не определено. (Иными словами, овеществить $\mathbf{C}^n$ — это значит забыть о структуре $\mathbf{C}$-модуля, сохраняя структуру $\mathbf{R}$-модуля.)

Легко видеть, что овеществление пространства $\mathbf{C}^n$ будет $2n$-мерным вещественным линейным пространством $\mathbf{R}^{2n}$. Мы будем обозначать овеществление знаком $\mathbf{R}$ сверху слева, например: ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C} = \mathbf{R}^2$.

Если $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис в $\mathbf{C}^n$, то $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ — базис в ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n = \mathbf{R}^{2n}$.

Пусть $A$: $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^n$ — $\mathbf{C}$-линейный оператор. *Овеществление оператора $A$* — это $\mathbf{R}$-линейный оператор ${}^{\mathbf{R}}A$: ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^m \to {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n$, совпадающий с $A$ поточечно.

Задача 1. Пусть $(e_1, \ldots, e_m)$ — базис пространства $C^m$, $(f_1, \ldots, f_n)$ — базис пространства $\mathbf{C}^n$, $(A)$ — матрица оператора $A$. Найти матрицу овеществленного оператора ${}^{\mathbf{R}}A$.

*Ответ.* $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $(A) = (\alpha) + i(\beta)$.

Задача 2. Докажите, что ${}^{\mathbf{R}}(A+B) = {}^{\mathbf{R}}A + {}^{\mathbf{R}}B$, ${}^{\mathbf{R}}(AB) = {}^{\mathbf{R}}A\,{}^{\mathbf{R}}B$.

**2. Комплексификация.** Пусть $\mathbf{R}^n$ — вещественное линейное пространство. *Комплексификация пространства* $\mathbf{R}^n$ — это $n$-мерное комплексное линейное пространство, обозначаемое через ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$, которое строится следующим образом.

---

*) Тот факт, что для определения рекуррентной последовательности $k$-го порядка надо знать $k$ ее первых членов, тесно связан с тем, что фазовое пространство дифференциального уравнения порядка $k$ имеет размерность $k$. Эта связь становится понятной, если записать дифференциальное уравнение в виде предела разностных

Точки пространства ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ — это пары $(\xi, \eta)$, где $\xi \in \mathbf{R}^n$, $\eta \in \mathbf{R}^n$. Такая пара обозначается $\xi + i\eta$. Операции сложения и умножения на комплексные числа определяются обычным образом:

$$(u+iv)(\xi+i\eta)=(u\xi-v\eta)+i(v\xi+u\eta),$$
$$(\xi_1+i\eta_1)+(\xi_2+i\eta_2)=(\xi_1+\xi_2)+i(\eta_1+\eta_2).$$

Легко проверить, что полученный $\mathbf{C}$-модуль является $n$-мерным комплексным линейным пространством: ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n = \mathbf{C}^n$. Если $(\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — базис в $\mathbf{R}^n$, то векторы $\boldsymbol{e}_k + i0$ образуют $\mathbf{C}$-базис в $\mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$.

Векторы $\xi + i0$ обозначаются короче через $\xi$.

Пусть $A$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ есть $\mathbf{R}$-линейный оператор. *Комплексификация оператора* $A$ — это $\mathbf{C}$-линейный оператор ${}^{\mathbf{C}}A$: ${}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m \to {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$, определенный соотношением ${}^{\mathbf{C}}A(\xi+i\eta)=A\xi+iA\eta$.

Задача 1. Пусть $(e_1, \ldots, e_m)$ — базис в $\mathbf{R}^m$, $(f_1, \ldots, f_n)$ — базис в $\mathbf{R}^n$. Пусть $(A)$ — матрица оператора $A$. Найти матрицу комплексифицированного оператора $({}^{\mathbf{C}}A)$.
*Ответ.* $({}^{\mathbf{C}}A)=(A)$.

Задача 2. Докажите, что ${}^{\mathbf{C}}(A+B)={}^{\mathbf{C}}A+{}^{\mathbf{C}}B$, ${}^{\mathbf{C}}(AB)={}^{\mathbf{C}}A\,{}^{\mathbf{C}}B$.

Терминологическое замечание. Операции комплексификации и овеществления определены как для пространств, так и для отображений. Алгебраисты называют такого рода операции *функторами*.

**3. Комплексное сопряжение.** Рассмотрим вещественное $2n$-мерное линейное пространство $\mathbf{R}^{2n} = {}^{\mathbf{RC}}\mathbf{R}^n$, полученное из $\mathbf{R}^n$ комплексификацией, а затем овеществлением. В этом пространстве лежит $n$-мерное подпространство векторов вида $\xi + i0$, $\xi \in \mathbf{R}^n$. Оно называется *вещественной плоскостью* $\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$.

Подпространство векторов вида $0 + i\xi$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, называется *мнимой плоскостью* $i\mathbf{R}^n \subset \mathbf{R}^{2n}$. Все пространство $\mathbf{R}^{2n}$ есть прямая сумма этих двух $n$-мерных подпространств.

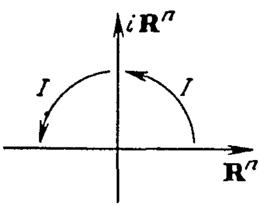


Рис 117 Оператор умножения на $i$

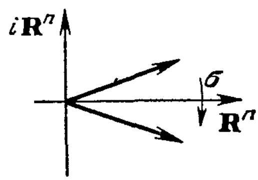


Рис. 118. Комплексное сопряжение.

Оператор $iE$ умножения на $i$ в $\mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ после овеществления превращается в $\mathbf{R}$-линейный оператор ${}^{\mathbf{R}}(iE) = I$: $\mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, (рис. 117). Оператор $I$ изоморфно отображает вещественную плоскость в мнимую, а мнимую — в вещественную. Квадрат оператора $I$ равен минус единичному.

Задача 1. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис $\mathbf{R}^n$, $(e_1, \ldots, e_n, ie_1, \ldots, ie_n)$ — базис $\mathbf{R}^{2n} = {}^{\mathbf{RC}}\mathbf{R}^n$. Найти матрицу оператора $I$ в этом базисе.

*Ответ.* $(I)=\begin{pmatrix} 0 & -E \\ E & 0 \end{pmatrix}$.

Обозначим через $\sigma\colon \mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ (рис. 118) оператор комплексного сопряжения: $\sigma(\xi+i\eta)=\xi-i\eta$. Действие $\sigma$ обозначается часто чертой сверху.

Оператор $\sigma$ совпадает с единичным на вещественной плоскости и с минус единичным — на мнимой. Он инволютивен: $\sigma^2=E$.

Пусть $A\colon {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m\to{}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ — $\mathbf{C}$-линейный оператор. *Комплексно сопряженным к $A$ оператором $\overline{A}$* называется оператор $\overline{A}\colon {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m\to{}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$, определенный соотношением

$$\overline{A}z=\overline{A\overline{z}}\quad\text{для всякого } z\in{}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m.$$

Задача 2. Докажите, что $\overline{A}$ является $\mathbf{C}$-линейным оператором.

Задача 3. Докажите, что матрица оператора $\overline{A}$ *в вещественном базисе* комплексно сопряжена матрице $A$ в том же базисе.

Задача 4. Докажите, что $\overline{A+B}=\overline{A}+\overline{B}$, $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$, $\overline{\lambda A}=\overline{\lambda}\overline{A}$.

Задача 5. Докажите, что комплексный линейный оператор $A\colon {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^m\to{}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ является комплексификацией вещественного тогда и только тогда, когда $\overline{A}=A$.

**4. Экспонента, определитель и след комплексного оператора.** Экспонента, определитель и след комплексного оператора определяются в точности так же, как в вещественном случае. Они обладают такими же свойствами, что и в вещественном случае, разница состоит лишь в том, что определитель, будучи комплексным числом, не равен объему.

Задача 1. Докажите свойства экспоненты:

$$^{\mathbf{R}}(e^A)=e^{^{\mathbf{R}}A},\qquad \overline{e^A}=e^{\overline{A}},\qquad ^{\mathbf{C}}(e^A)=e^{^{\mathbf{C}}A}.$$

Задача 2. Докажите свойства определителя:

$$\det{}^{\mathbf{R}}A=|\det A|^2,\qquad \det\overline{A}=\overline{\det A},\qquad \det{}^{\mathbf{C}}A=\det A.$$

Задача 3. Докажите свойства следа:

$$\operatorname{tr}{}^{\mathbf{R}}A=\operatorname{tr}A+\operatorname{tr}\overline{A},\qquad \operatorname{tr}\overline{A}=\overline{\operatorname{tr}A},\qquad \operatorname{tr}{}^{\mathbf{C}}A=\operatorname{tr}A.$$

Задача 4. Докажите, что и в комплексном случае

$$\det e^A=e^{\operatorname{tr}A}.$$

**5. Производная кривой с комплексными значениями.** Пусть $\varphi\colon I\to\mathbf{C}^n$ — отображение интервала $I$ вещественной оси $t$ в комплексное линейное пространство $\mathbf{C}^n$. Мы будем называть $\varphi$ *кривой.*

*Производная* кривой $\varphi$ в точке $t_0\in I$ определяется обычным образом: $\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_{t=t_0}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\varphi(t_0+h)-\varphi(t_0)}{h}$. Это вектор пространства $\mathbf{C}^n$.

Пример 1. Пусть $n=1$, $\varphi(t)=e^{it}$ (рис. 119). Тогда $\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_{t=0}=i$.

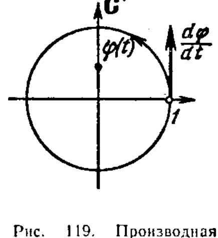

Рис. 119. Производная отображения $t\mapsto e^{it}$ в точке 0 равна $i$.

Рассмотрим случай $n=1$ подробнее. Поскольку в $\mathbf{C}$ определено умножение, кривые со значениями в $\mathbf{C}$ можно не только складывать, но и умножать:

$$(\varphi_1+\varphi_2)(t)=\varphi_1(t)+\varphi_2(t),\qquad (\varphi_1\varphi_2)(t)=\varphi_1(t)\,\varphi_2(t),\qquad t\in I.$$

Задача 1. Докажите свойства производной:

$$\frac{d}{dt}(\varphi_1+\varphi_2)=\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{d\varphi_2}{dt},\quad \frac{d}{dt}(\varphi_1\varphi_2)=\frac{d\varphi_1}{dt}\varphi_2+\varphi_1\frac{d\varphi_2}{dt}.$$

В частности, производная многочлена с комплексными коэффициентами дается той же формулой, что для случая вещественных коэффициентов.

Если $n>1$, то перемножить две кривые со значениями в $\mathbf{C}^n$ нельзя. Однако, поскольку $\mathbf{C}^n$ есть $\mathbf{C}$-модуль, можно умножить кривую $\varphi\colon I\to\mathbf{C}^n$ на функцию $f\colon I\to\mathbf{C}$:

$$(f\varphi)(t)=f(t)\,\varphi(t).$$

Задача 2. Докажите свойства производной:

$$\frac{d\,({}^{\mathbf{R}}\varphi)}{dt}={}^{\mathbf{R}}\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{d}{dt}({}^{\mathbf{C}}\varphi)={}^{\mathbf{C}}\frac{d\varphi}{dt},\quad \frac{d\overline{\varphi}}{dt}=\overline{\frac{d\varphi}{dt}},$$

$$\frac{d\,(\varphi_1+\varphi_2)}{dt}=\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{d\varphi_2}{dt},\qquad \frac{d\,(f\varphi)}{dt}=\frac{df}{dt}\varphi+f\frac{d\varphi}{dt}.$$

Разумеется, здесь предполагается, что производные существуют.

Теорема. *Пусть $A\colon\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ — $\mathbf{C}$-линейный оператор. Тогда существует при любом $t\in\mathbf{R}$ $\mathbf{C}$-линейный оператор из $\mathbf{C}^n$ в $\mathbf{C}^n$*

$$\frac{d}{dt}e^{tA}=Ae^{tA}.$$

Доказательство. Это можно доказать в точности так же, как в вещественном случае, но можно и сослаться на него. Ибо овеществив $\mathbf{C}^n$, получим

$${}^{\mathbf{R}}\!\left(\frac{d}{dt}e^{tA}\right)=\frac{d}{dt}\,{}^{\mathbf{R}}(e^{tA})=\frac{d}{dt}e^{t({}^{\mathbf{R}}A)}=({}^{\mathbf{R}}A)\,e^{t({}^{\mathbf{R}}A)}={}^{\mathbf{R}}(Ae^{tA}).$$

## § 19. Линейное уравнение с комплексным фазовым пространством

Комплексный случай, как это часто бывает, проще вещественного. Он важен сам по себе; кроме того, изучение комплексного случая поможет нам исследовать вещественный.

**1. Определения.** Пусть $A\colon\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ — $\mathbf{C}$-линейный оператор. *Линейным уравнением* *) с фазовым пространством $\mathbf{C}^n$ мы будем называть уравнение

$$\dot{z}=Az,\qquad z\in\mathbf{C}^n. \tag{1}$$

*Решением* $\varphi$ уравнения (1) с начальным условием $\varphi(t_0)=z_0$, $t_0\in\mathbf{R}$, $z_0\in\mathbf{C}^n$, называется отображение $\varphi\colon I\to\mathbf{C}^n$ интервала $I$ вещественной оси $t$ в $\mathbf{C}^n$, если

1) для всякого $\tau\in I$ $\left.\dfrac{d\varphi}{dt}\right|_{t=\tau}=A\,\varphi(\tau)$;

2) $t_0\in I$ и $\varphi(t_0)=z_0$.

*) Полный титул: система $n$ линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными постоянными коэффициентами.

Иными словами, отображение $\varphi\colon I \to \mathbf{C}^n$ называется решением уравнения (1), если после овеществления пространства $\mathbf{C}^n$ и оператора $A$ отображение $\varphi$ будет решением уравнения с $2n$-мерным вещественным фазовым пространством $\dot{z} = {}^{\mathbf{R}}Az$, $z \in \mathbf{R}^{2n} = {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n$.

**2. Основная теорема.** Следующие теоремы доказываются точно так же, как в вещественном случае (см. § 15, 2, 3):

Теорема. *Решение $\varphi$ уравнения* (1) *с начальным условием* $\varphi(0) = z_0$ *дается формулой* $\varphi(t) = e^{At}z_0$.

Теорема. *Всякая однопараметрическая группа* $\{g^t\ (t \in \mathbf{R})\}$ $\mathbf{C}$-*линейных преобразований пространства* $\mathbf{C}^n$ *имеет вид* $g^t = e^{At}$, *где* $A\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ — *некоторый* $\mathbf{C}$-*линейный оператор.*

Наша цель теперь — исследовать и явно вычислить $e^{At}$.

**3. Диагональный случай.** Пусть $A\colon \mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ есть $\mathbf{C}$-линейный оператор. Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det |A - \lambda E| = 0. \tag{2}$$

Теорема. *Если $n$ корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения попарно различны, то $\mathbf{C}^n$ разлагается в прямую сумму инвариантных относительно $A$ и $e^{At}$ одномерных подпространств $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \mathbf{C}_n^1$, причем в каждом одномерном инвариантном подпространстве, скажем в $\mathbf{C}_k^1$, $e^{At}$ сводится к умножению на комплексное число $e^{\lambda_k t}$.*

Действительно, оператор $A$ имеет *) $n$ линейно независимых собственных прямых: $\mathbf{C}^n = \mathbf{C}_1^1 \dotplus \ldots \dotplus \mathbf{C}_n^1$. На прямой $\mathbf{C}_k^1$ оператор $A$ действует как умножение на $\lambda_k$, поэтому оператор $e^{At}$ действует как умножение на $e^{\lambda_k t}$.

Рассмотрим теперь подробнее одномерный случай, $n = 1$.

**4. Пример: линейное уравнение, фазовое пространство которого — комплексная прямая.** Такое уравнение имеет вид

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z, \qquad z \in \mathbf{C}, \qquad \lambda \in \mathbf{C}, \quad t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Мы уже знаем его решения: $\varphi(t) = e^{\lambda t}z_0$. Исследуем комплексную функцию $e^{\lambda t}$ вещественного переменного $t$:

$$e^{\lambda t}\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}.$$

Если $\lambda$ вещественно, то функция $e^{\lambda t}$ вещественна (рис. 120).

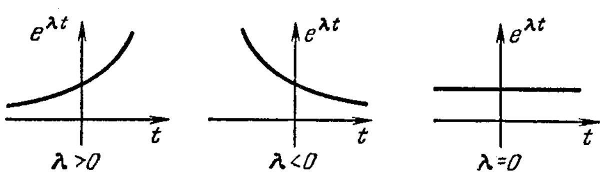


Рис. 120. Графики функций $e^{\lambda t}$ при вещественных $\lambda$.

*) Это — единственное место, где комплексный случай отличается от вещественного. Причина большей сложности вещественного случая — алгебраическая незамкнутость поля $\mathbf{R}$.

В этом случае фазовый поток уравнения (3) состоит из растяжений в $e^{\lambda t}$ раз. Если $\lambda$ чисто мнимо, $\lambda = i\omega$, то по формуле Эйлера

$$e^{\lambda t} = e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

В этом случае фазовый поток уравнения (3) — это семейство $\{g^t\}$ поворотов на угол $\omega t$ (рис. 121). Наконец, в общем случае $\lambda = \alpha + i\omega$

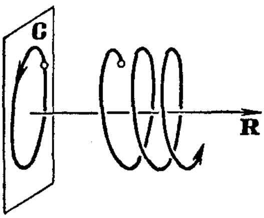


Рис. 121. Фазовая и интегральная кривые уравнения $\dot{z} = \lambda z$ при чисто мнимом $\lambda$.

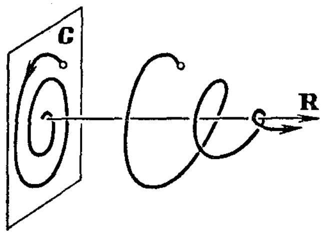


Рис. 122. Фазовая и интегральная кривые уравнения $\dot{z} = \lambda z$ при $\lambda = \alpha + i\omega$, $\alpha < 0$, $\omega > 0$.

и умножение на $e^{\lambda t}$ есть произведение умножения на $e^{\alpha t}$ и умножения на $e^{i\omega t}$ (см. § 15,5):

$$e^{\lambda t} = e^{(\alpha + i\omega) t} = e^{\alpha t} \cdot e^{i\omega t}. \tag{4}$$

Таким образом, преобразование $g^t$ фазового потока уравнения (3) — это растяжение в $e^{\alpha t}$ раз с одновременным поворотом на угол $\omega t$.

Рассмотрим теперь фазовые кривые. Пусть, например, $\alpha < 0$, $\omega > 0$ (рис. 122). В таком случае при росте $t$ фазовая точка $e^{\lambda t} z_0$ будет приближаться к началу координат, обходя вокруг него в направлении «против часовой стрелки» (т. е. от 1 к $i$).

В полярных координатах, при соответствующем выборе начала отсчета углов, фазовая кривая задается уравнением

$$r = e^{k\varphi} \left( k = \frac{\alpha}{\omega} \right), \quad \text{или} \quad \varphi = k^{-1} \ln r.$$

Такая кривая называется *логарифмической спиралью.*

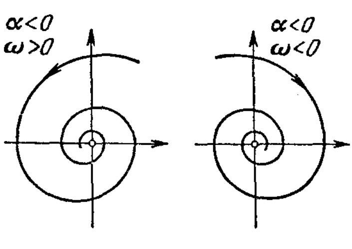


Рис. 123. Устойчивые фокусы.

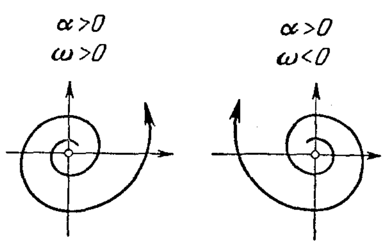


Рис. 124. Неустойчивые фокусы.

При других комбинациях знаков $\alpha$ и $\omega$ фазовые кривые также будут логарифмическими спиралями (рис. 123, 124).

Во всех случаях (кроме $\lambda=0$) точка $z=0$ является единственной неподвижной точкой фазового потока (и единственной особой точкой соответствующего уравнению (3) векторного поля).

Эта особая точка называется *фокусом* (мы предполагаем, что $\alpha\neq 0$, $\omega\neq 0$). Если $\alpha<0$, то $\varphi(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ и фокус называется *устойчивым*, а если $\alpha>0$, то *неустойчивым*.

При $\alpha=0$, $\omega\neq 0$ фазовые кривые — окружности, а особая точка — их центр (рис. 125).

Выберем в $\mathbf{C}^1$ координату: $z=x+iy$. Исследуем изменение вещественной и мнимой частей $x(t)$, $y(t)$ при движении фазовой точки. Из (4) находим

$$x(t)=re^{\alpha t}\cos(\varphi+\omega t), \qquad y(t)=re^{\alpha t}\sin(\varphi+\omega t),$$

где постоянные $r$ и $\varphi$ определяются начальным условием (рис. 126).

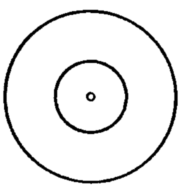

Рис. 125. Центр.

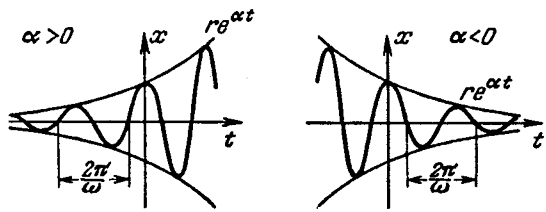


Рис. 126. Вещественная часть $e^{\lambda t}$ как функция времени.

Таким образом, при $\alpha>0$ координаты $x(t)$ и $y(t)$ испытывают «гармонические колебания с частотой $\omega$ и с экспоненциально нарастающей амплитудой $re^{\alpha t}$», а при $\alpha<0$ — затухающие колебания.

Изменение $x$ или $y$ со временем можно записать также в виде $Ae^{\alpha t}\cos\omega t+Be^{\alpha t}\sin\omega t$, где постоянные $A$ и $B$ определяются начальными условиями.

З а м е ч а н и е 1. Исследовав таким образом уравнение (3), мы одновременно исследовали все однопараметрические группы $\mathbf{C}$-линейных преобразований комплексной прямой.

З а м е ч а н и е 2. В то же время мы изучили систему линейных уравнений на вещественной плоскости

$$\dot{x}=\alpha x-\omega y, \qquad \dot{y}=\omega x+\alpha y,$$

в которую переходит уравнение (3) после овеществления.

Из теорем пп. 2, 3 и вычислений п. 4 непосредственно вытекает явная формула для решений уравнения (1).

**5. Следствие.** *Пусть $n$ корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ характеристического уравнения* (2) *попарно различны. Тогда всякое решение $\varphi$ уравнения* (1) *имеет вид*

$$\varphi(t)=\sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t}\xi_k, \tag{5}$$

*где $\xi_k$ — не зависящие от начальных условий постоянные вектора, $c_k$ — зависящие от начальных условий комплексные постоянные. При любом выборе этих постоянных формула* (5) *дает решение уравнения* (1).

**Если $z_1, \ldots, z_n$ — линейная система координат в $\mathbf{C}^n$, то вещественная (или мнимая) часть каждой координаты $z_l = x_l + iy_l$ будет меняться** со временем, как линейная комбинация функций $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$, $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$:

$$x_l = \sum_{k=1}^{n} r_{k,l} e^{\alpha_k t}\cos(\varphi_{k,l} + \omega_k t) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,l} e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t + B_{k,l} e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t, \qquad (6)$$

где $\lambda_k = \alpha_k + i\omega_k$, а $r$, $\varphi$, $A$, $B$ — вещественные постоянные, зависящие от начальных условий.

Для доказательства достаточно разложить начальное условие по собственному базису: $\varphi(0) = c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n$.

## § 20. Комплексификация вещественного линейного уравнения

Воспользуемся результатами исследования комплексного уравнения для изучения вещественного случая.

**1. Комплексифицированное уравнение.** Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор, задающий линейное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \qquad (1)$$

Комплексификация уравнения (1) — это уравнение с комплексным фазовым пространством

$$\dot{z} = {}^{\mathbf{C}}Az, \quad z \in \mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n. \qquad (2)$$

Лемма 1. *Решения уравнения* (2) *с комплексно сопряженными начальными условиями комплексно сопряжены.*

Доказательство. Пусть $\varphi$ — решение с начальным условием $\varphi(t_0) = z_0$ (рис. 127). Тогда $\overline{\varphi}(t_0) = \overline{z}_0$. Покажем, что $\overline{\varphi}$ — решение. Тогда лемма будет доказана (ввиду единственности).

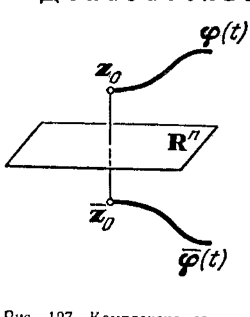


Рис. 127. Комплексно сопряженные решения.

При любом значении $t$ имеем

$$\frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \overline{\frac{d\varphi}{dt}} = \overline{{}^{\mathbf{C}}A\varphi} = \overline{{}^{\mathbf{C}}A}\,\overline{\varphi} = {}^{\mathbf{C}}A\overline{\varphi},$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Вместо уравнения (2) мы могли бы взять более общее уравнение

$$\dot{z} = \boldsymbol{F}(z, t), \quad z \in {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n,$$

правая часть которого принимает комплексно сопряженные значения в комплексно сопряженных точках: $\boldsymbol{F}(\overline{z}, t) = \overline{\boldsymbol{F}(z, t)}$

Например, этому условию удовлетворяет любой многочлен от координат $z_k$ вектора $z$ в вещественном базисе, коэффициенты которого — вещественные функции от $t$.

Следствие. *Решение уравнения* (2) *с вещественным начальным условием вещественно и удовлетворяет уравнению* (1).

Ибо если бы $\overline{\varphi}\neq\varphi$ (рис. 128), то нарушалась бы теорема единственности.

В следующей лемме линейность уравнения существенна.

Лемма 2. *Функция* $z=\varphi(t)$ *тогда и только тогда является решением комплексифицированного уравнения* (2), *когда ее вещественная и мнимая части удовлетворяют исходному уравнению* (1).

Действительно, ${}^{\mathbf{C}}A(x+iy)=Ax+iAy$, поэтому овеществление уравнения (2) распадается в прямое произведение:

$$\begin{cases} \dot{x}=Ax, & x\in\mathbf{R}^n, \\ \dot{y}=Ay, & y\in\mathbf{R}^n. \end{cases}$$

Из лемм 1 и 2 видно, как, зная комплексные решения уравнения (2), можно находить вещественные решения уравнения (1), и обратно. В частности, *формулы* (6) п. 5 § 19 *дают явный вид решения в случае некратных корней характеристического уравнения.*

**2. Инвариантные подпространства вещественного оператора.** Пусть $A$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — вещественный линейный оператор. Пусть $\lambda$ — один из корней характеристического уравнения $\det|A-\lambda E|=0$, вообще говоря, комплексный. Очевидна

Лемма 3. *Если* $\xi\in\mathbf{C}^n={}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ — *собственный вектор оператора* ${}^{\mathbf{C}}A$ *с собственным значением* $\lambda$, *то* $\overline{\xi}$ — *собственный вектор с собственным значением* $\overline{\lambda}$. *Кратности собственных чисел* $\lambda$ *и* $\overline{\lambda}$ *совпадают.*

Действительно, поскольку $\overline{{}^{\mathbf{C}}A}={}^{\mathbf{C}}A$, уравнение ${}^{\mathbf{C}}A\xi=\lambda\xi$ эквивалентно ${}^{\mathbf{C}}A\overline{\xi}=\overline{\lambda}\overline{\xi}$ и характеристическое уравнение имеет вещественные коэффициенты.

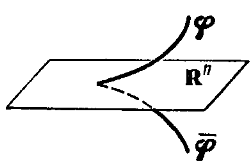


Рис. 128. Решение с вещественным начальным условием не может принимать комплексных значений.

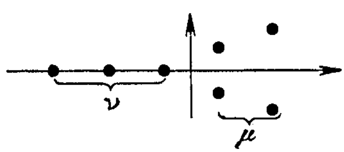


Рис. 129. Собственные числа вещественного оператора.

*Предположим теперь, что собственные числа* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n\in\mathbf{C}$ *оператора* $A$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ *попарно различны* (рис. 129). Среди них имеется некоторое число $\nu$ вещественных собственных чисел и некоторое число $\mu$ комплексно сопряженных пар (причем $\nu+2\mu=n$, так что четность числа вещественных собственных чисел равна четности $n$). Легко доказывается

Теорема. *Пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в прямую сумму $\nu$ инвариантных относительно $A$ одномерных и $\mu$ инвариантных относительно $A$ двумерных подпространств.*

Действительно, вещественному собственному числу отвечает вещественный собственный вектор и, значит, одномерное инвариантное подпространство в $\mathbf{R}^n$.

Пусть $\lambda$, $\bar{\lambda}$ — одна из пар комплексно сопряженных собственных чисел. Собственному числу $\lambda$ отвечает собственный вектор $\xi \in \mathbf{C}^n = {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ комплексифицированного оператора ${}^{\mathbf{C}}A$.

Сопряженный вектор $\bar{\xi}$ по лемме 3 также является собственным, с собственным значением $\bar{\lambda}$.

Комплексная плоскость $\mathbf{C}^2$, натянутая на собственные векторы $\xi$, $\bar{\xi}$ инвариантна относительно оператора ${}^{\mathbf{C}}A$. Вещественное подпространство $\mathbf{R}^n \subset {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^n$ также инвариантно. Поэтому их пересечение также инвариантно относительно ${}^{\mathbf{C}}A$. Покажем, что это пересечение является двумерной вещественной плоскостью $\mathbf{R}^2$ (рис. 130).

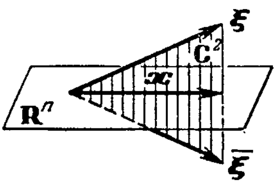


Рис. 130. Вещественная часть комплексного собственного вектора принадлежит инвариантной вещественной плоскости.

Действительно, рассмотрим вещественную и мнимую части собственного вектора $\xi$:

$$x = \frac{1}{2}(\xi + \bar{\xi}) \in \mathbf{R}^n, \qquad y = \frac{1}{2i}(\xi - \bar{\xi}) \in \mathbf{R}^n.$$

Будучи $\mathbf{C}$-линейными комбинациями векторов $\xi$ и $\bar{\xi}$, векторы $x$ и $y$ принадлежат пересечению $\mathbf{C}^2 \cap \mathbf{R}^n$. Векторы $x$ и $y$ $\mathbf{C}$-линейно независимы, так как через них линейно выражаются $\mathbf{C}$-независимые векторы $\xi$, $\bar{\xi}$:

$$\xi = x + iy, \qquad \bar{\xi} = x - iy.$$

Итак, каждый вектор плоскости $\mathbf{C}^2$ однозначно записывается в виде комплексной линейной комбинации вещественных векторов $x$ и $y$:

$$\eta = ax + by, \qquad a \in \mathbf{C}, \qquad b \in \mathbf{C}.$$

Такой вектор веществен ($\eta = \bar{\eta}$), если и только если $\bar{a}x + \bar{b}y = ax + by$, т. е. $a$ и $b$ вещественны. Итак, *пересечение $\mathbf{C}^2 \cap \mathbf{R}^n$ — это двумерная вещественная плоскость $\mathbf{R}^2$, натянутая на векторы $x$ и $y$ вещественной и мнимой частей собственного вектора $\xi$.*

Собственные числа сужения оператора $A$ на плоскость $\mathbf{R}^2$ — это $\lambda$ и $\bar{\lambda}$.

Действительно, комплексификация не меняет собственных чисел. После комплексификации сужения $A$ на $\mathbf{R}^2$ получится сужение ${}^{\mathbf{C}}A$ на $\mathbf{C}^2$. Но плоскость $\mathbf{C}^2$ натянута на собственные векторы оператора ${}^{\mathbf{C}}A$ с собственными числами $\lambda$, $\bar{\lambda}$. Итак, собственные числа $A|\mathbf{R}^2$ суть $\lambda$ и $\bar{\lambda}$.

Остается показать, что построенные одномерные и двумерные инвариантные подпространства пространства $\mathbf{R}^n$ $\mathbf{R}$-линейно независимы. Это сразу следует из того, что $n$ собственных векторов оператора ${}^{\mathbf{C}}A$

$\mathbf{C}$-линейно независимы и линейно выражаются через наши векторы $\xi_k$ $(k=1, \ldots, \nu)$ и $x_k$, $y_k$ $(k=1, \ldots, \mu)$.

Теорема доказана.

Таким образом, *в случае, когда все собственные числа оператора* $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *простые, линейное дифференциальное уравнение* $\dot{x}=Ax$, $x \in \mathbf{R}^n$, *распадается в прямое произведение уравнений с одномерными и двумерными фазовыми пространствами.*

Заметим, что многочлен общего вида кратных корней не имеет. Итак, для исследования линейных дифференциальных уравнений необходимо прежде всего рассмотреть линейные уравнения на прямой (что мы уже и сделали) и на плоскости.

**3. Линейное уравнение на плоскости.**

Теорема. *Пусть* $A$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ — *линейный оператор с невещественными собственными числами* $\lambda$, $\bar{\lambda}$.

*Тогда $A$ представляет собой овеществление оператора* $\Lambda$: $\mathbf{C}^1 \to \mathbf{C}^1$ *умножения на комплексное число* $\lambda$.

Точнее, плоскость $\mathbf{R}^2$ можно снабдить структурой комплексной прямой $\mathbf{C}^1$, так что $\mathbf{R}^2={}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^1$ и $A={}^{\mathbf{R}}\Lambda$.

Доказательство — несколько таинственная выкладка *). Пусть $x+iy \in {}^{\mathbf{C}}\mathbf{R}^2$ — комплексный собственный вектор оператора ${}^{\mathbf{C}}A$ с собственным значением $\lambda=\alpha+i\omega$. Векторы $x$ и $y$ образуют базис в $\mathbf{R}^2$. Имеем, с одной стороны,

$$^{\mathbf{C}}A\,(x+iy)=(\alpha+i\omega)(x+iy)=\alpha x-\omega y+i\,(\omega x+\alpha y)$$

и, с другой, ${}^{\mathbf{C}}A\,(x+iy)=Ax+iAy$, откуда $Ax=\alpha x-\omega y$, $Ay=\omega x+\alpha y$, т. е. оператор $A$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ в базисе $x$, $y$ имеет ту же матрицу

$$\begin{pmatrix} \alpha & \omega \\ -\omega & \alpha \end{pmatrix},$$

что оператор ${}^{\mathbf{R}}\Lambda$ умножения на $\lambda=\alpha+i\omega$ в базисе $1$, $-i$. Итак, искомая комплексная структура на $\mathbf{R}^2$ получится, если принять $x$ за $1$ и $y$ за $-i$.

Следствие. *Пусть* $A$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ — *линейное преобразование евклидовой плоскости с невещественными собственными числами* $\lambda$, $\bar{\lambda}$. *Тогда преобразование $A$ аффинно эквивалентно растяжению в* $|\lambda|$ *раз с поворотом на угол* $\arg\lambda$.

Следствие 2. *Фазовый поток линейного уравнения* (1) *на евклидовой плоскости* $\mathbf{R}^2$ *с невещественными собственными числами* $\lambda$, $\bar{\lambda}=\alpha \pm i\omega$ *аффинно эквивалентен семейству растяжений в* $e^{\alpha t}$ *раз с одновременным вращением на угол* $\omega t$.

В частности, особая точка 0 является фокусом, а фазовые кривые — аффинными образами логарифмических спиралей, приближаю-

*) Выкладку можно заменить следующим рассуждением. Пусть $\lambda=\alpha+i\omega$. Определим оператор $I$: $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ условием $A=\alpha E+\omega I$. Такой оператор $I$ существует, так как $\omega \neq 0$ по условию. Тогда $I^2=-E$, так как оператор $A$ удовлетворяет своему характеристическому уравнению. Принимая $I$ за умножение на $i$, получаем в $\mathbf{R}^2$ нужную комплексную структуру.

щихся к началу координат при $t \to +\infty$ в случае, когда вещественная часть $\alpha$ собственных чисел $\lambda$, $\bar{\lambda}$ отрицательна, и удаляющихся в случае, когда $\alpha > 0$ (рис. 131).

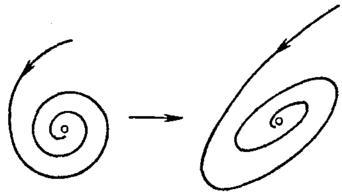

Рис. 131. Аффинный образ логарифмической спирали.

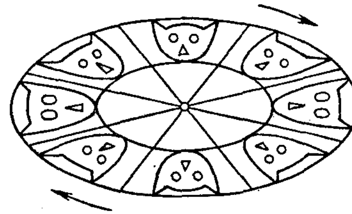

Рис. 132. Эллиптический поворот.

В случае $\alpha = 0$ (рис. 132) фазовые кривые — семейство концентрических эллипсов, а особая точка — их *центр*. В этом случае преобразования фазового потока называются *эллиптическими поворотами*.

**4. Классификация особых точек на плоскости.** Пусть теперь

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^2, \quad A\colon \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2,$$

— произвольное линейное уравнение на плоскости. Пусть корни $\lambda_1$, $\lambda_2$ характеристического уравнения различны. Если они вещественны и

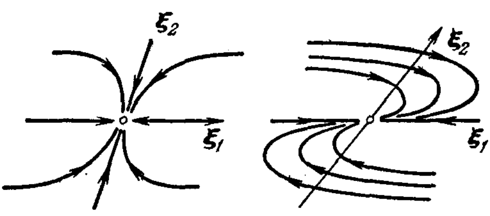


Рис. 133. Устойчивые узлы.

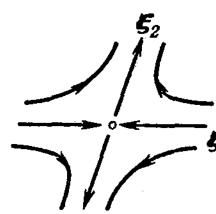


Рис. 134. Седло.

$\lambda_1 < \lambda_2$, то уравнение распадается на два одномерных и мы получаем один из случаев, уже изученных в гл. 1 (рис. 133, 134, 135).

Здесь пропущены пограничные случаи, когда $\lambda_1$ или $\lambda_2$ равно 0. Они представляют гораздо меньший интерес, так как встречаются редко и не сохраняются при сколь угодно малом возмущении. Исследование их никаких трудностей не представляет.

Если же корни комплексны, $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$, то в зависимости от знака $\alpha$ может получится один из случаев, представленных на рис. 136, 137, 138.

Случай центра является исключительным, но он встречается, например, в консервативных системах (см. § 12). Случаи кратных корней также являются исключительными. Читателю предоставляется проверить, что жордановой клетке соответствует случай, изображенный на рис. 133 ($\lambda_1 = \lambda_2 < 0$; так называемый вырожденный узел).

**5. Пример: маятник с трением.** Применим все сказанное к уравнению малых колебаний маятника с трением $\ddot{x} = -x - k\dot{x}$ ($k$ — коэффициент трения). Составим эквивалентную систему:

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = -x_1 - kx_2.$$

Исследуем характеристическое уравнение. Матрица системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -k \end{pmatrix}$$

имеет определитель 1 и след $-k$. Корни характеристического урав-

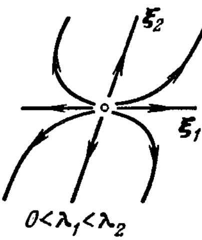


Рис. 135. Неустойчивый узел.

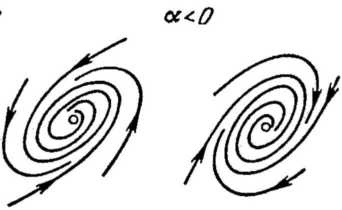


Рис. 136. Устойчивые фокусы.

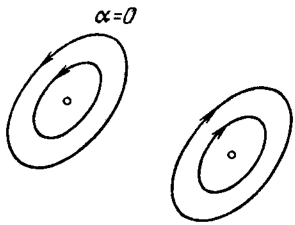


Рис. 137. Центры.

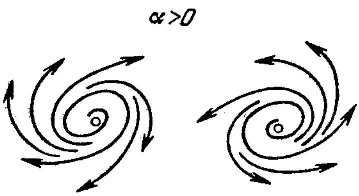


Рис. 138. Неустойчивые фокусы.

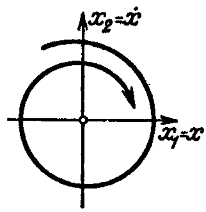


Рис. 139. Фазовая плоскость маятника с малым трением.

нения $\lambda^2 + k\lambda + 1 = 0$ комплексны при $|k| < 2$, т. е. при не слишком большом трении *).

Вещественная часть каждого из комплексных корней $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\omega$ равна $-k/2$. Иными словами, *при положительном не слишком большом коэффициенте трения* $(0 < k < 2)$ *нижнее положение равновесия маятника* $(x_1 = x_2 = 0)$ *будет устойчивым фокусом.*

При $k \to 0$ фокус превращается в центр; чем меньше коэффициент трения, тем медленнее фазовая точка приближается к положению равновесия при $t \to +\infty$ (рис. 139). Явные формулы для изменения $x_1 = x$ со временем получаются из следствия 2 п. 3 и формул п. 4 § 19:

$$x(t) = re^{\alpha t}\cos(\varphi - \omega t) = Ae^{\alpha t}\cos\omega t + Be^{\alpha t}\sin\omega t,$$

где коэффициенты $r$ и $\varphi$ (или $A$ и $B$) определяются из начальных условий.

*) Случай вещественных корней рассмотрен в § 17, п. 2.

Итак, колебания маятника будут затухающими, с переменной амплитудой $re^{\alpha t}$ и с периодом $2\pi/\omega$. Чем больше коэффициент трения, тем быстрее уменьшается амплитуда *). Частота $\omega = \sqrt{1-k^2/4}$ уменьшается с увеличением коэффициента трения $k$. При $k \to 2$ частота стремится к 0, а период — к $\infty$ (рис. 140). При малых $k$ $\omega \approx 1 - \frac{k^2}{8}$ $(k \to 0)$, так что трение увеличивает период очень незначительно, и его влиянием на частоту во многих расчетах можно пренебрегать.

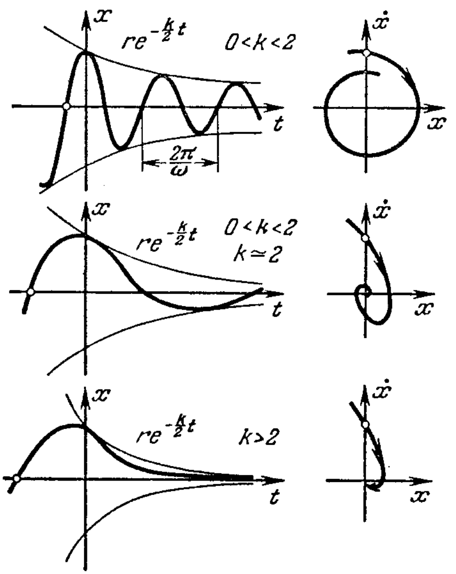


Рис. 140. Переход от затухающих колебаний к неколебательному движению маятника: фазовые кривые и графики решений при трех значениях коэффициента трения.

Задача 1. Нарисовать фазовые кривые нелинеаризованного маятника с трением, $\ddot{x} = -\sin x - k\dot{x}$ (рис. 141).

Указание. Сосчитайте производную полной энергии вдоль фазовой кривой.

**6. Общее решение линейного уравнения в случае простых корней характеристического уравнения.** Мы уже знаем, что всякое решение $\varphi$ комплексифицированного уравнения является линейной комбинацией экспонент (см. § 19, 5):

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k,$$

где $\xi_k$ — какой-нибудь собственный вектор с собственным значением $\lambda_k$. *Выберем собственные векторы с вещественными собственными значениями вещественными, а с комплексно сопряженными — комплексно сопряженными.*

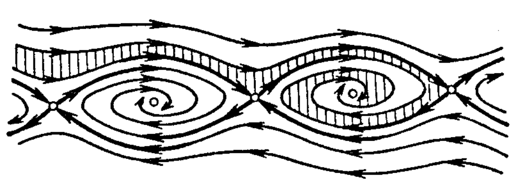

Рис. 141. После нескольких оборотов маятник начинает качаться возле нижнего положения равновесия.

*) И все же при любом значении $k<2$ маятник делает бесконечное количество размахов. Если же $k>2$, маятник меняет направление движения не более одного раза.

Мы уже знаем, что решения вещественного уравнения — это решения его комплексификации с вещественными начальными условиями. Чтобы вектор $\varphi(0)$ был вещественным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \xi_k = \sum_{k=1}^{n} \overline{c}_k \overline{\xi}_k.$$

Для этого *коэффициенты при комплексно сопряженных векторах должны быть комплексно сопряженными, а при вещественных — вещественными.*

Заметим, что $n$ комплексных постоянных $c_k$ (при фиксированном выборе собственных векторов) определяются решением комплексного уравнения однозначно. Итак, доказана

Теорема. *Каждое решение вещественного уравнения единственным образом (при фиксированном выборе собственных векторов) записывается в виде*

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k e^{\lambda_k t} \xi_k + \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k + \overline{c}_k e^{\overline{\lambda}_k t} \overline{\xi}_k, \tag{1}$$

*где $a_k$ — вещественные, а $c_k$ — комплексные постоянные.*

Формула (1) называется *общим решением* уравнения. Ее можно переписать в виде

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{\nu} a_k e^{\lambda_k t} \xi_k + 2\,\mathrm{Re} \sum_{k=\nu+1}^{\nu+\mu} c_k e^{\lambda_k t} \xi_k.$$

Заметим, что общее решение зависит от $\nu + 2\mu = n$ вещественных постоянных $a_k$, $\mathrm{Re}\, c_k$, $\mathrm{Im}\, c_k$. Эти постоянные однозначно определяются начальными условиями.

Следствие 1. *Пусть $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ — решение системы $n$ линейных вещественных дифференциальных уравнений первого порядка с матрицей $A$. Пусть все корни характеристического уравнения матрицы $A$ простые. Тогда каждая из функций $\varphi_m$ является линейной комбинацией функций $e^{\lambda_k t}$ и $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$, $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$, где $\lambda_k$ — вещественные, а $\alpha_k \pm i\omega_k$ — комплексные корни характеристического уравнения.*

Доказательство. Разложим общее решение (1) по координатному базису: $\varphi = \varphi_1 e_1 + \ldots + \varphi_n e_n$. Учитывая, что $e^{(\alpha_k \pm i\omega_k)t} = e^{\alpha_k t}(\cos\omega_k t \pm \pm i \sin\omega_k t)$, получим требуемое.

При практическом решении линейных систем можно, найдя собственные числа, искать решения в виде линейной комбинации функций $e^{\lambda_k t}$, $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$ и $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$ методом неопределенных коэффициентов.

Следствие 2. *Пусть $A$ — вещественная квадратная матрица, собственные числа которой просты. Тогда каждый из элементов матрицы $e^{At}$ есть линейная комбинация функций $e^{\lambda_k t}$, $e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t$, $e^{\alpha_k t}\sin\omega_k t$, где $\lambda_k$ — вещественные, а $\alpha_k \pm i\omega_k$ — комплексные корни характеристического уравнения.*

Доказательство. Каждый столбец матрицы $e^{At}$ составлен из координат образа базисного вектора под действием фазового потока системы дифференциальных уравнений с матрицей $A$.

Замечание. Все сказанное выше непосредственно переносится на уравнения и системы уравнений порядка выше 1, так как они сводятся к системам первого порядка (см. § 8).

Задача 1. Найти все вещественные решения уравнений $x^{IV}+4x=0$, $x^{IV}=x$, $\dddot{x}+x=0$.

## § 21. Классификация особых точек линейных систем

Выше мы видели, что в общем случае (когда у характеристического уравнения нет кратных корней) вещественная линейная система распадается в прямое произведение одномерных и двумерных. Поскольку одномерные и двумерные системы мы уже изучили, мы можем теперь исследовать многомерные системы.

**1. Пример: особые точки в трехмерном пространстве.** Характеристическое уравнение — вещественное кубическое. Вещественное кубическое уравнение может иметь три вещественных корня либо один вещественный и два комплексных. В зависимости от расположения этих корней $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$ на плоскости комплексного переменного $\lambda$ возможно много разных случаев.

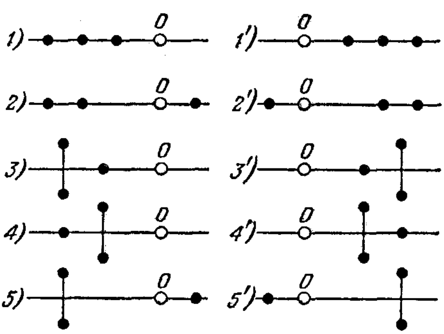


Рис. 142. Собственные числа вещественного оператора $A$: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Грубые случаи.

Обратим внимание на порядок и знаки вещественных частей. Возможны 10 «грубых» случаев (рис. 142) и ряд «вырожденных» случаев (см., например, рис. 143), когда вещественная часть одного из корней равна нулю или вещественной части не сопряженного с ним корня (мы не рассматриваем сейчас случаи кратных корней). Исследование поведения фазовых кривых в каждом из этих случаев не представляет труда.

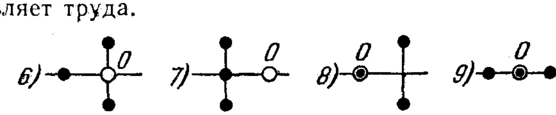


Рис. 143. Некоторые вырожденные случаи.

Учитывая, что $e^{\lambda t}$ $(\operatorname{Re}\lambda<0)$ при $t\to+\infty$ стремится к 0, и тем быстрее, чем меньше $\operatorname{Re}\lambda$, мы получаем изображенные на рис. 144—148 фазовые кривые:

$$\varphi(t)=\operatorname{Re}(c_1e^{\lambda_1 t}\xi_1+c_2e^{\lambda_2 t}\xi_2+c_3e^{\lambda_3 t}\xi_3).$$

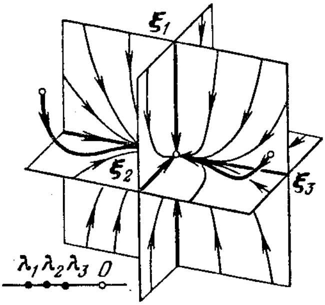


Рис. 144. Фазовое пространство линейного уравнения в случае $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < 0$. Фазовый поток — сжатие по трем направлениям.

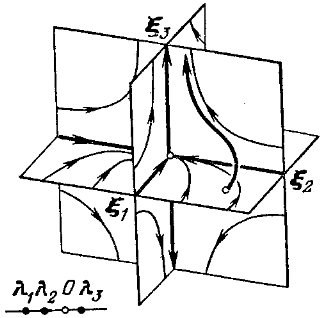


Рис. 145. Случай $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_3$. Сжатие по двум направлениям, растяжение — по третьему.

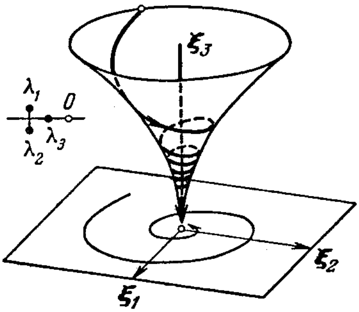


Рис. 146. Случай $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < \lambda_3 < 0$. Сжатие по направлению $\xi_3$, вращение с более быстрым сжатием в плоскости $(\xi_1, \xi_2)$.

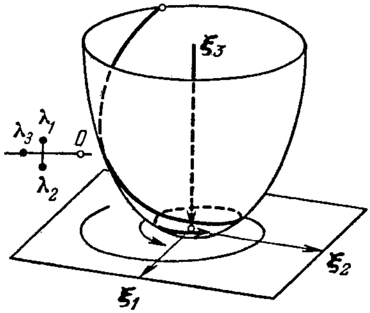


Рис. 147. Случай $\lambda_3 < \mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0$. Сжатие по направлению $\xi_3$, вращение с более медленным сжатием в плоскости $(\xi_1, \xi_2)$.

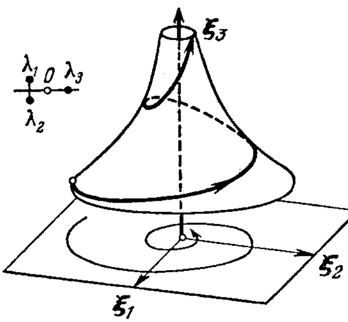


Рис. 148. Случай $\mathrm{Re}\,\lambda_{1,2} < 0 < \lambda_3$. Растяжение по направлению $\xi_3$, вращение со сжатием в плоскости $(\xi_1, \xi_2)$

Случаи 1′)—5′) получаются из случаев 1)—5) изменением направления оси $t$, так что на рис. 144—148 надо лишь заменить все стрелки противоположными.

Задача 1. Нарисовать фазовые кривые в случаях 6), 7), 8), 9) рис. 143.

**2. Линейная, дифференцируемая и топологическая эквивалентность.** Всякая классификация основывается на каком-нибудь отношении эквивалентности. Существуют по крайней мере три разумных отношения эквивалентности для линейных систем; они соответствуют алгебраическому, дифференцируемому и топологическому подходам.

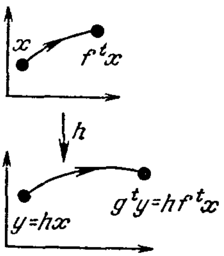


Рис. 149. Эквивалентные потоки.

Пусть $\{f^t\}$, $\{g^t\}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — фазовые потоки.

Определение. Потоки $\{f^t\}$ и $\{g^t\}$ *эквивалентны* *), если существует взаимно однозначное отображение $h$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, переводящее поток $\{f^t\}$ в поток $\{g^t\}$, так что $h \circ f^t = g^t \circ h$ для любого $t \in \mathbf{R}$ (рис. 149). Мы можем сказать, что поток $\{f^t\}$ превращается в $\{g^t\}$ при замене координат $h$.

При этом потоки называются:

1) *линейно эквивалентными*, если существует такое отображение $h$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, являющееся *линейным изоморфизмом*, $h \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$;

2) *дифференцируемо эквивалентными*, если существует такое отображение $h$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, являющееся *диффеоморфизмом*;

3) *топологически эквивалентными*, если существует такое отображение $h$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, являющееся *гомеоморфизмом*, т. е. взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением.

Задача 1. Докажите, что из линейной эквивалентности вытекает дифференцируемая, а из дифференцируемой — топологическая.

Заметим, что отображение $h$ переводит фазовые кривые потока $\{f^t\}$ в фазовые кривые потока $\{g^t\}$.

Задача 2. Всякий ли линейный автоморфизм $h \in \mathrm{GL}(\mathbf{R}^n)$, переводящий фазовые кривые потока $\{f^t\}$ в фазовые кривые потока $\{g^t\}$, осуществляет линейную эквивалентность потоков?

*Ответ.* Нет.

Указание. Рассмотреть $n=1$, $f^t x = e^t x$, $g^t x = e^{2t} x$.

Задача 3. Доказать, что отношения линейной, дифференцируемой и топологической эквивалентности являются настоящими отношениями эквивалентности, т. е.

$$f \sim f, \quad (f \sim g) \Rightarrow (g \sim f), \quad (f \sim g,\ g \sim k) \Rightarrow (f \sim k).$$

В частности, все сказанное применимо к фазовым потокам линейных систем. Для краткости мы будем говорить об эквивалентности самих систем.

Итак, все линейные системы мы тремя способами разбили на классы эквивалентности (линейной, дифференцируемой, топологической). Изучим эти классы подробнее.

---

*) Введенное здесь отношение эквивалентности называют также *сопряженностью и подобием*.

**3. Линейная классификация.**

Теорема. *Пусть $A$, $B$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — линейные операторы, все собственные числа которых просты. Тогда системы*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad и \quad \dot{y} = By, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

*линейно эквивалентны тогда и только тогда, когда собственные числа операторов $A$ и $B$ совпадают.*

Доказательство. Для линейной эквивалентности линейных систем необходимо и достаточно, чтобы $B = hAh^{-1}$ при некотором $h \in \mathrm{GL}(\mathbb{R}^n)$ (рис. 150) (ибо $\dot{y} = h\dot{x} = hAx = hAh^{-1}y$). Собственные числа операторов $A$ и $hAh^{-1}$ совпадают. (Здесь простота собственных чисел несущественна.)

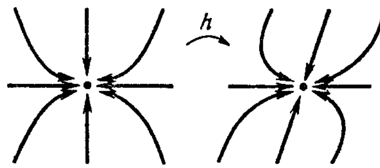


Рис. 150. Линейно эквивалентные системы.

Обратно, пусть собственные числа $A$ простые и совпадают с собственными числами $B$. Тогда $A$ и $B$ разлагаются в прямые произведения одинаковых (линейно эквивалентных) одномерных и двумерных систем согласно § 20; поэтому они линейно эквивалентны.

Задача 1. Покажите, что системы $\dot{x}_1 = x_1$, $\dot{x}_2 = x_2$ и $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$, $\dot{x}_2 = x_2$ линейно не эквивалентны, хотя их собственные числа и одинаковы.

**4. Дифференцируемая классификация.** Очевидна

Теорема. *Две линейные системы*

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x} = Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

*дифференцируемо эквивалентны тогда и только тогда, когда они линейно эквивалентны* *).

Доказательство. Пусть $h$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, переводящий фазовый поток системы $A$ в фазовый поток системы $B$. Точка $x = 0$ неподвижна для фазового потока системы $A$. Поэтому $h$ переводит 0 в одну из неподвижных точек $c$ потока системы $B$, так что $Bc = 0$. Диффеоморфизм $d$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ сдвига на $c$ ($dx = x - c$) переводит фазовый поток $B$ в себя: $(\dot{(x-c)} = \dot{x} = Bx = B(x-c))$. Диффеоморфизм $h_1 = d \circ h$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ переводит поток $A$ в поток $B$ и оставляет 0 на месте: $h_1(0) = 0$.

Обозначим через $H$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ производную диффеоморфизма $h_1$ в 0. Диффеоморфизмы $h_1 \circ e^{At} = e^{Bt} \circ h_1$ совпадают при любых $t$. Поэтому при любом $t$ совпадают и их производные при $x = 0$:

$$He^{At} = e^{Bt}H,$$

что и требовалось доказать.

## § 22. Топологическая классификация особых точек

Рассмотрим две линейные системы:

$$\dot{x} = Ax, \quad \dot{x} = Bx, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

---

*) Не следует думать, однако, что всякий диффеоморфизм, устанавливающий их эквивалентность, линеен. Пример: $A = B = 0$.

и предположим, что вещественные части всех их собственных чисел отличны от 0. Обозначим через $m_-$ число собственных чисел с отрицательной вещественной частью и через $m_+$ число собственных чисел с положительной вещественной частью, так что $m_- + m_+ = n$.

**1. Теорема.** *Для топологической эквивалентности двух линейных систем, не имеющих собственных чисел с нулевой вещественной частью, необходимо и достаточно, чтобы количество собственных чисел с отрицательной (положительной) вещественной частью в той и в другой системе было одинаково*:

$$m_-(A) = m_-(B), \qquad m_+(A) = m_+(B).$$

Эта теорема утверждает, например, что устойчивые узлы и фокусы (рис. 151) топологически эквивалентны друг другу ($m_- = 2$), но не эквивалентны седлу ($m_- = m_+ = 1$).

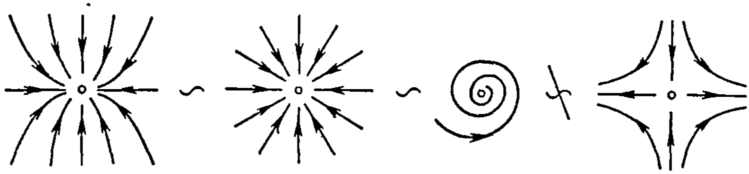

Рис. 151. Топологически эквивалентные и неэквивалентные системы.

Подобно индексу инерции невырожденной квадратичной формы, число $m_-$ является единственным топологическим инвариантом системы.

Замечание. Аналогичное предложение справедливо *локально* (в окрестности неподвижной точки) для *нелинейных* систем, линейные части которых не имеют чисто мнимых собственных чисел. В частности, такая система в окрестности неподвижной точки топологически эквивалентна своей линейной части (рис. 152). Мы не можем останавливаться на доказательстве этого предложения, весьма важного для исследования нелинейных систем.

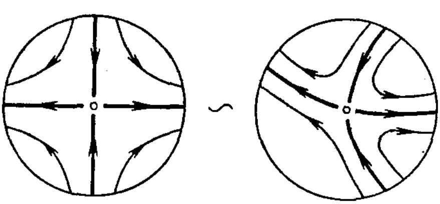

Рис. 152. Топологическая эквивалентность системы и ее линеаризации.

**2. Редукция к случаю $m_- = 0$.** Топологическая эквивалентность линейных систем с одинаковыми $m_-$ и $m_+$ вытекает из следующих трех лемм:

Лемма 1. *Прямые произведения топологически эквивалентных систем топологически эквивалентны.*

То есть если системы, заданные операторами $A_1$, $B_1$: $\mathbf{R}^{m_1} \to \mathbf{R}^{m_1}$; $A_2$, $B_2$: $\mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^{m_2}$, переводятся друг в друга гомеоморфизмами $h_1$: $\mathbf{R}^{m_1} \to \mathbf{R}^{m_1}$, $h_2$: $\mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^{m_2}$, то существует гомеоморфизм $h$: $\mathbf{R}^{m_1} + \mathbf{R}^{m_2} \to \mathbf{R}^{m_1} + \mathbf{R}^{m_2}$, переводящий фазовый поток системы-произведения $\dot{x}_1 = A_1 x_1$, $\dot{x}_2 = A_2 x_2$ в фазовый поток системы-произведения $\dot{x}_1 = B_1 x_1$, $\dot{x}_2 = B_2 x_2$.

Доказательство очевидно: надо положить $h(x_1, x_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2))$.

Из курса линейной алгебры известна

Лемма 2. *Если у оператора $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ нет чисто мнимых собственных чисел, то пространство $\mathbf{R}^n$ распадается в прямую сумму двух инвариантных относительно $A$ подпространств, $\mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{m_-} \dotplus \mathbf{R}^{m_+}$, так что все собственные числа сужения $A$ на $\mathbf{R}^{m_-}$ имеют отрицательные вещественные части, а на $\mathbf{R}^{m_+}$ — положительные* (рис. 153).

Это следует, например, из теоремы о жордановой нормальной форме.

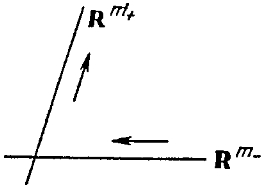


Рис. 153. Инварианты подпространства оператора, не имеющего чисто мнимых собственных чисел.

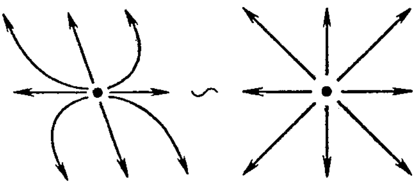

Рис. 154. Все неустойчивые узлы топологически эквивалентны.

Леммы 1 и 2 сводят доказательство топологической эквивалентности к следующему частному случаю:

Лемма 3. *Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор, все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть* (рис. 154). *Тогда система*

$$\dot{x} = Ax, \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

*топологически эквивалентна стандартной* (рис. 154):

$$\dot{x} = x, \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Эта лемма почти очевидна в одномерном случае и в случае фокуса на плоскости, а значит, — по лемме 1 — и в любой системе без кратных корней.

Мы проведем далее доказательство леммы 3 в общем случае.

**3. Функция Ляпунова.** Доказательство леммы 3 основано на построении специальной квадратичной формы — так называемой функции Ляпунова.

Теорема. *Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор, все собственные числа которого имеют положительную вещественную часть. Тогда в $\mathbf{R}^n$ существует такая евклидова структура, что вектор $Ax$ в каждой точке $x \neq 0$ образует с радиус-вектором $x$ острый угол.*

Иными словами:

*Существует такая положительно определенная квадратичная форма $r^2$ в $\mathbf{R}^n$, что ее производная по направлению векторного поля $Ax$ положительна:*

$$L_{Ax} r^2 > 0 \quad \text{при} \quad x \neq 0. \tag{1}$$

**Или еще:**

*Существует эллипсоид в $\mathbf{R}^n$ с центром в 0 такой, что в каждой его точке $x$ вектор $Ax$ направлен наружу* (рис. 155).

Легко проверить, что все три формулировки эквивалентны.

Мы докажем (и будем использовать в дальнейшем) эту теорему во второй формулировке. Доказывать ее удобнее в комплексном случае:

*Пусть все собственные числа* $\lambda_k$ *оператора* $A$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ *имеют положительные вещественные части. Тогда существует положительно определенная квадратичная форма* $r^2$: ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n \to \mathbf{R}$, *производная которой по направлению векторного поля* ${}^{\mathbf{R}}Az$ *есть положительно определенная квадратичная форма*:

$$L_{{}^{\mathbf{R}}Az} r^2 > 0 \quad \text{при} \quad z \neq 0. \tag{2}$$

Применяя неравенство (2) в случае, когда оператор $A$ является комплексификацией вещественного оператора, а $z$ принадлежит

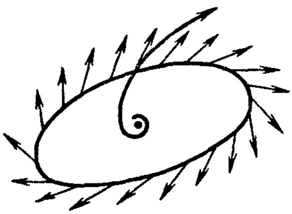

Рис. 155. Поверхность уровня функции Ляпунова.

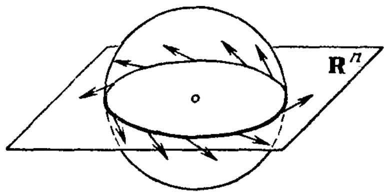


Рис. 156. Поверхность уровня функции Ляпунова в $\mathbf{C}^n$

вещественному подпространству (рис. 156), получаем вещественную теорему (1).

**4. Построение функции Ляпунова.** В качестве функции Ляпунова $r^2$ мы будем брать сумму квадратов модулей координат в подходящем комплексном базисе: $r^2 = (z, \bar{z}) = \sum\limits_{k=1}^{n} z_k \bar{z}_k$. При фиксированном базисе мы можем отождествить вектор $z$ с набором чисел $z_1, \ldots, z_n$ и оператор $A$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ с матрицей $(a_{kl})$. Вычисление показывает, что *производная является квадратичной формой*:

$$L_{{}^{\mathbf{R}}Az} (z, \bar{z}) = (Az, \bar{z}) + (z, A\bar{z}) = 2\,\mathrm{Re}\,(Az, \bar{z}). \tag{3}$$

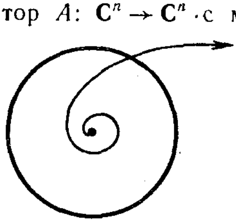

Рис. 157. Положительная определенность формы (4) в случае $n=1$.

*Если базис собственный, то полученная форма положительно определена* (рис. 157). Действительно, в этом случае

$$2\,\mathrm{Re}\,(Az, \bar{z}) = 2 \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Re}\,\lambda_k \,|z_k|^2. \tag{4}$$

По условию все вещественные части собственных чисел $\lambda_k$ положительны. Поэтому форма (4) положительно определена.

Если оператор $A$ не имеет собственного базиса, то он имеет почти собственный базис, которым можно с таким же успехом воспользоваться для построения функции Ляпунова.

Точнее, справедлива

Лемма 4. *Пусть* $A$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ — $\mathbf{C}$-*линейный оператор и* $\varepsilon > 0$. *Тогда в* $\mathbf{C}^n$ *можно так выбрать базис* $\xi_1, \ldots, \xi_n$, *что матрица* $A$ *будет верхнетреугольной и все элементы выше диагонали будут по модулю меньше* $\varepsilon$:

$$(A) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & <\varepsilon \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

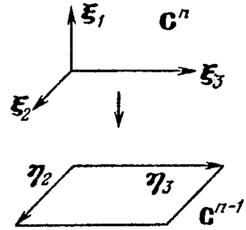

Рис. 158. Построение базиса, в котором матрица оператора треугольная.

Доказательство. Существование базиса, в котором матрица верхнетреугольная, следует, например, из теоремы о жордановой нормальной форме.

Такой базис легко построить индукцией по $n$, пользуясь лишь существованием у всякого линейного оператора $A$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ собственного вектора. Пусть $\xi_1$ — этот вектор (рис. 158). Рассмотрим фактор-пространство $\mathbf{C}^n/\mathbf{C}\xi_1 \cong \mathbf{C}^{n-1}$. Оператор $A$ задает на фактор-пространстве оператор $\tilde{A}$: $\mathbf{C}^{n-1} \to \mathbf{C}^{n-1}$. Пусть $\eta_2, \ldots, \eta_n$ — базис в $\mathbf{C}^{n-1}$, в котором матрица оператора $\tilde{A}$ верхнетреугольная. Обозначим через $\xi_2, \ldots, \xi_n$ каких-нибудь представителей классов $\eta_2, \ldots, \eta_n$ в $\mathbf{C}^n$. Тогда базис $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — искомый.

Пусть матрица оператора $A$ в базисе $\xi_1, \ldots, \xi_n$ верхнетреугольная. Покажем, что *наддиагональные члены можно сделать сколь угодно малыми, заменяя векторы базиса на пропорциональные им векторы*. Действительно, пусть $a_{kl}$ — элементы матрицы оператора $A$ в базисе $\xi_k$, так что $a_{kl} = 0$ при $k > l$. В базисе $\xi'_k = N^k \xi_k$ элементы матрицы оператора $A$ будут $a'_{kl} = a_{kl} N^{l-k}$. При достаточно малом $N$ для всех $l > k$ будет $|a'_{kl}| < \varepsilon$.

Лемма 4 доказана.

Сумму квадратов модулей координат в выбранном «$\varepsilon$-почти собственном» базисе мы и возьмем в качестве функции Ляпунова (при достаточно малом $\varepsilon$).

**5. Оценка производной.** Рассмотрим множество всех квадратичных форм в $\mathbf{R}^m$. Это множество имеет естественную структуру линейного пространства $\mathbf{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

Очевидна

Лемма 5. *Множество положительных определенных квадратичных форм в* $\mathbf{R}^m$ *открыто в* $\mathbf{R}^{\frac{m(m+1)}{2}}$.

То есть если форма $a = \sum\limits_{k,l=1}^{m} a_{kl} x_k x_l$ положительно определена, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что всякая форма $a + b$, где $|b_{kl}| < \varepsilon$ (для всех $k, l, 1 \leqslant k, l \leqslant m$), тоже положительно определена.

Доказательство. Форма $a$ положительна во всех точках единичной сферы $\sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 = 1$. Сфера компактна, а форма непрерывна. Поэтому нижняя грань достигается и, значит, всюду на сфере $a(x) \geqslant \alpha > 0$.

Если $|b_{kl}|<\varepsilon$, то на сфере $|b(x)|\leqslant\sum|b_{kl}|\leqslant m^2\varepsilon$.

Поэтому при $\varepsilon<\alpha/m^2$ форма $a+b$ положительна на сфере и, значит, положительно определена. Лемма доказана.

Замечание. Из нашего рассуждения вытекает также, что любая положительно определенная квадратичная форма удовлетворяет везде неравенству

$$\alpha\|x\|^2\leqslant a(x)\leqslant\beta\|x\|^2,\qquad 0<\alpha<\beta. \tag{5}$$

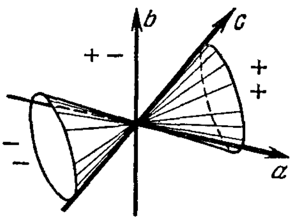

Рис. 159. Пространство квадратичных форм.

Задача 1. Докажите, что множество невырожденных квадратичных форм с данной сигнатурой открыто.

Пример 1. Пространство квадратичных форм от двух переменных $ax^2+2bxy+cy^2$ — это трехмерное пространство с координатами $a$, $b$, $c$ (рис. 159). Конус $b^2=ac$ делит это пространство на три открытые части соответственно сигнатурам.

Мы используем лемму 5, чтобы доказать следующее: при достаточно малом $\varepsilon$ производная по направлению векторного поля ${}^{\mathbf{R}}Az$ от суммы квадратов модулей координат в «$\varepsilon$-почти собственном» базисе, выбранном по лемме 4, положительно определена.

Согласно формуле (3) эта производная является квадратичной формой вещественных и мнимых частей координат $z_k=x_k+iy_k$.

Выделим в формуле (3) слагаемые с диагональными и наддиагональными элементами матрицы $(A)$:

$$L_{{}^{\mathbf{R}}Az}r^2=P+Q,\quad\text{где}\quad P=2\operatorname{Re}\sum_{k=l}a_{kl}z_k\bar z_l,\quad Q=2\operatorname{Re}\sum_{k<l}a_{kl}z_k\bar z_l.$$

Заметим, что диагональные члены треугольной матрицы $(A)$ — это собственные числа $\lambda_k$ оператора $A$. Поэтому *квадратичная форма* $P=\sum_{k=1}^{n}2\operatorname{Re}\lambda_k(x_k^2+y_k^2)$ *переменных* $x_k$, $y_k$ *положительно определена и не зависит от выбора базиса* *).

По лемме 5 заключаем, что при достаточно малом $\varepsilon$ форма $P+Q$ (близкая к $P$) также положительно определена. Ибо коэффициенты формы $Q$ переменных $x_k$, $y_k$ при достаточно малом $\varepsilon$ становятся сколь угодно малыми (поскольку $|a_{kl}|<\varepsilon$ при $k<l$).

Неравенство (2), а с ним и (1), доказано.

Замечание. Поскольку $L_{Ax}r^2$ является положительно определенной квадратичной формой, имеет место неравенство вида (5):

$$\alpha r^2\leqslant L_{Ax}r^2\leqslant\beta r^2, \tag{5'}$$

где $\beta>\alpha>0$ — некоторые постоянные.

Таким образом, сформулированная в п. 3 теорема о функции Ляпунова доказана.

*) Следует отметить, что заданное формой $P$ отображение ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^n\to\mathbf{R}$ *зависит* от выбора базиса.

Следующая серия задач приводит к другому доказательству этой теоремы.

Задача 2. Докажите, что дифференцирование по направлению векторного поля $Ax$ в $\mathbf{R}^n$ задает линейный оператор $L_A$: $\mathbf{R}^{n(n+1)/2}\to\mathbf{R}^{n(n+1)/2}$ из пространства квадратичных форм на $\mathbf{R}^n$ в себя.

Задача 3. Зная собственные числа $\lambda_i$ оператора $A$, найти собственные числа оператора $L_A$.

*Ответ*. $\lambda_i+\lambda_j$, $1\leqslant i,\ j\leqslant n$.

Указание. Пусть $A$ имеет собственный базис. Тогда собственными векторами $L_A$ будут квадратичные формы, равные попарным произведениям линейных форм, являющихся собственными векторами оператора, дуального к $A$.

Задача 4. Докажите, что оператор $L_A$ является изоморфизмом, если $A$ не имеет противоположных собственных чисел. В частности, если вещественные части всех собственных чисел оператора $A$ одного знака, то каждая квадратичная форма на $\mathbf{R}^n$ есть производная некоторой квадратичной формы по направлению векторного поля $Ax$.

Задача 5. Докажите, что если вещественные части всех собственных чисел оператора $A$ положительны, то форма, производная которой по направлению поля $Ax$ положительно определена, сама положительно определена и, следовательно, удовлетворяет всем требованиям доказываемой теоремы.

Указание. Представить форму в виде интеграла ее производной вдоль фазовых кривых.

**6. Построение гомеоморфизма** $h$. Приступаем к доказательству леммы 3. Гомеоморфизм $h$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$, переводящий фазовый поток $\{f^t\}$ уравнения $\dot{x}=Ax$ $(\operatorname{Re}\lambda_k>0)$ в фазовый поток $\{g^t\}$ уравнения $\dot{x}=x$, будем строить следующим образом. Рассмотрим сферу *)

$$S=\{x\in\mathbf{R}^n:\ r^2(x)=1\},$$

где $r^2$ — функция Ляпунова из (1).

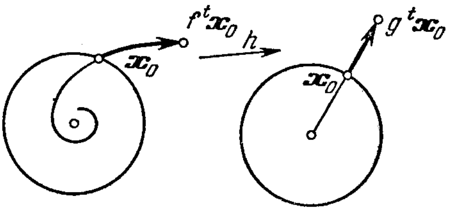

Рис. 160. Построение гомеоморфизма $h$.

Точки этой сферы гомеоморфизм $h$ будет оставлять на месте. Пусть $x_0$ — точка сферы (рис. 160). Точку $f^tx_0$ фазовой траектории уравнения $\dot{x}=Ax$ отображение $h$ будет переводить в точку $g^tx_0$ фазовой траектории уравнения $\dot{x}=x$:

$$h(f^tx_0)=g^tx_0\quad \forall t\in\mathbf{R},\quad x_0\in S,\quad h(0)=0. \tag{6}$$

Мы должны проверить:

1) что формула (6) однозначно определяет значение $h$ в любой точке $x\in\mathbf{R}^n$;

2) что отображение $h^t$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ взаимно однозначно и взаимно непрерывно;

3) что $h\circ f^t=g^t\circ h$.

Доказательства всех этих утверждений очевидны.

**7. Доказательство леммы 3.**

Лемма 6. *Пусть* $\varphi$: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}^n$ — *какое-нибудь отличное от* 0 *решение уравнения* $\dot{x}=Ax$. *Составим существенную функцию вещественного переменного* $t$:

$$\rho(t)=\ln r^2(\varphi(t)).$$

*) Если угодно, эллипсоид.

*Тогда отображение $\rho$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ является диффеоморфизмом, причем*

$$\alpha \leqslant d\rho/dt \leqslant \beta.$$

Доказательство. По теореме единственности $r^2(\varphi(t))\neq 0\ \forall t\in\mathbb{R}$. Согласно (5′), находим для $d\rho/dt = L_{Ax}r^2/r^2$ оценку $\alpha\leqslant d\rho/dt\leqslant\beta$, что и требовалось доказать.

Из леммы 6 следует, что:

1) *Каждая точка $x\neq 0$ представляется в виде $x=f^t x_0$, где $x_0\in S$, $t\in\mathbb{R}$, $\{f^t\}$ — фазовый поток уравнения $\dot{r}=Ax$.*

Действительно, рассмотрим решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(0)=x$. По лемме 6 при некотором $\tau$ будет $r^2(\varphi(\tau))=1$. Точка $x_0=\varphi(\tau)$ принадлежит $S$. Полагая $t=-\tau$, получим $x=f^t x_0$.

2) *Такое представление единственно.*

Действительно, фазовая кривая, выходящая из $x$ (рис. 160), единственна и пересекает сферу в одной точке $x_0$ (по лемме 6); единственность $t$ также следует из монотонности $\rho$ (лемма 6).

Итак, мы построили взаимно однозначное отображение прямого произведения прямой и сферы на евклидово пространство без одной точки

$$F\colon\ \mathbb{R}\times S^{n-1}\to\mathbb{R}^n\setminus 0, \qquad F(t, x_0)=f^t x_0.$$

Из теоремы о зависимости решения от начальных условий вытекает, что как отображение $F$, так и обратное отображение непрерывно (и даже является диффеоморфизмом).

Заметим теперь, что для стандартного уравнения $\dot{x}=x$ имеем $d\rho/dt=2$. Поэтому отображение $G\colon\ \mathbb{R}\times S^{n-1}\to\mathbb{R}^n\setminus 0$, $G(t, x_0)=g^t x_0$ также взаимно однозначно и взаимно непрерывно. Отображение $h$ по определению (6) совпадает с отображением $G\circ F^{-1}$: $\mathbb{R}^n\setminus 0\to\mathbb{R}^n\setminus 0$ всюду, кроме точки 0. Таким образом, мы доказали, что $h\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — взаимно однозначное отображение.

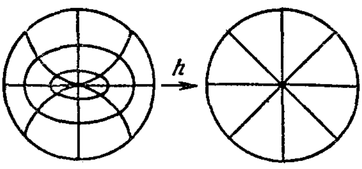


Рис. 161. Гомеоморфизм $h$ является диффеоморфизмом всюду, кроме 0.


Рис. 162. Стандартное седло.

Непрерывность $h$ и $h^{-1}$ всюду, кроме точки 0, следует из непрерывности $F$, $F^{-1}$ и $G$, $G^{-1}$ (в действительности $h$ — диффеоморфизм всюду, кроме точки 0; рис. 161).

Непрерывность $h$ и $h^{-1}$ в точке 0 следует из леммы 6. Эта лемма позволяет получить даже явную оценку $r^2(h(x))$ через $r^2(x)$, $\|x\|\leqslant 1$:

$$(r^2(x))^{2/\alpha}\leqslant r^2(h(x))\leqslant (r^2(x))^{2/\beta}.$$

Действительно, пусть $x=F(t, x_0)$, $t\leqslant 0$. Тогда $\beta t\leqslant \ln r^2(x)\leqslant \alpha t$ и $\ln r^2(h(x))=2t$. Наконец, при $x\neq 0$ имеем $x=f^s x_0$, поэтому

$$(h\circ f^t)(x)=h(f^t(f^s(x_0)))=h(f^{t+s}(x_0))=g^{t+s}(x_0)=g^t(g^s(x_0))=g^t(h(x))=(g^t\circ h)(x).$$

При $x=0$ также $(h\circ f^t)(x)=(g^t\circ h)(x)$. Итак, утверждения 1), 2), 3) п. 6 доказаны. Доказательство леммы 3 закончено.

**8. Доказательство теоремы о топологической классификации.** Из лемм 1, 2, 3 следует, что всякая линейная система $\dot{x}=Ax$, у которой оператор $A\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью, топологически эквивалентна стандартному многомерному седлу (рис. 162):

$$\dot{x}_1=-x_1,\qquad \dot{x}_2=x_2,\qquad x_1\in\mathbb{R}^{m-},\qquad x_2\in\mathbb{R}^{m+}.$$

Следовательно, две такие системы с одинаковыми числами $m_-$, $m_+$ топологически эквивалентны друг другу.

Заметим, что подпространства $\mathbf{R}^{m_-}$ и $\mathbf{R}^{m_+}$ инвариантны относительно фазового потока $\{g^t\}$. При увеличении $t$ всякая точка $\mathbf{R}^{m_-}$ приближается к 0.

Задача 1. Докажите, что $g^t\boldsymbol{x} \to 0$ при $t \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^{m_-}$.

Поэтому $\mathbf{R}^{m_-}$ называется *входящим усом* седла. Точно так же $\mathbf{R}^{m_+}$ называется *выходящим усом*. Выходящий ус определяется условием $g^t\boldsymbol{x} \to 0$ при $t \to -\infty$.

Докажем теперь вторую часть теоремы о топологической классификации: *у топологически эквивалентных систем одинаково количество собственных чисел с отрицательной вещественной частью.*

Это количество есть размерность $m_-$ входящего уса. Итак, достаточно доказать, что *размерности входящих усов у топологически эквивалентных седел одинаковы.*

Заметим, что всякий гомеоморфизм $h$, переводящий фазовый поток одного седла в фазовый поток другого, обязан переводить входящий ус одного во входящий ус другого (поскольку стремление к 0 при $t \to +\infty$ сохраняется при гомеоморфизме). Поэтому гомеоморфизм $h$ осуществляет также гомеоморфное отображение входящего уса одного седла на входящий ус другого.

Совпадение размерностей усов вытекает теперь из следующего топологического предложения:

*Размерность пространства* $\mathbf{R}^n$ *— топологический инвариант.* Иными словами, *гомеоморфизм* $h$: $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ *существует только между пространствами одинаковой размерности.*

Хотя это предложение и кажется очевидным*), доказательство его не просто и не будет здесь проводиться.

Задача 2. Докажите, что 4 седла с трехмерным фазовым пространством и с $(m_-, m_+) = (3, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$, $(0, 3)$ топологически не эквивалентны (не пользуясь недоказанным топологическим предложением).

Указание. Одномерный ус состоит из трех фазовых кривых, а более чем одномерный — из бесконечного числа (рис. 163).

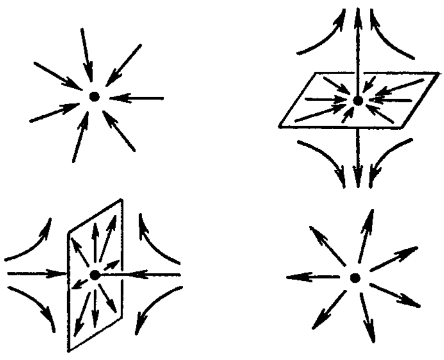

Рис. 163. Усы трехмерных седел.

Таким образом, топологическая классификация линейных систем с ненулевыми вещественными частями собственных чисел в $\mathbf{R}^1$, $\mathbf{R}^2$ и $\mathbf{R}^3$ проведена полностью, тогда как в $\mathbf{R}^n$ при $n > 3$ мы вынуждены

*) Существуют, однако, взаимно однозначные отображения $\mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$, а также непрерывные отображения $\mathbf{R}^m$ *на* $\mathbf{R}^n$ при $m < n$ (например, $\mathbf{R}^1 \to \mathbf{R}^2$).

ссылаться на недосказанное утверждение о топологической инвариантности размерности.

Задача 3. Провести топологическую классификацию линейных операторов $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$, не имеющих собственных чисел с модулем 1.

## § 23. Устойчивость положений равновесия

Вопрос об устойчивости положения равновесия нелинейной системы решается так же, как для линеаризованной системы, если у последней нет собственных чисел на мнимой оси.

**1. Устойчивость по Ляпунову.** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in U \subset \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

где $v$ — $r > 2$ раз дифференцируемое в области $U$ векторное поле. Предположим, что уравнение (1) имеет положение равновесия (рис. 164). Выберем координаты $x_i$ так, чтобы положение равновесия было началом координат: $v(0) = 0$.

Решение с начальным условием $\varphi(t_0) = 0$ есть $\varphi = 0$. Нас интересует поведение решений с близкими начальными условиями.

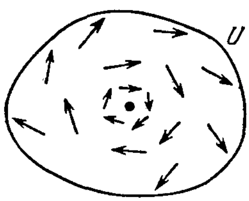


Рис. 164. Останутся ли вблизи положения равновесия фазовые кривые, начинающиеся в его достаточно малой окрестности?

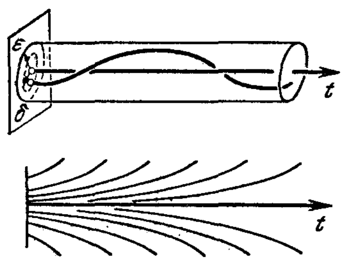


Рис. 165. Устойчивое и неустойчивое положения равновесия: различие в поведении интегральных кривых.

Определение. Положение равновесия $x = 0$ уравнения (1) называется *устойчивым* (или *устойчивым по Ляпунову*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (зависящее только от $\varepsilon$ и не зависящее от $t$, о котором идет речь ниже) такое, что для всякого $x_0$, для которого *) $\|x_0\| < \delta$, решение $\varphi$ уравнения (1) с начальным условием $\varphi(0) = x_0$ продолжается на всю полуось $t > 0$ и удовлетворяет неравенству $\|\varphi(t)\| < \varepsilon$ для всех $x > 0$ (рис. 165).

Иными словами, *устойчивость положения равновесия по Ляпунову — это равномерная на интервале $[0, +\infty)$ сходимость (к постоянному решению) решений, начальные значения которых стремятся к рассматриваемому положению равновесия.* Сходимость значений решений при любом фиксированном $t$ гарантируется теоремой о непрерывной

*) Если $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$.

зависимости решения от начального условия; важна именно равномерная сходимость, т. е. независимость $\delta$ от $t$.

Задача 1. Исследовать устойчивость положений равновесия:

1) $\dot{x}=0$; 2) $\dot{x}=x$; 3) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-x_1;\end{cases}$ 4) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_1;\\ \dot{x}_2=-x_2;\end{cases}$ 5) $\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-\sin x_1.\end{cases}$

Задача 2. Докажите, что приведенное определение корректно, т. е. что устойчивость положения равновесия не зависит от системы координат, участвовавшей в определении.

Задача 3. Пусть известно, что для любого $N>0$, $\varepsilon>0$ существует такое решение $\varphi$ уравнения (1), что для некоторого $t>0$ $\|\varphi(t)\|>N\|\varphi(0)\|$, причем $\|\varphi(0)\|<\varepsilon$. Вытекает ли отсюда неустойчивость положения равновесия $x=0$?

### 2. Асимптотическая устойчивость.

Определение. Положение равновесия $x=0$ уравнения (1) называется *асимптотически устойчивым*, если оно устойчиво (по Ляпунову) и

$$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$$

для всякого решения $\varphi$ с начальным условием $\varphi(0)$, лежащим в достаточно малой окрестности нуля (рис. 166).

Задача 1. Решить задачи 1), 2), 3) п. 1, заменив везде устойчивость асимптотической устойчивостью.

Задача 2. Вытекает ли устойчивость положения равновесия по Ляпунову из того, что каждое решение стремится в этому положению равновесия при $t\to+\infty$?

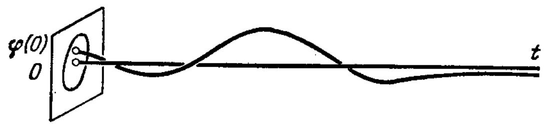


Рис. 166. Асимптотически устойчивое положение равновесия: интегральные кривые.

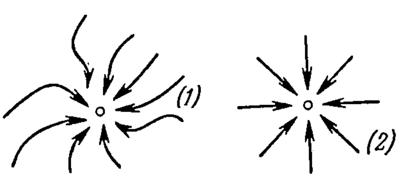


Рис. 167. Фазовые кривые уравнений (1) и (2).

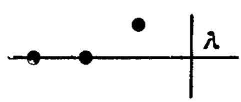


Рис. 168. Собственные числа оператора $A$.

### 3. Теорема об устойчивости по первому приближению.

Наряду с (1) рассмотрим линеаризованное уравнение (рис. 167)

$$\dot{x}=Ax,\qquad A\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n. \tag{2}$$

Тогда $v(x)=v_1+v_2$, $v_1(x)=Ax$, $v_2(x)=O(\|x\|^2)$.

Теорема. *Пусть все собственные числа $\lambda$ оператора $A$ лежат в левой полуплоскости:* $\operatorname{Re}\lambda<0$ (рис. 168). *Тогда положение равновесия $x=0$ уравнения* (1) *асимптотически устойчиво.*

Задача 1. Приведите пример неустойчивого (по Ляпунову) положения равновесия уравнения (1), для которого все $\operatorname{Re}\lambda \leqslant 0$.

Замечание. Можно доказать, что если вещественная часть хотя бы одного собственного числа $\lambda$ *положительна*, то положение равновесия неустойчиво. В случае нулевых вещественных частей устойчивость зависит от членов ряда Тейлора выше первой степени.

Задача 2. Устойчиво ли (по Ляпунову и асимптотически) нулевое положение равновесия системы $\dot{x}_1 = x_2$, $\dot{x}_2 = -x_1^n$?

*Ответ.* Если $n$ четно, неустойчиво (по Ляпунову); если нечетно, то устойчиво (по Ляпунову), но не асимптотически.

**4. Доказательство теоремы.** Согласно § 22, п. 3 существует функция Ляпунова: положительно определенная квадратичная форма $r^2$, производная которой по направлению линейного поля $v_1$ отрицательно определена:

$$L_{v_1} r^2 \leqslant -2\gamma r^2,$$

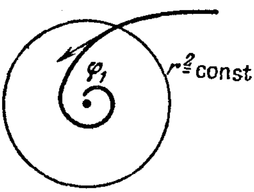


Рис. 169. Поверхность уровня функции Ляпунова.

где $\gamma$ — положительная постоянная (рис. 169).

Лемма. *В достаточно малой окрестности точки $x=0$ производная функции Ляпунова по направлению нелинейного поля* $\boldsymbol{v}$ *удовлетворяет неравенству*

$$L_v r^2 \leqslant -\gamma r^2. \tag{3}$$

Действительно, $L_v r^2 = L_{v_1} r^2 + L_{v_2} r^2$. Покажем, что при малых $r$ второе слагаемое гораздо меньше первого:

$$L_{v_2} r^2 = O(r^3). \tag{4}$$

В самом деле, для любого поля $\boldsymbol{u}$ и любой функции $f$

$$L_u f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} u_i.$$

В нашем случае $(\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v}_2,\ f = r^2)$ $u_i = O(r^2)$ и $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = O(r)$ (почему?), откуда и вытекает соотношение (4).

Итак, существуют $C > 0$, $\sigma > 0$ такие, что для всех $\boldsymbol{x}$ с $|\boldsymbol{x}| < \sigma$ выполнено неравенство $|L_{v_2} r^2|_x \leqslant C\,|r^2(x)|^{3/2}$. Правая часть не больше $\gamma r^2$ при достаточно малых $\|\boldsymbol{x}\|$, так что в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}=0$

$$L_v r^2 \leqslant -2\gamma r^2 + \gamma r^2 = -\gamma r^2.$$

Лемма доказана.

Пусть $\varphi$ — решение уравнения (1), отличное от нулевого, с начальным условием в достаточно малой окрестности точки $\boldsymbol{x}=0$. Определим функцию времени $\rho$ соотношением

$$\rho(t) = \ln r^2(\varphi(t)), \qquad t \geqslant 0.$$

По теореме единственности $r^2(\varphi(t)) \neq 0$, так что функция $\rho$ определена и дифференцируема. Согласно неравенству (3)

$$\dot{\rho} = \frac{1}{r^2 \circ \varphi} \frac{d}{dt} r^2 \circ \varphi = \frac{L_v r^2}{r^2} \leqslant -\gamma.$$

Отсюда вытекает, что $r^2(\varphi(t))$ монотонно убывает и стремится к 0 при $t \to +\infty$:

$$\rho(t) \leqslant \rho(0) - \gamma t, \qquad r^2(\varphi(t)) \leqslant r^2(\varphi(0))\, e^{-\gamma t} \to 0, \tag{5}$$

что и требовалось доказать.

Задача 1. Указать пробел в приведенном доказательстве.

Решение. Мы не доказали, что решение $\varphi$ продолжается вперед неограниченно.

Рассмотрим такое $\sigma > 0$, что при $\|x\| < \sigma$ выполнено неравенство (3).

Рассмотрим компакт в расширенном фазовом пространстве (рис. 170)

$$F = \{x, t\colon\ r^2(x) \leqslant \sigma,\ |t| \leqslant T\}.$$

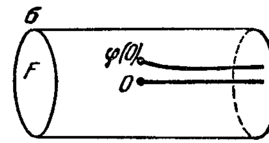


Рис. 170. Неограниченная продолжаемость решения вперед.

Рассмотрим решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(0)$, где $r^2(\varphi(0)) < \sigma$. По теореме о продолжении $\varphi$ можно продолжить вперед до границы цилиндра $F$. Но пока точка $(t, \varphi(t))$ принадлежит $F$, производная функции $r^2(\varphi(t))$ отрицательна. Поэтому решение не может выйти на боковую поверхность цилиндра $F$ (где $r^2 = \sigma^2$) и, значит, продолжается до торца $t = T$.

Поскольку $T$ произвольно (и не зависит от $\sigma$), решение $\varphi$ продолжается вперед неограниченно, причем $r^2(\varphi(t)) < \sigma^2$ и неравенство (3) имеет место при всех $t \geqslant 0$.

Замечание 1. Мы доказали больше, чем асимптотическую устойчивость положения равновесия. Из неравенства (5) видно, что сходимость $\varphi(t) \to 0$ равномерная (относительно начальных условий $x_0$, достаточно близких к 0).

Кроме того, неравенство (5) указывает скорость сходимости (экспоненциальную).

По существу, теорема утверждает, что равномерная экспоненциальная сходимость решений линейного уравнения (2) к нулю не нарушается при нелинейном возмущении $v_2(x) = O(\|x\|^2)$ правой части уравнения. Аналогичное утверждение справедливо для различных возмущений более общей природы. Например, можно было бы рассмотреть неавтономное возмущение $v_2(x, t)$, для которого $\|v_2(x, t)\| \leqslant \varphi(|x|)$, где $\varphi(|x|) = o(|x|)$ при $x \to 0$.

Задача 2. Докажите, что в условиях теоремы уравнения (1) и (2) топологически эквивалентны в окрестностях положения равновесия.

Замечание 2. В связи с доказанной выше теоремой мы приходим к следующей алгебраической задаче (так называемая проблема Рауса — Гурвица):

Требуется узнать, *лежат ли все корни данного многочлена в левой полуплоскости*.

Этот вопрос решается конечным числом арифметических действий над коэффициентами многочлена. Соответствующие алгоритмы описаны в курсах алгебры (*критерий Гурвица, метод Штурма*) и комплексного переменного (*принцип аргумента, методы Вышеградского, Найквиста и Михайлова*). См., например, А. Г. Курош, «Курс высшей алгебры» (М.: Наука, 1968), гл. 9; М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, «Методы теории функций комплексного переменного» (М.: Физматгиз, 1958), гл. V; см. также М. М. Постников, «Устойчивые многочлены» (М.: «Наука», 1981). Мы вернемся к проблеме Рауса — Гурвица в § 36, 5.

## § 24. Случай чисто мнимых собственных чисел

Линейные уравнения без чисто мнимых собственных чисел детально исследованы в §§ 21, 22. Их фазовые кривые ведут себя достаточно просто (седло, § 22, п. 8).

Линейные уравнения с чисто мнимыми собственными числами доставят нам примеры более сложного поведения фазовых кривых.

Такие уравнения встречаются, например, в теории колебаний консервативных систем (см. § 25, п. 6).

**1. Топологическая классификация.** Пусть все собственные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ линейного уравнения

$$\dot{x} = Ax, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \ A\colon \ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

чисто мнимы.

В каких случаях два уравнения вида (1) топологически эквивалентны?

Задача 1. Докажите, что в случае плоскости ($n=2$, $\lambda_{1,2} = \pm i\omega \neq 0$) для топологической эквивалентности двух уравнений вида (1) необходима и достаточна алгебраическая эквивалентность, т. е. одинаковость собственных чисел.

В настоящее время аналогичный результат доказан и при $n > 2$.

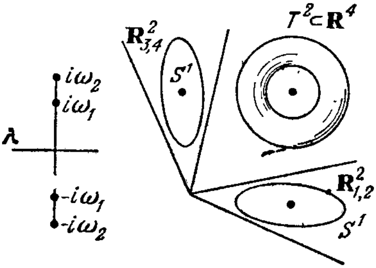


Рис. 171. Фазовое пространство системы (2).

**2. Пример.** Рассмотрим уравнение в $\mathbf{R}^4$

$$\left\{\begin{array}{ll} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, & \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, & \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1, \\ \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, & \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, & \lambda_{3,4} = \pm i\omega_2. \end{array}\right. \tag{2}$$

Пространство $\mathbf{R}^4$ распадается в прямую сумму двух инвариантных плоскостей (рис. 171):

$$\mathbf{R}^4 = \mathbf{R}_{1,2} + \mathbf{R}_{3,4}.$$

Система (2) распадается на две независимые:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1, \end{cases} \quad (x_1, x_2) \in \mathbf{R}_{1,2},$$
$$\begin{cases} \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3, \end{cases} \quad (x_3, x_4) \in \mathbf{R}_{3,4}. \tag{3}$$

В каждой из плоскостей фазовые кривые — окружности

$$S^1 = \{ x \in \mathbf{R}_{1,2}\colon\ x_1^2 + x_2^2 = C > 0 \}$$

или точки ($C = 0$), и фазовый поток состоит из вращений (на угол $\omega_1 t$ и $\omega_2 t$ соответственно).

Каждая фазовая кривая уравнения (2) принадлежит прямому произведению фазовых кривых на плоскостях $\mathbf{R}_{1,2}$ и $\mathbf{R}_{3,4}$. Пусть эти две кривые — окружности.

Прямое произведение двух окружностей

$$T^2 = S^1 \times S^1 = \{ x \in \mathbf{R}^4\colon\ x_1^2 + x_2^2 = C,\ x_3^2 + x_4^2 = D \}$$

называется *двумерным тором*.

Чтобы лучше представить себе тор $T^2$, можно поступить следующим образом. Рассмотрим в $\mathbf{R}^3$ поверхность баранки (рис. 172), полученную при вращении окружности вокруг лежащей в ее плоскости

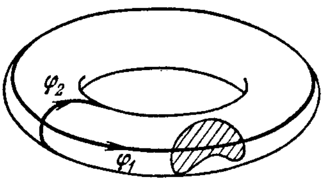


Рис. 172. Тор.

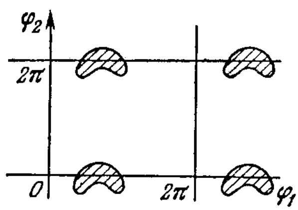


Рис. 173. Карта тора.

и не пересекающей ее оси. Точка такой поверхности задается двумя угловыми координатами $\varphi_1$, $\varphi_2 \bmod 2\pi$. Координаты $\varphi_1$ и $\varphi_2$ задают диффеоморфизм поверхности баранки и прямого произведения $T^2$ двух окружностей.

Координаты $\varphi_1$ и $\varphi_2$ можно назвать *долготой* и *широтой*. Карту тора $T^2$ (см. рис. 173) можно изобразить на квадрате $0 \leqslant \varphi_1 \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$ плоскости $(\varphi_1, \varphi_2)$, «склеив» точки $(\varphi_1, 0)$ и $(\varphi_1, 2\pi)$ и $(0, \varphi_2)$ и $(2\pi, \varphi_2)$. Можно также считать картой всю плоскость $(\varphi_1, \varphi_2)$, но тогда каждая точка тора будет иметь бесконечное число изображений на карте (подобно двум изображениям Чукотки на карте полушарий).

Фазовый поток уравнения (2) оставляет тор $T^2 \subset \mathbf{R}^4$ на месте. Фазовые кривые уравнения (2) лежат на поверхности $T^2$. Если $\varphi_1$ полярный угол плоскости $\mathbf{R}_{1,2}$, отсчитываемый от орта $x_2$ к орту $x_1$, то согласно (3) $\dot\varphi_1=\omega_1$. Аналогично, отсчитывая $\varphi_2$ от $x_4$ к $x_3$, получаем $\dot\varphi_2=\omega_2$. Итак:

*Фазовые траектории потока* (2) *на поверхности* $T^2$ *удовлетворяют дифференциальному уравнению*

$$\dot\varphi_1=\omega_1, \qquad \dot\varphi_2=\omega_2. \tag{4}$$

Широта и долгота фазовой точки меняются равномерно, и на карте тора движение изображается прямой линией, а на поверхности баранки получается «обмотка» (рис. 174).

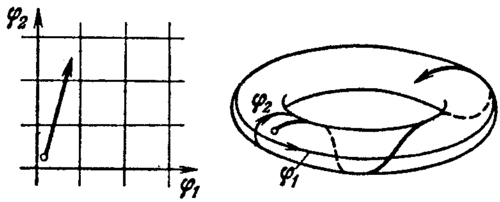


Рис. 174. Обмотка тора.

**3. Фазовые кривые уравнения (4) на торе.** Числа $\omega_1$, $\omega_2$ называются *рационально независимыми*, если из $k_1\omega_1+k_2\omega_2=0$ с целыми $k_1$ и $k_2$

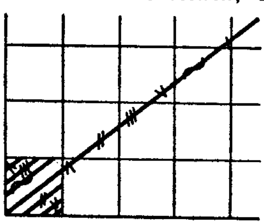

Рис. 175. Всюду плотная кривая на торе.

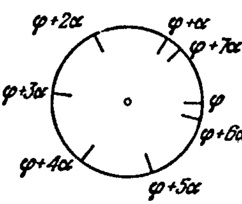


Рис. 176. Образы точки окружности при повторении поворота на угол $\alpha$.

следует $k_1=k_2=0$. Например, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$ рационально зависимы, а $\sqrt{6}$ и $\sqrt{8}$ нет.

Теорема. *Если* $\omega_1$ *и* $\omega_2$ *рационально зависимы, то всякая фазовая кривая уравнения* (4) *на торе замкнута. Если же* $\omega_1$ *и* $\omega_2$ *рационально независимы, то всякая фазовая кривая уравнения* (4) *всюду плотна* *) *на торе* $T^2$ (рис. 175).

Иными словами.

Если в каждой клетке бесконечной шахматной доски сидит одинаковый (и одинаково расположенный) заяц, и охотник стреляет по направлению с иррациональным тангенсом угла наклона к линиям доски, то он попадет хоть в одного зайца. (Ясно, что если тангенс угла наклона рационален, то достаточно малых зайцев можно расположить так, что охотник промахнется.)

Лемма. *Рассмотрим поворот окружности* $S^1$ *на угол* $\alpha$, *несоизмеримый с* $2\pi$ (рис. 176). *Тогда образы любой точки на окружности*

*) Множество $A$ всюду плотно в пространстве $B$, если в сколь угодно малой окрестности любой точки пространства $B$ есть точка множества $A$.

*при повторении поворота*

$$\varphi, \quad \varphi+\alpha, \quad \varphi+2\alpha, \quad \varphi+3\alpha, \quad \ldots \quad (\operatorname{mod} 2\pi)$$

*образуют множество, всюду плотное на окружности.*

Доказательство можно извлечь из строения замкнутых подгрупп прямой (см. § 9). Мы проведем его заново.

Принцип ящиков Дирихле. *Если в $k$ ящиках лежит $k+1$ предмет, то хотя бы в одном ящике больше одного предмета.*

Разделим окружность на $k$ равных полуинтервалов длины $2\pi/k$. По принципу ящиков среди первых $k+1$ точек нашей последовательности есть 2 точки в одном полуинтервале. Пусть это точки $\varphi+p\alpha$ и $\varphi+q\alpha$, $p>q$. Рассмотрим $s=p-q$. Угол поворота $s\alpha$ отличается от кратного $2\pi$ меньше чем на $2\pi/k$. В последовательности точек $\varphi$, $\varphi+s\alpha$, $\varphi+2s\alpha$, $\varphi+3s\alpha$, ... $(\operatorname{mod} 2\pi)$ (рис. 177) каждые две соседние точки отстоят на одинаковое расстояние, меньшее чем $2\pi/k$. Пусть

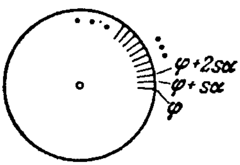


Рис. 177. Точки $\varphi+Ns\alpha$.

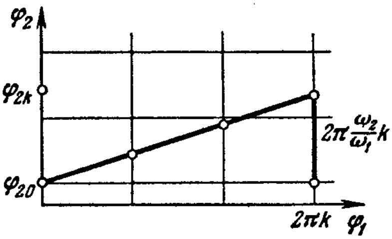


Рис. 178. Редукция теоремы к лемме.

дано $\varepsilon>0$. Выбрав $k$ достаточно большим, мы можем сделать $2\pi/k<\varepsilon$. В любой $\varepsilon$-окрестности любой точки $S^1$ есть точки последовательности

$$\varphi+N s\alpha \quad (\operatorname{mod} 2\pi).$$

Лемма доказана.

Замечание. Мы не использовали несоизмеримость $\alpha$ с $2\pi$. Между тем очевидно, что при $\alpha$, соизмеримом с $2\pi$, лемма неверна.

Задача 1. Найти и восполнить пробел в доказательстве леммы.

Доказательство теоремы. Решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi_1(t)=\varphi_1(0)+\omega_1 t, \qquad \varphi_2(t)=\varphi_2(0)+\omega_2 t. \tag{5}$$

Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ рационально зависимы: $k_1\omega_1+k_2\omega_2=0$, $k_1^2+k_2^2\neq 0$. Уравнения относительно $T$

$$\omega_1 T=2\pi k_2, \qquad \omega_2 T=-2\pi k_1$$

совместны. Их решение $T$ и является периодом замкнутой фазовой кривой (5).

Пусть $\omega_1$ и $\omega_2$ рационально независимы. Тогда $\omega_1/\omega_2$ — иррациональное число. Рассмотрим последовательные точки пересечения фазовой кривой (5) с меридианом $\varphi_1=0$ $(\operatorname{mod} 2\pi)$ (рис. 178). Широты этих точек будут

$$\varphi_{2,k}=\varphi_{2,0}+2\pi\frac{\omega_2}{\omega_1}k \qquad (\mathrm{mod}\ 2\pi).$$

По лемме множество точек пересечения всюду плотно на меридиане. Заметим, что прямые, проведенные из точек множества, всюду плотного на прямой, лежащей в плоскости, по направлению, не совпадающему с направлением этой прямой, образуют всюду плотное множество на плоскости. Поэтому изображение

$$\tilde{\varphi}_1(t)=\varphi_1(t)-2\pi\left[\frac{\varphi_1(t)}{2\pi}\right], \qquad \tilde{\varphi}_2(t)=\varphi_2(t)-2\pi\left[\frac{\varphi_2(t)}{2\pi}\right]$$

фазовой кривой (5) на квадрате $0\leqslant\tilde{\varphi}_1<2\pi$, $0\leqslant\tilde{\varphi}_2<2\pi$ всюду плотно. Итак, фазовая кривая уравнения (4) (и, значит, уравнения (2)) всюду плотна на торе.

**4. Следствия.** Ряд простых следствий доказанной теоремы выходит за рамки теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

З а д а ч а 1. Рассмотрим последовательность первых цифр степени двойки:

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, 4, 8, ...

Встретится ли в этой последовательности 7? Вообще, с любой ли комбинации цифр начинается $2^n$?

З а д а ч а 2. Докажите, что $\sup\limits_{0<t<\infty} \cos t+\sin\sqrt{2}\,t=2.$

З а д а ч а 3. Рассмотрим группу $S^1$ комплексных чисел, по модулю равных 1. Найти все ее замкнутые подгруппы.

*Ответ.* 1, $S^1$, $\left\{\sqrt[n]{1}\right\}$.

**5. Многомерный случай.** Пусть собственные числа уравнения (1) в $\mathbf{R}^{2m}$ просты и имеют вид

$$\lambda=\pm i\omega_1,\ \pm i\omega_2,\ \ldots,\ \pm i\omega_m.$$

Рассуждая, как в примере п. 2, мы покажем, что фазовые кривые лежат на $m$-мерном торе

$$T^m=S^1\times\ldots\times S^1=$$
$$=\{(\varphi_1,\ldots,\varphi_m)\,\mathrm{mod}\ 2\pi\}\cong\mathbf{R}^m/\mathbf{Z}^m$$

и удовлетворяют уравнениям $\dot{\varphi}_1=\omega_1$, $\dot{\varphi}_2=\omega_2$, ... ..., $\dot{\varphi}_m=\omega_m$. Числа $\omega_1,\ldots,\omega_m$ рационально независимы, если при целых $k$

$$(k_1\omega_1+\ldots+k_m\omega_m=0)\Rightarrow(k_1=\ldots=k_m=0).$$

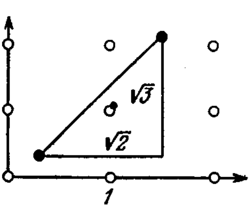


Рис. 179. Фазовая кривая системы $\dot{\varphi}_1=1$, $\dot{\varphi}_2=\sqrt{2}$, $\dot{\varphi}_3=\sqrt{3}$ всюду плотна на трехмерном торе.

З а д а ч а* 1. Доказать, что если частоты $\omega_1,\ldots,\omega_m$ рационально независимы, то каждая фазовая кривая уравнения (1), лежащая на торе $T^m$, всюду плотна на нем.

С л е д с т в и е. *Пусть конь прыгает скачками* ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$) *по полю* (рис. 179), *где квадратно-гнездовым способом посеяна кукуруза. Тогда он обязательно сшибет хоть один росток.*

**6. Равномерное распределение.** Всюду плотные кривые, рассмотренные выше, обладают замечательным свойством равномерно распределяться по поверхности торов. Сформулируем соответствующую теорему в простейшем случае. Рассмотрим последовательность точек $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ на окружности $S^1 = \{\varphi \bmod 2\pi\}$. Последовательность называется *равномерно распределенной*, если для любой дуги $\Delta \subset S^1$ число $N(\Delta, k)$ точек длинного отрезка последовательности $(\varphi_1, \ldots, \varphi_k)$ в $\Delta$ асимптотически пропорционально длине $\Delta$:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N(\Delta, k)}{k} = \frac{|\Delta|}{2\pi}.$$

Задача* 1. Доказать, что последовательность $\varphi, \varphi+\alpha, \varphi+2\alpha, \ldots$, где $\alpha$ — угол, несоизмеримый с $2\pi$, равномерно распределена на $S^1$.

Следствие. *Числа* $2^n$ *чаще начинаются с 7, чем с 8. Если* $N_7(k)$ *и* $N_8(k)$ — *количества чисел* $(1, 2, 4, \ldots, 2^k)$, *начинающихся с 7 и 8 соответственно, то существует* $\lim\limits_{k\to\infty} (N_7(k)/N_8(k))$.

Задача 2. Найти этот предел и убедиться, что он больше 1.

Замечание. Начальный отрезок последовательности (см. п. 4) указывает, кажется, на то, что семерок меньше. Это связано с тем, что иррациональное число $\lg 2 = 0{,}3010\ldots$ очень близко к рациональному числу 3/10 *).

## § 25. Случай кратных собственных чисел

Решение линейного уравнения с постоянными коэффициентами сводится к вычислению матрицы $e^{At}$. Если собственные числа матрицы $A$ попарно различны, то явный вид матрицы $e^{At}$ указан в § 19, п. 5 и § 20, п. 6. Чтобы найти явный вид матрицы $e^{At}$ в случае кратных собственных чисел, мы воспользуемся жордановой нормальной формой.

**1. Вычисление $e^{At}$, где $A$ — жорданова клетка.** Один из способов вычисления $e^{At}$, где $A$ — жорданова клетка:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n,$$

указан в § 14: $A$ есть матрица оператора дифференцирования в базисе

$$e_k = t^k e^{\lambda_k t}/k!, \qquad 0 \leqslant k < n,$$

пространства квазимногочленов степени меньше $n$ с показателем $\lambda$. По формуле Тейлора $e^{As}$ есть матрица оператора сдвига $f(\cdot) \mapsto f(\cdot + s)$ в том же базисе.

Другой способ основан на следующей лемме:

Лемма. *Пусть $A$ и $B$ — линейные операторы из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$. Если они коммутируют, то* $e^{A+B} = e^A e^B$.

---

*) Первые цифры степеней тройки и населений стран мира распределены по тому же закону.

Доказательство. Сравним формальные ряды

$$e^Ae^B=\left(E+A+\frac{A^2}{2}+\ldots\right)\left(E+B+\frac{B^2}{2}+\ldots\right)=$$
$$=E+(A+B)+\frac{1}{2}(A^2+2AB+B^2)+\ldots,$$
$$e^{A+B}=E+(A+B)+\frac{1}{2}(A+B)^2+\ldots=$$
$$=E+(A+B)+\frac{1}{2}(A^2+AB+BA+B^2)+\ldots$$

Если $AB=BA$, то ряды совпадают (так как $e^{x+y}=e^xe^y$ для чисел). Поскольку ряды абсолютно сходятся, $e^{A+B}=e^Ae^B$, что и требовалось.

Представим $A$ в виде $A=\lambda E+\Delta$, где $\Delta$ — нильпотентная жорданова клетка:

$$\Delta=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\lambda E$ коммутирует с любым оператором, то $e^{At}=e^{t(\lambda E+\Delta)}=e^{\lambda t}e^{\Delta t}$. Вычислим матрицу

$$e^{\Delta t}=E+\Delta t+\frac{\Delta^2t^2}{2}+\ldots+\frac{\Delta^{n-1}t^{n-1}}{(n-1)!}\qquad(\Delta^n=0).$$

Заметим, что $\Delta$ действует на базис $\boldsymbol{e}_1,\ldots,\boldsymbol{e}_n$ как сдвиг: $0\leftarrowtail\boldsymbol{e}_1\leftarrowtail\boldsymbol{e}_2\leftarrowtail\ldots$ $\ldots\leftarrowtail\boldsymbol{e}_n$. Поэтому $\Delta^k$ действует как сдвиг на $k$ мест и имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 0\ldots0 & \ddots & \\ & & 1 \\ & \cdot & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

Итак, доказана

Теорема.

$$e^{\Delta t}=\begin{Bmatrix} 1 & t & t^2/2 & \ldots & t^{n-1}/(n-1)! \\ & 1 & t & \ldots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & t^2/2 \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{Bmatrix},$$

$$e^{At}=\begin{Bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & \ldots & t^{n-1}e^{\lambda t}/(n-1)! \\ & e^{\lambda t} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & te^{\lambda t} \\ & & & e^{\lambda t} \end{Bmatrix}. \qquad (1)$$

Наши вычисления проходят без изменений в комплексном случае ($\lambda\in\mathbf{C}$, $A$: $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$).

**2. Приложения.** Из формулы (1) непосредственно вытекают:

Следствие 1. *Пусть $A$: $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$ — линейный оператор, $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — собственные числа, $\nu_1, \ldots, \nu_k$ — их кратности, $t\in\mathbf{R}$. Тогда каждый элемент матрицы $e^{At}$ (в любом фиксированном базисе) является суммой квазимногочленов от $t$ с показателями $\lambda_l$ степеней меньше $\nu_l$ соответственно ($l=1, \ldots, k$).*

Доказательство. Рассмотрим матрицу оператора $e^{At}$ в базисе, в котором матрица $A$ имеет жорданову форму. Наше утверждение тогда следует из (1). Элементы матрицы оператора $e^{At}$ в любом другом базисе являются линейными комбинациями (с постоянными коэффициентами) элементов матрицы оператора $e^{At}$ в указанном базисе.

Следствие 2. *Пусть $\varphi$ — решение дифференциального уравнения $\dot{x}=Ax$, $x\in\mathbf{C}^n$, $A$: $\mathbf{C}^n\to\mathbf{C}^n$. Тогда каждая компонента вектора $\varphi$ (в любом фиксированном базисе) является суммой квазимногочленов от $t$ с показателями $\lambda_l$ степеней меньше $\nu_l$ соответственно: $\varphi_j(t)=\sum\limits_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t}p_{j,l}(t)$, где $p_{j,l}$ — многочлен степени $<\nu_l$.*

Действительно, $\varphi(t)=e^{At}\varphi(0)$.

Следствие 3. *Пусть $A$: $\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — линейный оператор, $\lambda_l$ $(1\leqslant l<k)$ — его вещественные собственные числа, $\nu_l$ — их кратности, $\alpha_l\pm i\omega_l$ $(1\leqslant l\leqslant m)$ — комплексные собственные числа, $\mu_l$ — их кратности. Тогда каждый элемент матрицы $e^{At}$ и каждая компонента решения уравнения $\dot{x}=Ax$, $x\in\mathbf{R}^n$, является суммой комплексных квазимногочленов с показателями $\lambda_l$, $\alpha_l\pm i\omega_l$ степеней меньше $\nu_l$, $\mu_l$ соответственно.*

Такую сумму можно записать также в менее удобном виде:

$$\varphi_j(t)=\sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t}p_{j,l}+\sum_{l=1}^{m} e^{\alpha_l t}[q_{j,l}(t)\cos\omega_l t+r_{j,l}(t)\sin\omega_l t],$$

где $p$, $q$, $r$ — многочлены с *вещественными* коэффициентами степеней меньше $\nu_l$, $\mu_l$, $\mu_l$ соответственно.

Действительно, если $z=x+iy$, $\lambda=\alpha+i\omega$, то

$$\operatorname{Re} ze^{\lambda t}=\operatorname{Re} e^{\alpha t}(x+iy)(\cos\omega t+i\sin\omega t)=e^{\alpha t}(x\cos\omega t-y\sin\omega t).$$

Между прочим, из этих формул видно, что если вещественные части всех собственных чисел отрицательны, то все решения стремятся к 0 при $t\to+\infty$ (как это и должно быть согласно §§ 22, 23).

**3. Применения к системам уравнений выше первого порядка.** Записав систему в виде системы уравнений первого порядка, мы сведем задачу к рассмотренной выше и можем ее решить, приведя матрицу к жордановой форме. Практически часто удобнее поступать иначе. Прежде всего, собственные числа эквивалентной системы первого порядка можно найти, не выписывая ее матрицы.

Действительно, собственному числу $\lambda$ отвечает собственный вектор и, значит, решение $\varphi(t)=e^{\lambda t}\varphi(0)$ эквивалентной системы первого порядка. Но тогда и исходная система имеет решение вида $\psi(t)=e^{\lambda t}\psi(0)$. Подставим в исходную систему $\psi=e^{\lambda t}\xi$. Система допускает такое решение (ненулевое), если и только если $\lambda$ удовлетворяет алгебраическому уравнению, из которого мы и можем найти собственные числа $\lambda_l$.

Сами решения можно затем искать в виде сумм квазимногочленов с показателями $\lambda_l$ и с неопределенными коэффициентами.

Пример 1. $\overset{....}{x} = x$.

Подставляем $x = e^{\lambda t}\xi$. Находим $\lambda^4 e^{\lambda t}\xi = e^{\lambda t}\xi$, $\lambda^4 = 1$, $\lambda_{1,2,3,4} = 1, -1, i, -i$.

Всякое решение нашего уравнения имеет вид

$$x = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t.$$

Пример 2. $\ddot{x}_1 = x_2$, $\ddot{x}_2 = x_1$.

Подставляем $x = e^{\lambda t}\xi$. Находим $\lambda^2\xi_1 = \xi_2$, $\lambda^2\xi_2 = \xi_1$. Эта система линейных уравнений относительно $\xi_1$, $\xi_2$ имеет нетривиальное решение, если и только если $\lambda^4 = 1$. Всякое решение нашей системы имеет вид

$$x_1 = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t, \qquad x_2 = D_1 e^t + D_2 e^{-t} + D_3 \cos t + D_4 \sin t.$$

Подстановка в систему дает $D_1 = C_1$, $D_2 = C_2$, $D_3 = -C_3$, $D_4 = -C_4$.

Пример 3. $x^{\mathrm{IV}} - 2\ddot{x} + x = 0$.

Подставляем $x = e^{\lambda t}\xi$. Находим

$$\lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = 0, \qquad \lambda^2 = 1, \qquad \lambda_{1,2,3,4} = 1,\ 1,\ -1,\ -1.$$

Всякое решение исходного уравнения имеет вид

$$(C_1 t + C_2) e^{\lambda t} + (C_3 t + C_4) e^{-\lambda t}.$$

Задача 1. Найти жорданову нормальную форму матрицы четвертого порядка, соответствующей нашему уравнению.

**4. Случай одного уравнения $n$-го порядка.** Заметим, что кратности собственных чисел, вообще говоря, не определяют размеров жордановых клеток. Положение упрощается, если речь идет о линейном операторе $A$, соответствующем одному дифференциальному уравнению $n$-го порядка:

$$x^{(n)} = a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x, \qquad a_k \in \mathbf{C}. \tag{2}$$

Из следствия 2 п. 2 вытекает

Следствие 4. *Всякое решение уравнения* (2) *имеет вид*

$$\varphi(t) = \sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t} p_l(t), \tag{3}$$

*где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — корни характеристического уравнения*

$$\lambda^n = a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{4}$$

*а $p_l$ — многочлен степени меньше $\nu_l$ (где $\nu_l$ — кратность корня $\lambda_l$).*

Действительно, уравнение (2) имеет решение вида $e^{\lambda t}(\xi)$, если и только если $\lambda$ — корень уравнения (4). Следствие (4) доказано.

Перейдем к эквивалентной системе уравнений первого порядка:

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ a_n & & & \ldots & a_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Получаем

Следствие 5. *Если оператор $A$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ имеет матрицу вида* (5) *то каждому его собственному числу $\lambda$ отвечает ровно одна жорданова клетка, размер которой равен кратности $\lambda$.*

Действительно, согласно формуле (3) каждому собственному числу $\lambda$ отвечает одно собственное направление. В самом деле, пусть $\xi$ — собственный вектор оператора $A$. Тогда среди решений вида (3) имеется первая компонента $e^{\lambda t}\xi_0$ вектора $e^{\lambda t}\xi$. Но тогда остальные компоненты — это производные: $\xi_k = \lambda^k \xi_0$. Поэтому число $\lambda$ определяет направление вектора $\xi$ однозначно.

Поскольку каждой жордановой клетке соответствует свое собственное направление, следствие 5 доказано.

Задача 1. Всякая ли линейная комбинация квазимногочленов (3) является решением уравнения (2)?

**5. О возвратных последовательностях.** Наше исследование экспоненты с непрерывным показателем $e^{tA}$ легко перенести на экспоненту с дискретным показателем $A^n$. Мы можем, в частности, исследовать теперь любую возвратную (= рекуррентную) последовательность, определенную соотношением

$$x_n = a_1 x_{n-1} + \ldots + a_k x_{n-k} \tag{6}$$

(например, последовательность 0, 1, 2, 5, 12, 29, ..., заданную соотношением $x_n = 2x_{n-1} + x_{n-2}$ и начальным условием $x_0 = 0$, $x_1 = 1$).

Следствие 6. *$n$-й член возвратной последовательности зависит от $n$ как сумма квазимногочленов от $n$:*

$$x_n = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l^n p_l(n),$$

*где $\lambda_l$ — собственные числа матрицы $A$, соответствующей последовательности, а $p_l$ — многочлен степени меньше $\nu_l$ (где $\nu_l$ — кратность $\lambda_l$).*

Вспомним, что матрица $A$ — это матрица оператора $A$: $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$, переводящего отрезок длины $k$ из нашей последовательности, $\xi_{n-1} = (x_{n-k}, \ldots, x_{n-1})$, в следующий отрезок длины $k$, $\xi_n = (x_{n-k+1}, \ldots, x_n)$:

$$A\xi_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ a_k & \ldots & & a_2 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-k} \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{n-k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \xi_n.$$

Важно заметить, что оператор $A$ не зависит от $n$. Поэтому $x_n$ есть одна из компонент вектора $A^n\xi$, где $\xi$ — постоянный вектор. Матрица $A$ имеет вид (5). Пользуясь следствием 5 и приводя $A$ к жордановой форме, получаем следствие 6.

При вычислениях нет нужды ни выписывать матрицу, ни приводить ее к нормальной форме. Собственный вектор оператора $A$ соответствует решению уравнения (6) вида $x = \lambda^n$. Подставляя в уравнение (6), находим для $\lambda$ уравнение

$$\lambda^k = a_1 \lambda^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Легко убедиться, что это и есть характеристическое уравнение оператора $A$.

Пример 1. Для последовательности 0, 1, 2, 5, 12, 29, ... ($x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}$) находим $\lambda^2=2\lambda+1$, $\lambda_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$. Поэтому соотношению $x_n=2x_{n-1}+x_{n-2}$ удовлетворяют последовательности $x_n=(1+\sqrt{2})^n$, $x_n=(1-\sqrt{2})^n$, а также любые их линейные комбинации (и только они)

$$x_n=c_1(1+\sqrt{2})^n+c_2(1-\sqrt{2})^n.$$

Среди этих комбинаций легко подобрать такую, для которой $x_0=0$, $x_1=1$: $c_1+c_2=0$, $\sqrt{2}(c_1-c_2)=1$.

*Ответ.* $x_n=[(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n]/(2\sqrt{2})$.

Замечание. При $n\to+\infty$ первое слагаемое экспоненциально растет, а второе экспоненциально убывает. Поэтому при больших $n$

$$x_n\approx(1+\sqrt{2})^n/(2\sqrt{2})$$

и, в частности, $x_{n+1}/x_n\approx1+\sqrt{2}$. Отсюда мы находим для $\sqrt{2}$ очень хорошие приближения: $\sqrt{2}\approx(x_{n+1}-x_n)/x_n$. Подставляя $x_n=0, 1, 2, 5, 12, 29, \ldots$, находим

$$\sqrt{2}\approx(1-0)/1=1;\qquad \sqrt{2}\approx(5-2)/2=1{,}5;$$
$$\sqrt{2}\approx(12-5)/5=1{,}4;\qquad \sqrt{2}\approx(29-12)/12=17/12\approx1{,}417\ldots$$

Это те самые приближения, с помощью которых вычисляли $\sqrt{2}$ в древности; их можно получить также разложением $\sqrt{2}$ в цепную дробь. Далее, $(x_{n+1}-x_n)/x_n$ является наилучшим среди всех рациональных приближений к $\sqrt{2}$ со знаменателями, не превосходящими $x_n$.

**6. Малые колебания.** Мы рассмотрели выше случай, когда каждому корню характеристического уравнения, какова бы ни была его кратность, соответствует один собственный вектор: случай одного уравнения $n$-го порядка. Существует в некотором смысле противоположный случай, когда каждому корню соответствует столько собственных чисел, какова кратность корня. Это — случай малых колебаний консервативной механической системы.

Рассмотрим в *евклидовом* пространстве $\mathbf{R}^n$ квадратичную форму $U$, заданную симметрическим оператором $A$:

$$U(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2}(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}),\qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n,\qquad A\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\qquad A'=A.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение *)

$$\ddot{\boldsymbol{x}}=-\operatorname{\mathbf{grad}} U \tag{7}$$

($U$ — потенциальная энергия).

При исследовании уравнения (7) полезно представлять себе шарик, катающийся по графику потенциальной энергии (ср. § 12).

Уравнение (7) можно записать в виде $\ddot{\boldsymbol{x}}=-A\boldsymbol{x}$ или в координатной записи в виде системы $n$ линейных уравнений второго порядка. По общему правилу ищем решение $\varphi=e^{\lambda t}\xi$ и находим

$$\lambda^2e^{\lambda t}\xi=-Ae^{\lambda t}\xi,\qquad (A+\lambda^2E)\xi=0,\qquad \det|A+\lambda^2E|=0.$$

---

*) Векторное поле $\operatorname{\mathbf{grad}} U$ определяется условием «$dU(\xi)=(\operatorname{\mathbf{grad}} U, \xi)$ для всякого вектора $\xi\in T\mathbf{R}^n_x$». Здесь круглые скобки означают евклидово скалярное произведение. В декартовых координатах (ортонормированных) векторное поле $\operatorname{\mathbf{grad}} U$ задается компонентами $\left(\frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial U}{\partial x_n}\right)$.

Отсюда находим $n$ вещественных (почему?) значений $\lambda^2$ и $2n$ значений $\lambda$.

Если все они различны, то всякое решение уравнения (7) есть линейная комбинация экспонент. Если же имеются кратные корни, возникает вопрос о жордановых клетках.

Теорема. *Если квадратичная форма $U$ невырождена, то каждому собственному значению $\lambda$ соответствует столько линейно независимых собственных векторов, какова его кратность, так что каждое решение уравнения* (7) *можно записать в виде суммы экспонент* *): $\varphi(t) = \sum_{k=1}^{2n} e^{\lambda_k t}\xi_k$, $\xi_k \in \mathbf{C}^n$.

Доказательство. Ортогональным преобразованием можно привести форму $U$ к *главным осям*: существует ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, в котором $U$ записывается в виде

$$U(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k x_k^2, \quad \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + x_n\boldsymbol{e}_n.$$

Невырожденность формы $U$ означает, что ни одно из чисел $a_k$ не равно 0. В выбранных координатах уравнение (7) принимает вид

$$\ddot{x}_1 = -a_1x_1, \quad \ddot{x}_2 = -a_2x_2, \; \ldots, \; \ddot{x}_n = -a_nx_n$$

независимо от того, есть ли кратные корни **). Наша система распалась в прямое произведение $n$ «уравнений маятника». Каждое из них ($\ddot{x} = -ax$) мгновенно решается.

Если $a > 0$, то $a = \omega^2$ и

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Если $a < 0$, то $a = -\alpha^2$ и

$$x = C_1 \operatorname{ch} \alpha t + C_2 \operatorname{sh} \alpha t = D_1 e^{\alpha t} + D_2 e^{-\alpha t}.$$

Эти формулы содержат, в частности, утверждение теоремы.

Если форма $U$ положительно определенная, то все $a_k$ положительны и точка $\boldsymbol{x}$ совершает $n$ независимых колебаний по $n$ взаимно перпендикулярным направлениям $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ (рис. 180). Эти колебания называются *главными* или *собственными*, а числа $\omega_k$ — *собственными частотами*. Они удовлетворяют уравнению $\det|A - \omega^2E| = 0$.

Траектория точки $\boldsymbol{x} = \varphi(t)$ в $\mathbf{R}^n$ (где $\varphi$ — решение уравнения (7)) лежит в параллелепипеде $|x_k| \leqslant X_k$, где $X_k$ — амплитуда $k$-го собственного колебания. В частности при $n = 2$ — в прямоугольнике.

---

*) Интересно отметить, что Лагранж, впервые исследовавший уравнение малых колебаний (7), вначале ошибся. Он думал, что в случае кратных корней потребуются «вековые» слагаемые вида $te^{\lambda t}$ (в вещественном случае $t \sin \omega t$), как в пп. 2, 4, 5 выше.

**) Заметим, что мы существенно используем ортонормированность базиса $\boldsymbol{e}_k$: если бы базис не был ортонормированным, то компоненты вектора $\operatorname{grad} \frac{1}{2}\sum a_k x_k^2$ *не были бы равны* $a_k x_k$.

Если частоты $\omega_1$ и $\omega_2$ соизмеримы, то траектория — замкнутая кривая. Она называется в этом случае *кривой Лиссажу* (рис. 181).

Если же $\omega_1$ и $\omega_2$ несоизмеримы, то траектория заполняет прямоугольник всюду плотно. Это вытекает из теоремы § 24.

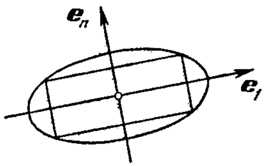


Рис. 180. Направления собственных колебаний и линии уровня потенциальной энергии.

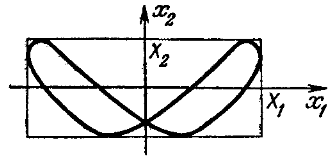


Рис. 181. Одна из кривых Лиссажу с $\omega_2=2\omega_1$.

Задача 1. Нарисовать кривые Лиссажу для $\omega_1=1$, $\omega_2=3$ и $\omega_1=2$, $\omega_2=3$.

Задача 2. Доказать, что среди кривых Лиссажу с $\omega_2=n\omega_1$ есть график многочлена степени $n$. Этот многочлен называется *многочленом Чебышева*,

$$T_n(x)=\cos n \arccos x.$$

Задача 3. Как выглядят траектории $x=\varphi(t)$ в случае $U=x_1^2-x_2^2$?

Задача 4. При каких $U$ положение равновесия $x=\dot{x}=0$ уравнения (7) устойчиво а) по Ляпунову? б) асимптотически?

## § 26. О квазимногочленах

При решении линейных уравнений с постоянными коэффициентами нам все время встречались квазимногочлены. Мы выясним теперь причину этого явления и дадим ему некоторые новые приложения.

**1. Линейное пространство функций.** Рассмотрим множество $F$ всех бесконечно дифференцируемых функций на вещественной оси $\mathbf{R}$ с комплексными значениями.

Множество $F$ имеет естественную структуру комплексного линейного пространства: если $f_1$ и $f_2$ — функции из $F$, то функция $c_1f_1+c_2f_2$ ($c_1$, $c_2$ — константы из $\mathbf{C}$) также принадлежит $F$.

Определение. Функции $f_1, \ldots, f_n \in F$ называются *линейно независимыми*, если они линейно независимы как векторы линейного пространства $F$, т. е. если

$$(c_1f_1+\ldots+c_nf_n\equiv 0)\Rightarrow(c_1=\ldots=c_n=0),$$

где $c_1, \ldots, c_n\in\mathbf{C}$.

Задача 1. При каких $\alpha$, $\beta$ функции $\sin\alpha t$ и $\sin\beta t$ линейно зависимы?

Задача 2. Доказать, что функции $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ линейно независимы, если все $\lambda_k$ попарно различны.

Указание. Это вытекает из существования линейного уравнения $n$-го порядка с решениями $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ (см. п. 2).

Среди элементов пространства $F$ имеются квазимногочлены с показателем $\lambda$ $f(t)=e^{\lambda t}\sum\limits_{k=0}^{\nu-1}c_kt^k$ и более общим образом, конечные суммы квазимногочленов с разными показателями

$$f(t)=\sum_{l=1}^{k} e^{\lambda_l t}\sum_{m=0}^{\nu_l-1} c_{l,m}t^m, \qquad \lambda_i\neq\lambda_j. \tag{1}$$

Задача 3. Докажите, что каждая функция вида (1) записывается в виде суммы (1) единственным образом. Иначе говоря:

*Если сумма* (1) *равна* 0, *то каждый коэффициент* $c_{l,m}$ *равен* 0.

Указание. Одно из возможных решений см. в п. 2 (следствие на стр. 187).

**2. Линейное пространство решений линейного уравнения.**

Теорема. *Множество $X$ всех решений линейного уравнения*

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=0 \tag{2}$$

*составляет в $F$ линейное подпространство конечной размерности $n$.*

Доказательство. Рассмотрим оператор $D$: $F\to F$, переводящий каждую функцию в ее производную. Оператор $D$ линеен:

$$D(c_1f_1+c_2f_2)=c_1Df_1+c_2Df_2.$$

Рассмотрим многочлен от оператора $D$:

$$A=a(D)=D^n+a_1D^{n-1}+\ldots+a_nE.$$

Оператор $A$ есть линейный оператор $A$: $F\to F$. Решения*) уравнения (2) — это элементы ядра оператора $A$. Итак, $X=\operatorname{Ker} A$.

Но ядро $\operatorname{Ker} A$ линейного оператора является линейным пространством. Поэтому $X$ — линейное пространство. Покажем, что $X$ изоморфно $\mathbf{C}^n$.

Пусть $\varphi\in X$. Сопоставим функции $\varphi$ набор $n$ чисел: набор значений в точке $t=0$ функции $\varphi$ и ее производных $\boldsymbol{\varphi}_0=(\varphi(0),(D\varphi)(0),\ldots$ $\ldots,(D^{n-1}\varphi)(0))$. Получаем отображение

$$B\colon X\to\mathbf{C}^n, \qquad B(\varphi)=\boldsymbol{\varphi}_0,$$

Это отображение линейно. Образ отображения $B$ — это все пространство $\mathbf{C}^n$. Ибо по теореме существования существует решение $\varphi\in X$ с любыми данными начальными условиями $\boldsymbol{\varphi}_0$.

Ядро отображения $B$ нулевое. Ибо по теореме единственности начальные условия $\boldsymbol{\varphi}_0=0$ определяют решение ($\varphi\equiv0$) однозначно. Итак, $B$ — изоморфизм.

Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ — корни характеристического уравнения $a(\lambda)=0$ дифференциального уравнения* (2) *и $\nu_1,\ldots,\nu_k$ — их кратности. Тогда каждое решение уравнения* (2) *единственным образом записывается в виде* (1) *и каждая сумма квазимногочленов вида* (1) *удовлетворяет уравнению* (2).

Доказательство. Формула (1) задает отображение $\Phi$: $\mathbf{C}^n\to F$, сопоставляющее набору $n$ коэффициентов $c_{l,m}$ функцию $f$. Это отобра-

*) Мы заранее знаем, что все решения уравнения (2) бесконечно дифференцируемы, т. е. принадлежат $F$ (см. § 25, 4).

жение линейно. Его образ содержит пространство $X$ решений уравнения (2). Ибо согласно § 25 каждое решение уравнения (2) записывается в виде (†). По теореме размерность пространства $X$ равна $n$.

Линейное отображение пространства $\mathbf{C}^n$ на пространство $X$ такой же размерности есть изоморфизм. Поэтому $\Phi$ осуществляет изоморфизм $\mathbf{C}^n$ и $X$. Это и есть утверждение следствия.

**3. Инвариантность относительно сдвигов.**

Теорема. *Пространство $X$ решений дифференциального уравнения* (2) *инвариантно относительно сдвигов, переводящих функцию $\varphi(t)$ в $\varphi(t+s)$.*

Действительно, сдвиг решения будет решением, как и для всякого автономного уравнения (ср. § 10).

Примеры подпространств пространства $F$, инвариантных относительно сдвигов:

Пример 1. Одномерное пространство $\{ce^{\lambda t}\}$.
Пример 2. Пространство квазимногочленов $\{e^{\lambda t}p_{<n}(t)\}$ размерности $n$.
Пример 3. Плоскость $\{c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t\}$.
Пример 4. Пространство $\{p_{<n}(t)\cos\omega t+q_{<n}(t)\sin\omega t\}$ размерности $2n$.

Можно показать, что всякое конечномерное подпространство пространства $F$, инвариантное относительно сдвигов, есть пространство решений некоторого дифференциального уравнения (2).

Иными словами, такое подпространство всегда распадается в прямую сумму пространств квазимногочленов. Этим и объясняется значение квазимногочленов для теории линейных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если какое-либо уравнение инвариантно относительно какой-либо группы преобразований, то при решении этого уравнения важную роль будут играть пространства функций, инвариантные относительно этой группы. Таким путем в математике возникают различные специальные функции. Например, с группой вращений сферы связаны сферические функции — конечномерные пространства функций на сфере, инвариантные относительно вращений.

Задача* 1. Найти все конечномерные подпространства пространства гладких функций на окружности, инвариантные относительно вращений окружности.

**4. Историческое замечание.** Теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами была создана Эйлером и Лагранжем до того, как была построена жорданова нормальная форма матриц.

Рассуждали они следующим образом. Пусть $\lambda_1$, $\lambda_2$ — два корня характеристического уравнения. Им соответствуют решения $e^{\lambda_1 t}$, $e^{\lambda_2 t}$, на которые в пространстве $F$ натягивается двумерная плоскость $\{c_1e^{\lambda_1 t}+c_2e^{\lambda_2 t}\}$ (рис. 182). Пусть теперь уравнение меняется так, что $\lambda_2$ приближается к $\lambda_1$. Тогда $e^{\lambda_2 t}$ приближается к $e^{\lambda_1 t}$ и при $\lambda_2=\lambda_1$ плоскость вырождается в прямую.

Возникает вопрос: не существует ли предельного положения плоскости, когда $\lambda_2\to\lambda_1$?

Вместо $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t}$ в качестве базиса можно взять (при $\lambda_2 \neq \lambda_1$) $e^{\lambda_1 t}$ и $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t}$. Но $e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \approx (\lambda_2 - \lambda_1) te^{\lambda_1 t}$. Базис нашей плоскости $(e^{\lambda_1 t}, (e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t})/(\lambda_2 - \lambda_1))$ при $\lambda_2 \to \lambda_1$ переходит в базис $(e^{\lambda_1 t}, te^{\lambda_1 t})$ предельной плоскости. Поэтому естественно ожидать, что решения предельного уравнения (с кратным корнем $\lambda_2 = \lambda_1$) будут лежать в предельной плоскости $\{c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 te^{\lambda_1 t}\}$. Когда формула написана, ее можно проверять подстановкой в уравнение.

Таким же образом объясняется возникновение решений $t^k e^{\lambda t}$ $(k < \nu)$ в случае $\nu$-кратного корня.

Приведенные рассуждения можно сделать вполне строгими (например, сославшись на теорему о дифференцируемой зависимости решений от параметра).

**5. Неоднородные уравнения.** Пусть $A$: $L_1 \to L_2$ — линейный оператор. Решением неоднородного уравнения $Ax = f$ с правой частью $f$ называется всякий прообраз $x \in L_1$ элемента $f \in L_2$ (рис. 183).

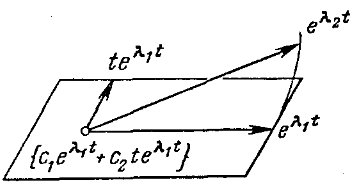


Рис. 182. Предельное положение плоскости, натянутой на две экспоненты.

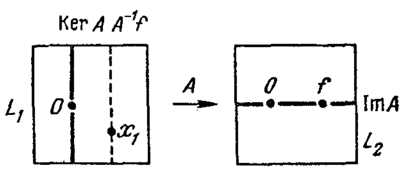


Рис. 183. Ядро и образ оператора $A$.

Всякое решение неоднородного уравнения есть сумма частного решения $x_1$ и общего решения однородного уравнения $Ax = 0$:

$$A^{-1} f = x_1 + \operatorname{Ker} A.$$

Неоднородное уравнение разрешимо, если $f$ принадлежит линейному пространству $\operatorname{Im} A = A(L_1) \subseteq L_2$.

Рассмотрим, в частности, дифференциальное уравнение

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t) \tag{3}$$

(*линейное неоднородное уравнение, n-го порядка с постоянными коэффициентами*).

Теорема. *Пусть правая часть* $f(t)$ *уравнения* (3) *есть сумма квазимногочленов. Тогда всякое решение уравнения* (3) *является суммой квазимногочленов.*

Рассмотрим пространство $\mathbf{C}^m$ всех квазимногочлено

$$\mathbf{C}^m = \{e^{\lambda t} p_{<m}(t)\}$$

степени меньше $m$ с показателем $\lambda$. Линейный оператор $D$ (переводящий всякую функцию в ее производную) переводит $\mathbf{C}^m$ в себя. Поэтому оператор

$$A = a(D) = D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_n E\colon \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$$

также является линейным оператором из $\mathbf{C}^m$ в себя. Мы можем теперь записать уравнение (3) в виде $Ax=f$. Для исследования его разрешимости нужно найти образ $\operatorname{Im} A = A(\mathbf{C}^m)$ отображения $A$.

Лемма 1. *Пусть $\lambda$ — не корень характеристического уравнения, т. е. $a(\lambda)\neq 0$. Тогда $A$: $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$ — изоморфизм.*

Доказательство. Матрица оператора $D$: $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$ в подходящем базисе — жорданова клетка с $\lambda$ на диагонали. В том же базисе оператор $A$ имеет треугольную матрицу с $a(\lambda)$ на диагонали. Итак, $\det A = (a(\lambda))^m \neq 0$ и $A$ — изоморфизм.

Следствие. *Если $\lambda$ — не корень характеристического уравнения, то уравнение (3) с правой частью в виде квазимногочлена степени меньше $m$ с показателем $\lambda$ имеет частное решение в виде квазимногочлена степени меньше $m$ с показателем $\lambda$.*

Лемма 2. *Пусть $\lambda$ — корень характеристического уравнения кратности $\nu$, т. е. $a(z)=(z-\lambda)^\nu b(z)$, $b(\lambda)\neq 0$. Тогда $A\mathbf{C}^m=\mathbf{C}^{m-\nu}$.*

Доказательство. $A=a(D)=(D-\lambda E)^\nu b(D)$. По лемме 1 $b(D)$: $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$ — изоморфизм. Остается показать, что $(D-\lambda E)^\nu \mathbf{C}^m = \mathbf{C}^{m-\nu}$. Но матрица оператора $D-\lambda E$ в базисе

$$e_k=\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}, \qquad 0\leqslant k<m,$$

является нильпотентной жордановой клеткой, т. е. этот оператор действует на базис как сдвиг: $0 \leftarrow\!\shortmid e_0 \leftarrow\!\shortmid e_1 \leftarrow\!\shortmid \ldots \leftarrow\!\shortmid e_{m-1}$. Оператор $(D-\lambda E)^\nu$ действует как сдвиг на $\nu$ мест и отображает $\mathbf{C}^m$ на $\mathbf{C}^{m-\nu}$.

Следствие. *Пусть $\lambda$ — корень кратности $\nu$ характеристического уравнения, $a(\lambda)=0$. Пусть $f\in\mathbf{C}^k$ — квазимногочлен степени меньше $k$ с показателем $\lambda$. Тогда уравнение (3) имеет решение $\varphi\in\mathbf{C}^{k+\nu}$ в виде квазимногочлена с показателем $\lambda$ степени меньше $k+\nu$.*

Для доказательства нужно положить $m=k+\nu$ в лемме 2.

Доказательство теоремы. Рассмотрим множество $\Sigma$ всевозможных сумм квазимногочленов. Это — линейное бесконечномерное подпространство пространства $F$. По предыдущему следствию образ $A(\Sigma)$ оператора $A=a(D)$: $\Sigma\to\Sigma$ содержит все квазимногочлены. Будучи линейным пространством, $A(\Sigma)$ совпадает с $\Sigma$. Поэтому уравнение (3) имеет частное решение, являющееся суммой квазимногочленов. Остается добавить общее решение однородного уравнения. Оно является суммой квазимногочленов согласно § 25.

Теорема доказана.

Замечание 1. *Если $f=e^{\lambda t}p_{<k}(t)$, то существует частное решение уравнения (3) вида $\varphi=t^\nu e^{\lambda t}q_{<k}(t)$.*

Действительно, по лемме 2 существует частное решение в виде квазимногочлена степени меньше $k+\nu$; но слагаемые степени меньше $\nu$ удовлетворяют однородному уравнению (см. следствие п. 2), поэтому их можно откинуть.

Замечание 2. *Если уравнение (3) и $\lambda$ вещественны, то решение можно искать в виде вещественного квазимногочлена. Если же $\lambda=\alpha\pm i\omega$, то в виде $e^{\alpha t}(p(t)\cos\omega t+q(t)\sin\omega t)$. При этом синус в решении может* *появиться даже и в том случае, когда в правой части был только косинус.*

Задача 1. В каком виде можно записать частные решения следующих 13 уравнений:

1, 2) $\ddot{x} \pm x = t^2$; 3, 4) $\ddot{x} \pm x = e^{2t}$; 5, 6) $\ddot{x} \pm x = te^{-t}$;

7, 8) $\ddot{x} \pm x = t^3 \sin t$; 9, 10) $\ddot{x} \pm x = te^t \cos t$;

11, 12) $\ddot{x} \pm 2i\dot{x} = t^2 e^t \sin t$; 13) $x^{\mathrm{IV}} + 4x = t^2 e^t \cos t$?

**6. Метод комплексных амплитуд.** В случае комплексных корней обычно проще проводить вычисления следующим образом.

Пусть уравнение (3) вещественно и функция $f(t)$ представлена как вещественная часть комплексной функции, $f(t) = \operatorname{Re} F(t)$. Пусть $\Phi$ — комплексное решение уравнения $a(D)\Phi = F$. Тогда, взяв вещественную часть, убеждаемся, что $a(D)\varphi = f$, где $\varphi = \operatorname{Re}\Phi$ (поскольку $a = \operatorname{Re} a$).

Итак, *чтобы найти решения линейного неоднородного уравнения с правой частью $f$, достаточно рассмотреть $f$ как вещественную часть комплексной функции $F$, решить уравнение с правой частью $F$ и взять вещественную часть решения.*

Пример 1. Пусть $f(t) = \cos \omega t = \operatorname{Re} e^{i\omega t}$. Степень квазимногочлена $F(t) = e^{i\omega t}$ равна 0, поэтому решение $\Phi$ можно искать в виде $Ct^\nu e^{i\omega t}$, где $C$ — комплексная постоянная (которая и называется *комплексной амплитудой*), $\nu$ — кратность корня $i\omega$. Окончательно

$$\varphi(t) = \operatorname{Re}(Ct^\nu e^{i\omega t}).$$

Если $C = re^{i\theta}$, то

$$\varphi(t) = rt^\nu \cos(\omega t + \theta).$$

Таким образом, комплексная амплитуда $C$ содержит информацию и об амплитуде $(r)$, и о фазе $(\theta)$ вещественного решения.

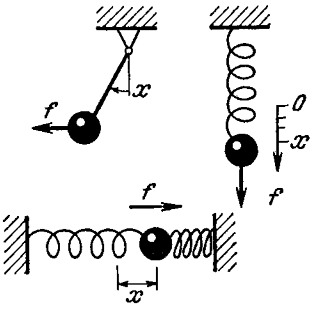


Рис. 184. Колебательная система под действием внешней силы $f(t) = \cos \nu t$.

Пример 2. Рассмотрим поведение маятника (рис. 184) (или иной линейной колебательной системы, например груза на пружине или электрического колебательного контура) при воздействии внешней периодической силы:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t), \qquad f(t) = \cos \nu t = \operatorname{Re} e^{i\nu t}.$$

Характеристическое уравнение $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ имеет корни $\lambda = \pm i\omega$. Если $\nu^2 \neq \omega^2$, то частное решение следует искать в виде $\Phi = Ce^{i\nu t}$. Подставляя в уравнение, находим

$$C = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2}. \tag{4}$$

Величину $C$ можно записать в тригонометрическом виде: $C = r(\nu)\, e^{i\theta(\nu)}$.

Согласно формуле (4), амплитуда $r$ и фаза $\theta$ имеют указанные на рис. 185 значения *). Вещественная часть $\Phi$ равна $r\cos(\nu t+\theta)$. Итак, общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$x=r\cos(\nu t+\theta)+C_1\cos(\omega t+\theta_1),$$

где $C_1$ и $\theta_1$ — произвольные постоянные.

Следовательно, *колебание маятника под воздействием внешней силы состоит из «вынужденного колебания»* $r\cos(\nu t+\theta)$ *с частотой внешней силы и «свободного колебания» с собственной частотой* $\omega$.

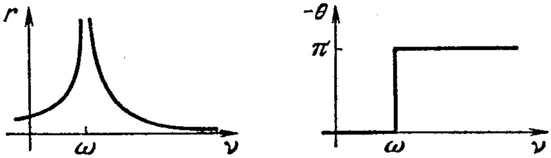


Рис. 185. Амплитуда и фаза маятника без трения как функция частоты внешней силы.

Зависимость амплитуды $r$ вынужденного колебания от частоты внешней силы $\nu$ имеет характерный резонансный вид: чем ближе частота внешней силы к собственной частоте $\omega$, тем сильнее она раскачивает систему.

Это явление резонанса, наблюдаемого при совпадении частоты внешней силы с собственной частотой колебательной системы, имеет очень большое значение в приложениях. Например, при расчетах всякого рода сооружений приходится следить за тем, чтобы собственные частоты сооружения не были близки к частотам внешних сил, которые оно будет испытывать. В противном случае даже малая сила, действуя в течение длительного времени, сможет раскачать сооружение и разрушить его.

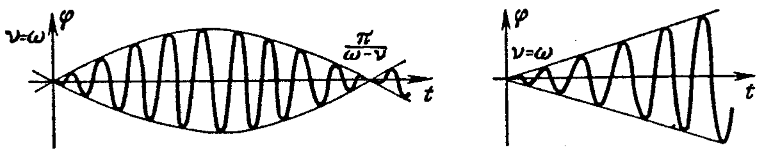


Рис. 186. Сумма двух гармоний с близкими частотами (биения) и ее предел в случае резонанса (раскачка).

Фаза вынужденных колебаний $\theta$ скачком изменяется на $-\pi$ при переходе $\nu$ через резонансное значение $\omega$. При $\nu$, близких к $\omega$, наблюдаются «биения» (рис. 186): амплитуда колебаний маятника то растет (пока соотношение фаз маятника и внешней силы таково, что внешняя сила раскачивает маятник, сообщая ему энергию), то убывает (когда соотношение фаз меняется так, что внешняя сила тормозит маятник).

*) Выбор $\theta=-\pi$ (а не $+\pi$) при $\nu>\omega$ оправдан примером 3 ниже.

Чем ближе частоты $\nu$ и $\omega$, тем медленнее меняется соотношение фаз и тем больше период биений. При $\nu \to \omega$ период биений стремится к бесконечности.

При резонансе ($\nu=\omega$) соотношение фаз постоянно и вынужденные колебания могут нарастать неограниченно (рис. 186).

Действительно, по общему правилу при $\nu=\omega$ частное решение ищем в виде $x = \operatorname{Re} Cte^{i\omega t}$. Подставляя в уравнение, находим $C = 1/(2i\omega)$, откуда $x = \frac{t}{2\omega}\sin\omega t$ (рис. 186). Вынужденные колебания неограниченно нарастают.

Пример 3. Рассмотрим маятник с трением $\ddot{x}+k\dot{x}+\omega^2 x = f(t)$. Характеристическое уравнение $\lambda^2+k\lambda+\omega^2=0$ имеет корни (рис. 187)

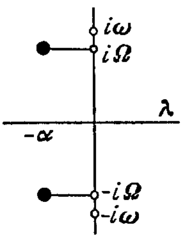


Рис. 187. Собственные числа уравнения маятника с трением.

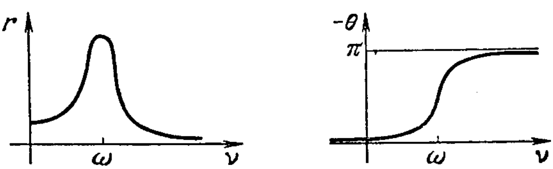


Рис. 188. Амплитуда и фаза вынужденного колебания маятника с трением как функции частоты внешней силы.

$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\Omega$, где $\alpha = \frac{k}{2}$, $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \frac{k^2}{4}}$. Предположим, что коэффициент трения $k$ положителен и невелик ($k^2 < 4\omega^2$). Рассмотрим гармоническую внешнюю силу $f(t) = \cos\nu t = \operatorname{Re} e^{i\nu t}$. Если коэффициент трения $k$ отличен от 0, то $i\nu$ не может быть корнем характеристического уравнения (так как $\lambda_{1,2}$ имеют ненулевые вещественные части). Поэтому решение следует искать в виде $x = \operatorname{Re} Ce^{i\nu t}$. Подставляя в уравнение, найдем

$$C = \frac{1}{\omega^2 - \nu^2 + ki\nu}. \tag{5}$$

Запишем $C$ в тригонометрической форме: $C = re^{i\theta}$. Графики зависимости амплитуды $r$ и фазы $\theta$ вынужденного колебания от частоты внешней силы имеют, согласно (5), вид, изображенный на рис. 188.

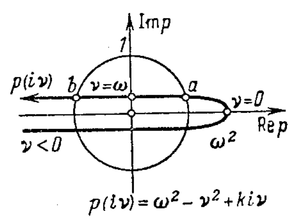


Рис. 189. Значения характеристического многочлена на мнимой оси.

Эти графики построены следующим образом. Рассмотрим знаменатель дроби (5), т. е. значение характеристического многочлена $p$ на мнимой оси. Образ отображения $\nu \mapsto p(i\nu) = \omega^2 - \nu^2 + ki\nu$ называется *кривой Михайлова*. Из формулы (5) видно, что эта кривая (для нашего уравнения) является параболой. Она изображена на рис. 189. Если коэффициент трения $k$ мал, парабола «близка» к дважды пройденному лучу вещественной оси.

Теперь легко построить образ отображения $\nu \mapsto C(\nu) = 1/p(i\nu)$ — эта кривая называется *амплитудно-фазовой характеристикой.* Для ее построения достаточно проделать с кривой Михайлова инверсию и отражение в вещественной оси. Часть кривой Михайлова, близкая к 0, почти неотличима от пары отрезков прямых и соответствует окрестностям радиуса порядка $k$ точек $\omega$ и $-\omega$ оси $\nu$. При инверсии прямые переходят в окружности, поэтому амплитудно-фазовая характеристика содержит два участка, близких к большим окружностям (диаметра $1/(k\omega)$) (рис. 190). На оси $\nu$ эти окружности отвечают малым (порядка $k$) окрестностям резонансных значений, $\omega$ и $-\omega$: вся остальная часть оси $\nu$ соответствует соединяющей окружности перемычке и концевым дугам.

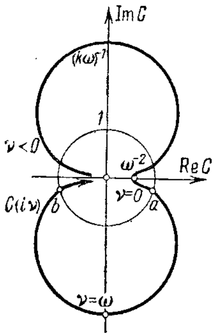

Рис. 190. Зависимость комплексной амплитуды от частоты внешней силы.

Изучив таким образом отображение $\nu \mapsto C(\nu)$, мы уже без труда исследуем зависимость от $\nu$ модуля и аргумента комплексной амплитуды $C$: их графики и приведены на рис. 188.

Общее решение неоднородного уравнения

$$x = r\cos(\nu t + \theta) + C_1 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \theta_1)$$

получается добавлением к частному решению общего решения однородного уравнения $C_1 e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \theta_1)$.

При $t \to +\infty$ это слагаемое стремится к 0, так что остается только одно вынужденное колебание $x = r\cos(\nu t + \theta)$.

Сравним поведение маятника при нулевом (рис. 185) и при положительном (рис. 188) значениях коэффициента трения.

Мы видим, что *влияние малого трения на резонанс приводит к тому, что амплитуда колебаний при резонансе растет не бесконечно, а до определенной конечной величины, обратно пропорциональной коэффициенту трения.*

Действительно, функция $r(\nu)$, выражающая зависимость амплитуды установившихся колебаний от частоты внешней силы, имеет вблизи $\nu = \omega$ резко выраженный максимум (рис. 188). Из формулы (5) видно, что высота этого максимума растет при уменьшении $k$, как $1/(k\omega)$.

С «физической» точки зрения конечность амплитуды установившихся вынужденных колебаний при ненулевом значении коэффициента трения легко предвидеть, подсчитав баланс энергии. При больших амплитудах потеря энергии на трение больше, чем энергия, сообщаемая маятнику внешней силой. Поэтому амплитуда будет уменьшаться, пока не установится режим, в котором потери энергии на трение уравновешиваются работой внешней силы. Величина амплитуды установившихся колебаний растет обратно пропорционально коэффициенту трения, когда он стремится к нулю.

Сдвиг фазы $\theta$ всегда отрицателен: *вынужденное колебание отстает от вынуждающей силы.*

Задача 1. Доказать, что всякое решение линейной неоднородной системы уравнений с постоянными коэффициентами и правой частью в виде суммы квазимногочленов с векторными коэффициентами

$$f=\sum_l e^{\lambda_l t} \sum_k c_{k,l} t^k$$

является суммой квазимногочленов с векторными коэффициентами.

Задача 2. Доказать, что всякое решение линейного неоднородного возвратного уравнения с правой частью в виде суммы квазимногочленов

$$x_n+a_1x_{n-1}+\ldots+a_kx_{n-k}=f(n)$$

является суммой квазимногочленов. Найти формулу для общего члена последовательности 0, 2, 7, 18, 41, 88, ... ($x_n=2x_{n-1}+n$).

**7. Применение к расчету слабо нелинейных колебаний.** При исследовании зависимости решения уравнения от параметров приходится решать линейные неоднородные уравнения — уравнения в вариациях (см. § 3). В частности, если «невозмущенная» система линейна, то задача часто сводится к решению линейных уравнений с правой частью в виде суммы экспонент (или тригонометрических функций) или квазимногочленов.

Задача 1. Исследовать зависимость периода колебаний маятника, описываемого уравнением $\ddot{x}=-\sin x$, от амплитуды $A$, считая последнюю малой.

*Ответ.* $T=2\pi\,(1+A^2/16+O(A^4))$.

Например, при угле отклонения 30° период больше периода малых колебаний на 2 %.

Решение. Рассмотрим решение уравнения маятника с начальным условием $x(0)=A$, $\dot{x}(0)=0$ как функцию от $A$.

По теореме о дифференцируемой зависимости от начальных условий эта функция гладкая. Разложим ее в ряд Тейлора по $A$ вблизи $A=0$:

$$x=Ax_1(t)+A^2x_2(t)+A^3x_3(t)+O(A^4).$$

Тогда

$$\dot{x}=A\dot{x}_1+A^2\dot{x}_2+A^3\dot{x}_3+O(A^4),$$
$$\ddot{x}=A\ddot{x}_1+A^2\ddot{x}_2+A^3\ddot{x}_3+O(A^4),$$
$$\sin x=Ax_1+A^2x_2+A^3(x_3-x_1^3/6)+O(A^4).$$

Уравнение $\ddot{x}=-\sin x$ выполнено при любом $A$. Отсюда находим уравнения для $x_1$, $x_2$, $x_3$:

$$\ddot{x}_1=-x_1,\qquad \ddot{x}_2=-x_2,\qquad \ddot{x}_3=-x_3+x_1^3/6. \tag{6}$$

Начальное условие $x(0)=A$, $\dot{x}(0)=0$ выполнено при любом $A$. Отсюда находим начальные условия для уравнений (6):

$$x_1(0)=1,\qquad x_2(0)=x_3(0)=\dot{x}_1(0)=\dot{x}_2(0)=\dot{x}_3(0)=0. \tag{7}$$

Решая уравнения (6) при условиях (7), находим $x_1=\cos t$, $x_2=0$, а для $x_3$ получаем уравнение

$$\ddot{x}_3+x_3=(\cos^3 t)/6,\qquad x_3(0)=\dot{x}_3(0)=0.$$

Решая это уравнение (хотя бы методом комплексных амплитуд), находим

$$x_3=\alpha(\cos t-\cos 3t)+\beta t\sin t,$$

где $\alpha=1/192$, $\beta=1/16$.

Итак, влияние нелинейности ($\sin x \neq x$) на колебания маятника сводится *) к добавлению слагаемого $A^3 x_3 + O(A^4)$:

$$x = A \cos t + A^3 [\alpha (\cos t - \cos 3t) + \beta t \sin t] + O(A^4).$$

Период колебаний $T$ находится как точка максимума $x(t)$, близкая к $2\pi$ при малых $A$. Эта точка находится из условия $\dot{x}(T) = 0$, т. е.

$$A \{ -\sin t + A^2 [(\beta - \alpha) \sin T + 3\alpha \sin 3T + \beta T \cos T] + O(A^3) \} = 0.$$

Решим это уравнение приближенно при малых $A$. Положим $T = 2\pi + u$. Для $u$ получим уравнение

$$\sin u = A^2 [2\pi\beta + O(u)] + O(A^3).$$

По теореме о неявной функции $u = 2\pi\beta A^2 + O(A^3)$, т. е. $T = 2\pi(1 + A^2/16 + o(A^2))$. Ввиду четности $T$ по $A$, $o(A^2) = O(A^4)$.

Задача 2. Исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды $A$ для уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2 x + a x^2 + b x^3 = 0.$$

*Ответ.* $T = \dfrac{2\pi}{\omega}\left[1 + \left(\dfrac{5a^2}{12\omega^4} - \dfrac{3b}{8\omega^2}\right) A^2 + o(A^2)\right].$

Задача 3. Получить те же результаты из явной формулы для периода (§ 12, п. 7)

## § 27. Линейные неавтономные уравнения

Та часть теории линейных уравнений, которая не зависит от инвариантности относительно сдвигов, легко переносится на линейные уравнения и системы с переменными коэффициентами.

**1. Определение.** *Линейным* (*однородным*) *уравнением с переменными коэффициентами* **) мы будем называть уравнение

$$\dot{x} = A(t)\, x, \qquad x \in \mathbf{R}^n, \qquad A(t)\colon\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{1}$$

где $t$ принадлежит интервалу $I$ вещественной оси. Этот интервал может составлять всю ось $\mathbf{R}$.

Геометрически решения уравнения (1) изображаются интегральными кривыми в полосе $I \times \mathbf{R}^n$ расширенного фазового пространства (рис. 191). Как обычно, мы будем предполагать функцию $A(t)$ гладкой ***).

Пример 1. Рассмотрим уравнение маятника $\ddot{x} = -\omega^2 x$. Частота $\omega$ определяется длиной маятника. Колебания маятника переменной длины описываются аналогичным уравнением: $\ddot{x} = -\omega^2(t)\, x$. Это уравнение

---

*) Здесь полезно вспомнить о дырявом ведре (см. предостережение в § 7, п. 5): из появления «векового» слагаемого $t \sin t$ в формуле для $x_3$ нельзя делать никаких выводов о поведении маятника при $t \to \infty$. Наше приближение справедливо лишь на конечном интервале времени; при больших $t$ слагаемое $O(A^4)$ становится большим. И действительно, настоящее решение уравнения колебаний маятника остается ограниченным (величиной $A$) при всех $t$, как это видно из закона сохранения энергии.

**) Мы предполагаем, что коэффициенты вещественны. Комплексный случай вполне аналогичен.

***) Достаточно было бы предполагать функцию $A(t)$ непрерывной (см. ниже § 32, п. 6, стр. 23).

можно записать в виде (1):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega^2(t)\,x_1, \end{cases} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

Примером маятника переменной длины являются качели: изменяя положение своего центра тяжести, человек на качелях периодически изменяет величину параметра $\omega$ (рис. 192).

**2. Существование решений.** Одно решение у уравнения (1) видно сразу: нулевое. Для любых начальных условий $(t_0, x_0)$ из $I \times \mathbf{R}^n$ по

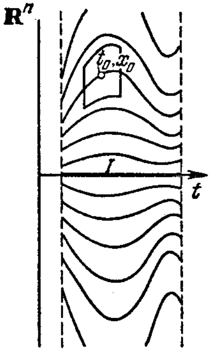


Рис. 191. Интегральные кривые линейного уравнения.

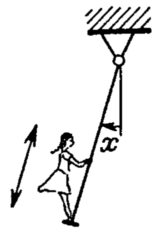


Рис. 192. Качели.

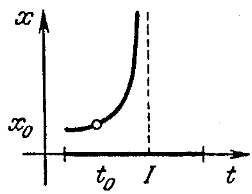


Рис. 193. Непродолжаемое решение уравнения $\dot{x} = x^2$

общим теоремам гл. 2 существует решение, определенное в некоторой окрестности точки $t_0$. Для нелинейного уравнения это решение может не продолжаться на весь интервал $I$ (рис. 193). Особенностью линейных уравнений является то, что для них уход в бесконечность за конечное время невозможен.

Теорема. *Всякое решение уравнения* (1) *можно продолжить на весь интервал* $I$.

Причина заключается в том, что для линейного уравнения

$$\|\dot{x}\| \leqslant C\,\|x\|,$$

и поэтому решение растет не быстрее $e^{Ct}$.

Аккуратное доказательство проводится, например, так. Пусть $[a, b]$ — компактный отрезок в $I$. Тогда на отрезке $[a, b]$ норма *) оператора $A(t)$ ограничена:

$$\|A(t)\| < C = C(a, b).$$

Докажем следующую априорную оценку:

*Если решение* $\varphi$ *определено на отрезке* $[t_0, t]$ $(a \leqslant t_0 \leqslant t \leqslant b)$ (рис. 194), *то*

$$\|\varphi(t)\| \leqslant e^{C(t-t_0)}\|\varphi(t_0)\|. \tag{2}$$

Для нулевого решения это очевидно. Если $\varphi(t_0) \neq 0$, то $\varphi(\tau)$ не обращается в 0 по теореме единственности. Положим $r(\tau) = \|\varphi(\tau)\|$. Функция $L(\tau) = \ln r^2$ определена при $t_0 \leqslant \tau \leqslant t$

По условию, $\dot{L} \leqslant 2r\dot{r}/r^2 \leqslant 2C$. Поэтому $L(t) \leqslant L(t_0) + 2C(t - t_0)$, что и доказывает априорную оценку (2).

*) Мы предполагаем, что в $\mathbf{R}^n$ выбрана какая-нибудь евклидова метрика.

Пусть теперь $\|x_0\|^2 = B > 0$. Рассмотрим компакт в расширенном фазовом пространстве (рис. 195)

$$F = \{t, x\colon\ a \leqslant t \leqslant b,\ \|x\|^2 \leqslant 2Be^{2C(b-a)}\}.$$

По теореме продолжения, решение с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$ продолжается вперед до границы цилиндра $F$. Граница цилиндра $F$ состоит из торцов ($t = a$, $t = b$)

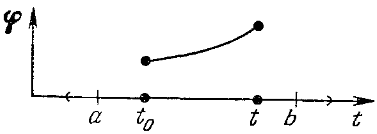


Рис. 194. Априорная оценка роста решения на $[a, b]$

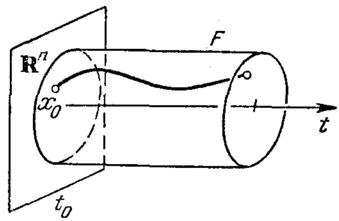


Рис. 195. Продолжение решения до $t = b$

и боковой поверхности ($\|x\|^2 = 2Be^{2C(b-a)}$). На боковую поверхность решение выйти не может, так как, согласно априорной оценке, $\|\varphi(t)\| \leqslant Be^{2C(b-a)}$. Итак, решение продолжается вправо до $t = b$. Аналогично доказывается продолжение влево до $a$.

Ввиду произвольности $a$ и $b$, теорема доказана.

**3. Линейное пространство решений.** Рассмотрим множество $X$ всех решений уравнения (1), определенных на всем интервале $I$. Поскольку решения — это отображения $\varphi\colon I \to \mathbf{R}^n$ со значениями в линейном фазовом пространстве $\mathbf{R}^n$, то их можно складывать и умножать на числа: $(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2)(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$.

Теорема. *Множество $X$ всех решений уравнения* (1), *определенных на интервале $I$, является линейным пространством.*

Доказательство. Это очевидно:

$$\frac{d}{dt}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2 = c_1A\varphi_1 + c_2A\varphi_2 = A(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2).$$

Теорема. *Линейное пространство $X$ решений линейного уравнения изоморфно фазовому пространству $\mathbf{R}^n$ этого уравнения.*

Доказательство. Пусть $t \in I$. Рассмотрим отображение

$$B_t\colon X \to \mathbf{R}^n, \qquad B_t\varphi = \varphi(t),$$

сопоставляющее каждому решению $\varphi$ его значение в момент $t$.

Отображение $B_t$ линейно (так как значение суммы решений равно сумме их значений). Его образ — все фазовое пространство $\mathbf{R}^n$, так как по теореме существования для любого $x_0 \in \mathbf{R}^n$ существует решение $\varphi$ с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$. Ядро отображения $B_t$ равно 0, так как решение с нулевым начальным условием $\varphi(t_0) = 0$ равно нулю тождественно по теореме единственности.

Итак, $B_t$ — *изоморфизм $X$ на* $\mathbf{R}^n$. Это — основной результат теории линейных уравнений.

Определение. *Фундаментальной системой решений* уравнения (1) называется базис линейного пространства решений $X$.

Задача 1. Найти фундаментальную систему решений уравнения (1) где

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из доказанной теоремы вытекают:

Следствие 1. *Всякое уравнение* (1) *имеет фундаментальную систему из $n$ решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$.*

Следствие 2. *Всякое решение уравнения* (1) *является линейной комбинацией решений фундаментальной системы.*

Следствие 3. Всякие $n+1$ *решений уравнения* (1) *линейно зависимы.*

Следствие 4. *Соответствующие уравнению* (1) *отображения за время от $t_0$ до $t_1$* (рис. 196)

$$g_{t_0}^{t_1}=B_{t_1}B_{t_0}^{-1}\colon\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$$

*являются линейными изоморфизмами.*

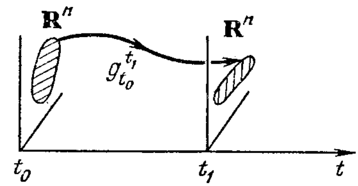


Рис. 196. Линейное преобразование фазового пространства, осуществляемое решениями линейного уравнения за время от $t_0$ до $t_1$.

**4. Определитель Вронского.** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторый базис в фазовом пространстве $\mathbf{R}^n$. Выбор базиса фиксирует единицу объема и ориентацию в $\mathbf{R}^n$. Поэтому каждый параллелепипед в фазовом пространстве имеет определенный объем.

Рассмотрим $n$ вектор-функций $\varphi_k\colon I\to\mathbf{R}^n$ $(k=1, \ldots, n)$.

Определение. *Определителем Вронского* системы вектор-функций $\varphi_k$ называется числовая функция $W\colon I\to\mathbf{R}$, значение которой в точке $t$ равно (ориентированному) объему параллелепипеда, натянутого на векторы $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\in\mathbf{R}^n$,

$$W(t)=\begin{vmatrix} \varphi_{1,1}(t) & \ldots & \varphi_{n,1}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{1,n}(t) & \ldots & \varphi_{n,n}(t) \end{vmatrix},$$

$$\varphi_k(t)=\varphi_{k,1}(t)\,e_1+\ldots+\varphi_{k,n}(t)\,e_n.$$

В частности, пусть $\varphi_k$ — решения уравнения (1). Их образы при построенном выше изоморфизме $B_t$ — это векторы фазового пространства $\varphi_k(t)\in\mathbf{R}^n$. Они линейно зависимы, если и только если определитель Вронского равен 0 в точке $t$. Отсюда:

Следствие 5. *Система решений $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ уравнения* (1) *является фундаментальной тогда и только тогда, когда ее определитель Вронского отличен от 0 в какой-нибудь точке $t$.*

Следствие 6. *Если определитель Вронского системы решений уравнения* (1) *равен 0 в одной точке, то он равен 0 тождественно при всех $t$.*

Задача 1. Может ли определитель Вронского системы линейно независимых вектор-функций $\varphi_k$ тождественно равняться нулю?

Задача 2. Докажите, что определитель Вронского фундаментальной системы решений пропорционален определителю преобразования за время от $t_0$ до $t$:

$$W(t)=\left(\det g_{t_0}^t\right)W(t_0).$$

Указание. Решение см. в п. 6.

**5. Случай одного уравнения.** Рассмотрим одно уравнение $n$-го порядка

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=0 \tag{3}$$

с переменными, вообще говоря, коэффициентами $a_k=a_k(t)$, $t\in I$.

Некоторые уравнения второго порядка с переменными коэффициентами столь часто встречаются в приложениях, что имеют собственные имена, а их решения изучены и затабулированы не менее подробно, чем синус и косинус (см., например, Е. Янке, Ф. Эмдс. Таблицы функций.— М.: Наука, 1977).

Пример 1. Уравнение Бесселя: $\ddot{x}+\frac{1}{t}\dot{x}+\left(1-\frac{\nu^2}{t^2}\right)x=0.$

Пример 2. Гипергеометрическое уравнение Гаусса:

$$\ddot{x}+\frac{(\alpha+\beta+1)t-\gamma}{t(t-1)}\dot{x}+\frac{\alpha\beta}{t(t-1)}x=0.$$

Пример 3. Уравнение Матье: $\ddot{x}+(a+b\cos t)x=0.$

Мы могли бы записать уравнение (3) в виде системы $n$ уравнений первого порядка и применить предыдущие рассуждения.

Можно, однако, рассмотреть непосредственно пространство $X$ решений уравнения (3). Это — линейное пространство функций $\varphi\colon I\to\mathbf{R}$. Оно естественно изоморфно пространству решений эквивалентной системы $n$ уравнений. Изоморфизм задается сопоставлением функции $\varphi$ вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}=(\varphi, \dot{\varphi}, \ldots, \varphi^{(n-1)})$ из производных $\varphi$. Итак:

Следствие 7. *Пространство $X$ решений уравнения* (3) *изоморфно фазовому пространству* $\mathbf{R}^n$ *уравнения* (3), *причем изоморфизм можно задать, сопоставляя каждому решению $\varphi\in X$ набор значений производных в какой-нибудь точке $t_0$:*

$$\varphi\mapsto(\varphi(t_0), \dot{\varphi}(t_0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t_0)).$$

Определение. Базис линейного пространства $X$ называется *фундаментальной системой решений* уравнения (3).

Задача 1. Указать фундаментальную систему решений уравнения (3) в случае, когда коэффициенты $a_k$ постоянны. Например, для $\ddot{x}+ax=0$.

*Ответ* $\{t^re^{\lambda t}\}$, где $0\leqslant r<\nu$, если $\lambda$ — корень характеристического уравнения кратности $\nu$. В случае комплексных корней ($\lambda=\alpha\pm i\omega$) нужно заменить $e^{\lambda t}$ на $e^{\alpha t}\cos\omega t$ и $e^{\alpha t}\sin\omega t$. В частности, для $\ddot{x}+ax=0$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\cos\omega t$ | и | $\sin\omega t$, | | | | если | $a=\omega^2>0$; |
| $\operatorname{ch}\alpha t$ | и | $\operatorname{sh}\alpha t$ | или | $e^{\alpha t}$ | и $e^{-\alpha t}$, | если | $a=-\alpha^2<0$; |
| 1 | и | $t$, | | | | если | $a=0$. |

Определение. *Определителем Вронского системы функций* $\varphi_k\colon I\to\mathbf{R}$, $1\leqslant k\leqslant n$, называется числовая функция $W\colon I\to\mathbf{R}$, значение которой в точке $t$ равно

$$W(t)=\begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \dot{\varphi}_1(t) & \ldots & \dot{\varphi}_n(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}.$$

Иными словами, это — определитель Вронского системы вектор-функций $\boldsymbol{\varphi}_k\colon I\to\mathbf{R}^n$, полученных из $\varphi_k$ обычным образом:

$$\boldsymbol{\varphi}_k(t)=(\varphi_k(t),\ \dot{\varphi}_k(t),\ \ldots,\ \varphi_k^{(n-1)}(t)),\qquad k=1,\ \ldots,\ n.$$

Все сказанное об определителе Вронского системы векторов-решений уравнения (1) переносится без изменений на определитель Вронского системы решений уравнения (3). В частности:

Следствие 8. *Если определитель Вронского системы решений уравнения* (3) *обращается в* 0 *хоть в одной точке, то он тождественно равен нулю при всех* $t$.

Задача 2. Пусть определитель Вронского двух функций равен 0 в точке $t_0$. Следует ли отсюда, что он тождественно равен 0?

Следствие 9. *Если определитель Вронского системы решений уравнения* (3) *обращается в* 0 *хоть в одной точке, то эти решения линейно зависимы.*

Задача 3. Пусть определитель Вронского двух функций тождественно равен 0. Следует ли отсюда, что эти функции линейно зависимы?

Следствие 10. *Система* $n$ *решений уравнения* (3) *фундаментальна, если и только если определитель Вронского отличен от* 0 *хоть в одной точке.*

Пример 4. Рассмотрим систему функций $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$. Эти функции образуют фундаментальную систему решений линейного уравнения вида (3) (какого?). Поэтому они линейно независимы. Значит, их определитель Вронского отличен от 0. Но этот определитель равен

$$W=\begin{vmatrix} e^{\lambda_1 t} & \ldots & e^{\lambda_n t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n e^{\lambda_n t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 t} & \ldots & \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix}=e^{(\lambda_1+\ldots+\lambda_n)t}\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Следствие 11. *Определитель Вандермонда*

$$\begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \ldots & \lambda_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_1^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

*отличен от* 0, *если* $\lambda_k$ *попарно различны.*

Пример 5. Рассмотрим уравнение маятника $\ddot{x}+\omega^2 x=0$. Фундаментальная система решений: $(\cos\omega t, \sin\omega t)$. Определитель Вронского $W=\begin{vmatrix} \cos\omega t & \sin\omega t \\ -\omega\sin\omega t & \omega\cos\omega t \end{vmatrix}=\omega$ постоянный. Это неудивительно, так как фазовый поток уравнения маятника сохраняет площади (см. § 16, 4).

Посмотрим теперь, как меняется объем фигур фазового пространства под действием преобразований $g_{t_0}^t$ за время от $t_0$ до $t$ в общем случае.

**6. Теорема Лиувилля.** *Определитель Вронского системы решений уравнения* (1) *является решением дифференциального уравнения*

$$\dot W = aW, \quad \text{где} \quad a(t) = \operatorname{tr} A(t) \ (\text{след } A(t)). \tag{4}$$

Следствие.

$$W(t) = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau} W(t_0), \qquad \det g_{t_0}^t = e^{\int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau}. \tag{5}$$

Действительно, уравнение (4) легко решить:

$$\frac{dW}{W} = a\,dt, \qquad \ln W - \ln W_0 = \int_{t_0}^{t} a(\tau)\,d\tau.$$

Между прочим, из формулы (5) снова видно, что определитель Вронского системы решений либо равен 0 тождественно, либо не обращается в 0 ни в одной точке.

Задача 1. Найти объем образа единичного куба $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ под действием преобразования за время 1 фазового потока системы

$$\dot x_1 = 2x_1 - x_2 - x_3, \qquad \dot x_2 = x_1 + x_2 + x_3, \qquad \dot x_3 = x_1 - x_2 - x_3.$$

Решение. $\operatorname{tr} A = 2$, поэтому $W(t) = e^{2t} W(0) = e^{2t}$.

Идея доказательства теоремы Лиувилля.

Если коэффициенты постоянны, то уравнение (4) — это формула Лиувилля из § 16. «Замораживая» коэффициенты $A(t)$ (положив их равными значениям в некоторый момент времени $\tau$), убедимся в справедливости равенства (4) при любом $\tau$.

Доказательство. Рассмотрим линейное преобразование фазового пространства $g_\tau^{\tau+\Delta}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (рис. 197) за малое время от $\tau$ до $\tau+\Delta$. Это преобразование переводит значение любого решения $\varphi$ уравнения (1) в момент $\tau$ в его значение в момент $\tau+\Delta$. Согласно уравнению (1),

$$\varphi(\tau+\Delta) = \varphi(\tau) + A(\tau)\varphi(\tau)\Delta + o(\Delta),$$

т. е. $g_\tau^{\tau+\Delta} = E + \Delta A(\tau) + o(\Delta)$.

Следовательно, согласно § 16, коэффициент растяжения объемов при преобразовании $g_\tau^{\tau+\Delta}$ равен $\det g_\tau^{\tau+\Delta} = 1 + \Delta a + o(\Delta)$, где $a = \operatorname{tr} A$.

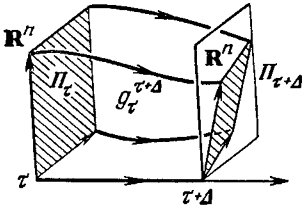


Рис. 197. Действие фазового потока на параллелепипед, натянутый на фундаментальную систему решений

Но $W(\tau)$ — это объем параллелепипеда $\Pi_\tau$, натянутого на значения нашей системы решений в момент $\tau$. Преобразование $g_\tau^{\tau+\Delta}$ переводит эти значения в систему значений той же системы решений в момент $\tau+\Delta$. Параллелепипед $\Pi_{\tau+\Delta}$, натянутый на эти новые значения, имеет объем $W(\tau+\Delta)$. Итак,

$$W(\tau+\Delta) = \left(\det g_\tau^{\tau+\Delta}\right) W(\tau) = [1 + a(\tau)\Delta + o(\Delta)]\, W(\tau),$$

откуда $\dot W = aW$, что и требовалось.

Следствие. *Определитель Вронского системы решений уравнения* (3) *равен* $W(t)=e^{-\int_{t_0}^{t} a_1(\tau)\,d\tau}\,W(t_0)$.

Знак минус появляется из-за того, что при записи уравнения (3) в виде системы (1) приходится перенести $a_1 x^{(n-1)}$ в правую часть. На диагонали матрицы получившейся системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & & \cdot & \\ & & & 1 \\ -a_n & \cdots & & -a_1 \end{pmatrix}$$

стоит только $-a_1$.

Пример 1. Рассмотрим уравнение качелей $\ddot{x}+f(t)x=0$.

Теорема. *Положение равновесия* $x=\dot{x}=0$ *ни при каком* $f$ *не может быть асимптотически устойчивым.*

Доказательство. Рассмотрим какой-нибудь базис $\xi$, $\eta$ в плоскости начальных условий $\mathbf{R}^2$ (рис. 198). Устойчивость означала бы, что $g_{t_0}^t\xi\to 0$ и $g_{t_0}^t\eta\to 0$. Тогда для соответствующей фундаментальной системе $W(t)\to 0$.

Наше уравнение эквивалентно системе

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=-f(t)x_1$$

с матрицей $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f & 0 \end{pmatrix}$. Поскольку $\operatorname{tr} A=0$, то $W(t)=\text{const}$ вопреки $W\to 0$.

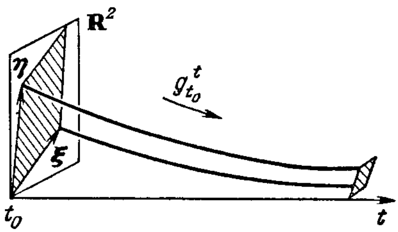

Рис. 198. Фазовый поток асимптотически устойчивой линейной системы.

Задача 2. Рассмотрите качели с трением $\ddot{x}+\alpha(t)\dot{x}+\omega^2(t)x=0$. Покажите, что асимптотическая устойчивость невозможна, если коэффициент трения отрицателен ($\alpha(t)<0\ \forall t$).

Верно ли, что при положительном коэффициенте трения положение равновесия (0, 0) всегда устойчиво?

Замечание. *Дивергенцией* векторного поля $\boldsymbol{v}$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ с декартовыми координатами $x_i$ называется функция $\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$.

В частности, *для линейного векторного поля* $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$ *дивергенция — это след оператора* $A$:

$$\operatorname{div} A\boldsymbol{x}=\operatorname{tr} A.$$

*Дивергенция векторного поля определяет скорость растяжения объемов соответствующим фазовым потоком.*

Пусть $D$ — область в евклидовом пространстве уравнения $\dot{x}=\boldsymbol{v}(x)$ (не обязательно линейного). Обозначим через $D(t)$ образ области $D$ под действием фазового потока и через $V(t)$ объем области $D(t)$.

Задача* 3. Докажите следующую теорему.

Теорема Лиувилля.

$$\frac{dV}{dt}=\int\limits_{D(t)} \operatorname{div} v\, dx \qquad \text{(рис. 199)}.$$

Следствие 1. *Если* $\operatorname{div} v=0$, *то фазовый поток сохраняет объем любой области.*

Такой фазовый поток можно представить себе как течение несжимаемой «фазовой жидкости» в фазовом пространстве.

Следствие 2. *Фазовый поток уравнений Гамильтона*

$$\dot{p}_k=-\frac{\partial H}{\partial q_k}, \qquad \dot{q}_k=\frac{\partial H}{\partial p_k}, \qquad k=1, \ldots, n,$$

*сохраняет объемы.*

Доказательство. $\operatorname{div} v=\sum \frac{\partial^2 H}{\partial q_k\, \partial p_k}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_k\, \partial q_k}\equiv 0.$

Этот факт играет фундаментальную роль в статистической физике.

**7. Теоремы Штурма о нулях решений уравнений второго порядка.** Решения линейных уравнений второго порядка обладают своеобразными свойствами колеблемости. Штурм говорил о «теоремах, имя которых я имею честь носить».

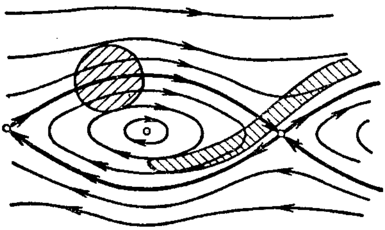

Рис. 199. Фазовый поток векторного поля дивергенции 0 сохраняет площади.

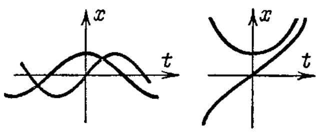


Рис. 200. Решения уравнений $\delta x \pm \ddot{x}=0$.

Рассмотрим уравнения с постоянными коэффициентами (рис. 200):

$$\ddot{x}+\omega^2 x=0, \qquad \ddot{x}-k^2 x=0.$$

Решения первого уравнения имеют бесконечно много нулей. Расстояние между двумя последовательными нулями любого его ненулевого решения равно $\pi/\omega$. Каждое решение второго уравнения, не равное нулю тождественно, имеет не более одного нуля. В обоих случаях между каждыми двумя нулями любого не равного тождественно нулю решения уравнения есть нуль любого другого решения.

Теоремы Штурма показывают, что аналогичные явления имеют место и для уравнений с переменными коэффициентами

$$\ddot{x}+q(t)\,x=0 \tag{6}$$

(более общее уравнение $\ddot{x}+p(t)\,\dot{x}+q(t)\,x=0$ легко приводится к виду (6)).

Рассмотрим для уравнения (6) фазовую плоскость с координатами $(x, y=\dot{x})$. Фазовые кривые неавтономного уравнения могут пересекаться. Тем не менее некоторую информацию об этих кривых для уравнения второго порядка получить можно. Эта информация и лежит в основе теоремы Штурма.

Предложение 1. *Фазовые кривые уравнения* (6) *пересекают луч $x=0$, $y>0$ в сторону возрастания $x$, а луч $x=0$, $y<0$ — в сторону убывания $x$.*

Доказательство. Запишем уравнение (6) в виде системы

$$\dot{x}=y, \quad \dot{y}=-q(t)x.$$

На прямой $x=0$ вектор фазовой скорости при любом $y$ имеет компоненты $(y, 0)$ (рис. 201), что и доказывает предложение 1.

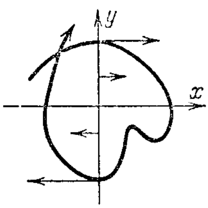


Рис. 201. Фазовая плоскость уравнения $\ddot{x}+q(t)x=0$.

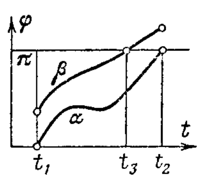


Рис. 202. Доказательство теоремы о нулях.

Заметим, что при $y \neq 0$ вектор фазовой скорости на оси $x=0$ отличен от нуля. Поэтому нули любого (не равного нулю тождественно) решения уравнения (1) изолированы и на любом отрезке оси $t$ их конечное число.

Из предложения 1 непосредственно вытекает

Предложение 2. *Из любых двух последовательных пересечений прямой $x=0$ фазовой кривой одно происходит при $y>0$, а другое при $y<0$.*

Обозначим через $\varphi$ полярный угол, отсчитываемый от положительного направления оси $y$ в сторону положительного направления оси $x$. Из предложения 2 вытекает

Предложение 3. *Между двумя последовательными пересечениями оси $x=0$ фазовой кривой величина $\varphi$ вдоль фазовой кривой увеличивается на $\pi$.*

Из этого предложения очевидно вытекает

Теорема. *На отрезке между двумя последовательными нулями любого решения уравнения* (1) *есть нуль любого другого решения.*

Действительно, заметающий полуплоскость луч должен в процессе движения обогнать любой луч, остающийся в этой полуплоскости.

Доказательство. Рассмотрим полярный угол $\varphi$ вдоль первого и второго решения (рис. 202), $\varphi=\alpha(t)$, $\varphi=\beta(t)$. Пусть нули первого решения соответствуют $t=t_1$ и $t_2$. Предположим, что для первого решения при $t=t_1$ $y>0$ (если это не так, изменим знак первого решения). Тогда мы можем считать $\alpha(t_1)=0$. По предложению 3

$\alpha(t_2)=\pi$. Мы можем считать, что $0\leqslant\beta(t_1)\leqslant\pi$ (если это не так, изменим знак второго решения).

Если решения линейно зависимы, то нули их совпадают и все доказано. Если же решения линейно независимы, то соответствующие им векторы на фазовой плоскости в любой момент времени тоже линейно независимы. Следовательно, в этом случае при любых $t$ $\beta(t)\neq\alpha(t)$.

Итак, $\beta(t_1)<\pi=\alpha(t_2)<\beta(t_2)$. Следовательно, на отрезке $[t_1, t_2]$ существует $t_3$, для которого $\beta(t_3)=\pi$; это и есть нуль второго решения.

Второе соображение, лежащее в основе теорем Штурма, состоит в том, что угловая скорость движения фазовой точки уравнения (6) вокруг начала координат может быть явно вычислена.

Предложение 4. *Обозначим через $\dot\varphi$ скорость изменения полярного угла $\varphi$ при движении фазовой точки $(x(t), y(t))$ уравнения* (1). *Тогда значение $\dot\varphi$ одинаково для всех векторов $(x, y)$, коллинеарных данному, и равно*

$$\dot\varphi=\frac{q(t)\,x^2+y^2}{x^2+y^2}.$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор фазовой точки, то удвоенная секториальная скорость равна $[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]$ и в то же время $-r^2\dot\varphi$ (плоскость ориентирована координатами $(x, y)$, а угол $\varphi$ отсчитывается от оси $y$ к оси $x$). Поэтому

$$\dot\varphi=-\frac{[\boldsymbol{r}, \dot{\boldsymbol{r}}]}{r^2}=-\frac{\begin{vmatrix} x & y \\ y & -qx \end{vmatrix}}{x^2+y^2},$$

что и требовалось доказать.

Из предложения 4 следует, что *при равных значениях полярного угла $\varphi\neq k\pi$ радиус-вектор фазовой точки того уравнения вращается быстрее, у которого коэффициент $q$ больше.*

Отсюда легко вытекает

Теорема сравнения. *Рассмотрим два уравнения вида* (6)

$$\ddot x+q(t)\,x=0, \qquad \ddot x+Q(t)\,x=0$$

*и предположим, что $Q\geqslant q$. Тогда на отрезке между любыми двумя последовательными нулями любого решения первого уравнения (с меньшим коэффициентом, $q$) есть нуль любого решения второго уравнения.*

Доказательство. Предположим вначале, что $Q$ строго больше $q$ при всех $t$. Обозначим через $\varphi=\alpha(t)$ полярный угол вдоль первого решения и через $\varphi=A(t)$ — вдоль второго. Как выше, мы можем считать, что $\alpha(t_1)=0$, $\alpha(t_2)=\pi$, $0<A(t_1)<\pi$. В начальный момент $t_1$ имеем $A(t_1)>\alpha(t_1)$. В дальнейшем, при $t_1<t<t_2$, $A(t)$ будет оставаться больше $\alpha(t)$. Действительно, если бы функция $\alpha$ в некоторый момент времени $\tau$ впервые обогнала бы $A$, то в этот момент времени значения $\alpha$ и $A$ совпали бы и были бы отличны от $k\pi$. Но тогда в момент обгона радиус-вектор догоняющей точки вращался бы строго медленнее ($\dot A(\tau)>\dot\alpha(\tau)$ согласно предложению 4, так как $Q>q$) и обгона не произошло бы. Итак, $A(t_2)>\alpha(t_2)=\pi$. Но $A(t_1)<\pi$. Значит, существует момент $t_3\in[t_1, t_2]$, где $A(t_3)=\pi$. Это и есть нуль второго уравнения.

Доказательство в случае $Q\geqslant q$ получается предельным переходом от случая $Q>q$.

Следствие. *Расстояние между любыми двумя последовательными нулями уравнения* (6)

а) *не больше* $\pi/\omega$, *если* $q(t) \geqslant \omega^2\ \forall t$,

б) *не меньше* $\pi/\Omega$, *если* $q(t) \leqslant \Omega^2\ \forall t$. *В частности, если* $q(t) \leqslant 0\ \forall t$, *то никакое решение уравнения* (6), *кроме тождественно равного нулю, не обращается в нуль дважды.*

Доказательство. а) Пусть строго между последовательными нулями можно вставить отрезок длины $\pi/\omega$. Для любого отрезка длины $\pi/\omega$ можно подобрать решение уравнения $\ddot{x}+\omega^2 x=0$ так, что этот отрезок будет ограничен последовательными нулями решения. На этом отрезке уравнение (6) с не меньшим чем $\omega^2$ коэффициентом $q$ не имеет нулей.

Это противоречит теореме сравнения. Значит, отрезка длины $\pi/\omega$ вставить между нулями уравнения (6) нельзя.

б) Доказывается аналогичным сравнением с уравнением $\ddot{x}+\Omega^2 x=0$.

Исследование собственных колебаний сплошных сред (закрепленной струны) приводит к следующей задаче Штурма — Лиувилля.

*Найти решения уравнения*

$$\ddot{x}+(q(t)+\lambda)x=0, \tag{7}$$

*обращающиеся в нуль на концах данного отрезка* $0 \leqslant t \leqslant l$.

Значения *спектрального параметра* $\lambda$, при которых такие (не тождественно равные нулю) решения существуют, называются *собственными значениями*, а сами решения — *собственными функциями.*

Задача 1. Найти собственные функции и числа в случае $q \equiv 0$.

*Ответ.* Собственные функции суть $\sin\sqrt{\lambda_k}\,t$ (рис. 203), а собственные числа $\lambda_k=k^2\lambda_1$, $\lambda_1=(\pi/l)^2$.


Рис. 203. Собственные колебания струны.

Решение. $\ddot{x}+\lambda x=0$, $x(0)=x(l)=0 \Rightarrow \lambda>0 \Rightarrow x=a\cos\sqrt{\lambda}t+b\sin\sqrt{\lambda}t$; $x(0)=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}l=k\pi \Rightarrow \lambda_k=k^2(\pi/l)^2$.

Теорема. *Для любой гладкой на отрезке* $[0, l]$ *функции* $q$ *задача Штурма — Лиувилля имеет бесконечное количество собственных чисел; соответствующие собственные функции имеют на этом отрезке как угодно много нулей.*

Доказательство. Рассмотрим решение уравнения (7) с начальным условием $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=1$. Обозначим через $\varphi=\alpha(t,\lambda)$ значение полярного угла вдоль фазовой кривой для этого решения; пусть $\alpha(0,\lambda)\equiv 0$. Функция $\alpha$ непрерывна. Рассмотрим значение $\alpha(l,\lambda)$ как функцию от $\lambda$. При $\lambda \to +\infty$ величина $\alpha(l,\lambda)$ стремится к бесконечности. Действительно, пусть $q+\lambda>\omega^2$. Если $\omega$ достаточно велико, то отрезок $\pi/\omega$ будет укладываться на отрезке $[0, l]$ как угодно большое число раз $k$. Значит, число нулей уравнения со столь большим $\lambda$ на этом отрезке не меньше $k$ (теорема сравнения). Следовательно, $\alpha(l,\lambda) \geqslant \pi k$ (предложение 3). Итак, $\alpha(l,\lambda) \to \infty$ при $\lambda \to +\infty$. Значит существует бесконечный набор собственных чисел $\lambda_k$, для которых $\alpha(l, \lambda_k)=\pi k$. Теорема доказана.

Задача 2. Доказать, что $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k/k^2=(\pi/l)^2$.

Задача 3. Перенести результаты на уравнения вида

$$(p\dot{x})^{\dot{}}+qx=0, \qquad p(t)>0 \quad \forall t.$$

Указание. Рассмотреть фазовую плоскость $(x, y)$, где $y=p\dot{x}$.

## § 28. Линейные уравнения с периодическими коэффициентами

Теория линейных уравнений с периодическими коэффициентами объясняет, как надо раскачиваться на качелях и почему верхнее, обычно неустойчивое, положение равновесия маятника становится устойчивым, если точка подвеса маятника совершает достаточно быстрые колебания по вертикали.

**1. Отображение за период.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{x}=v(t, x), \qquad v(t+T, x)=v(t, x), \qquad x\in\mathbf{R}^n, \tag{1}$$

с периодически зависящей от времени правой частью (рис. 204).

Пример 1. Движение маятника с периодически меняющимися параметрами (например, движение качелей) описывается системой уравнений вида (1):

$$\dot{x}_1=x_2, \qquad \dot{x}_2=-\omega^2(t)\,x_1; \qquad \omega(t+T)=\omega(t). \tag{2}$$

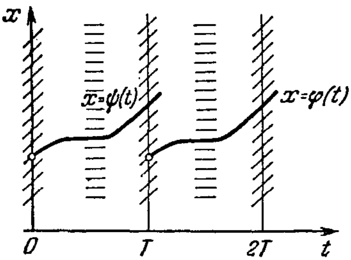

Рис. 204. Расширенное фазовое пространство уравнения с периодическими коэффициентами.

Мы будем предполагать, что все решения уравнения (1) продолжаются неограниченно: это заведомо так для линейных уравнений, которые нас особенно интересуют.

Периодичность правой части уравнения проявляется в специальных свойствах фазового потока уравнения (1).

Лемма 1. *Преобразование фазового пространства за время от $t_1$ до $t_2$: $g_{t_1}^{t_2}\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ не меняется при одновременном увеличении $t_1$ и $t_2$ на величину периода $T$ правой части уравнения* (1).

Доказательство. Нужно доказать, что сдвиг $\psi(t)=\varphi(t+T)$ решения $\varphi(t)$ на время $T$ является решением. Но сдвиг расширенного фазового пространства на $T$ вдоль оси времени переводит поле направлений уравнения (1) в себя (рис. 205). Поэтому сдвинутая на $T$ интегральная кривая уравнения (1) везде касается поля направлений и, следовательно, остается интегральной кривой.

Итак, $g_{t_1+T}^{t_2+T}=g_{t_1}^{t_2}$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим, в частности, преобразование $g_0^T$, осуществляемое фазовым потоком за время одного периода $T$. Это преобразование будет играть важную роль в дальнейшем; мы будем называть его *отображением за время* $T$ и обозначать (рис. 205)

$$A = g_0^T\colon\quad \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

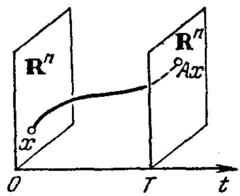


Рис. 205. Отображение монодромии

Пример 2. Для систем

$$\dot{x}_1 = x_2,\quad \dot{x}_2 = -x_1;\qquad \dot{x}_1 = x_1,\quad \dot{x}_2 = -x_2,$$

которые можно считать периодическими с любым периодом $T$, отображение $A$ есть поворот и гиперболический поворот соответственно.

Лемма 2. *Преобразования* $g_0^{nT}$ *образуют группу* $g_0^{nT} = A^n$ *Кроме того,* $g_0^{nT+s} = g_0^s g_0^{n\,T}$.

Доказательство. Согласно лемме 1 $g_{nT}^{nT+s} = g_0^s$. Поэтому $g_0^{nT+s} = g_{nT}^{nT+s} g_0^{nT} = g_0^s g_0^{nT}$. Полагая $s = T$, находим $g_0^{(n+1)T} = A g_0^{nT}$, откуда по индукции $g_0^{nT} = A^n$.

Лемма доказана.

Всевозможным свойствам решений уравнения (1) соответствуют аналогичные свойства отображения $A$ за период.

Теорема. 1) *Точка* $\boldsymbol{x}_0$ *есть неподвижная точка отображения* $A$ ($A\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}_0$) *тогда и только тогда, когда решение с начальным условием* $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0$ *есть периодическое, с периодом* $T$.

2) *Периодическое решение* $\boldsymbol{x}(t)$ *устойчиво по Ляпунову (асимптотически устойчиво) тогда и только тогда, когда неподвижная точка* $\boldsymbol{x}_0$ *отображения* $A$ *устойчива по Ляпунову (асимптотически устойчива)* *).

3) *Если система* (1) *линейна, т. е.* $\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{V}(t)\boldsymbol{x}$ — *линейная функция* $\boldsymbol{x}$, *то отображение* $A$ *линейно.*

4) *Если, кроме того, след линейного оператора* $\boldsymbol{V}(t)$ *равен нулю, то отображение* $A$ *сохраняет объем:* $\det A = 1$.

Доказательство. Утверждения 1) и 2) вытекают из соотношения $g_0^{T+s} = g_0^s A$ и из непрерывной зависимости решения от начальных условий на отрезке $[0, T]$.

Утверждение 3) вытекает из того, что сумма решений линейной системы есть снова решение.

Утверждение 4) вытекает из теоремы Лиувилля.

**2. Условия устойчивости.** Применим доказанную теорему к отображению $A$ фазовой плоскости $x_1$, $x_2$ на себя, соответствующему системе (2). Так как система (2) линейна и след матрицы правой части равен 0, получаем

Следствие. *Отображение* $A$ *линейно и сохраняет площади* ($\det A = 1$). *Для устойчивости нулевого решения системы уравнений* (2) *необходима и достаточна устойчивость отображения* $A$.

Задача 1. Доказать, что поворот плоскости — устойчивое отображение, а гиперболический поворот — неустойчивое.

*) Неподвижная точка $\boldsymbol{x}_0$ отображения $A$ называется *устойчивой по Ляпунову* (соответственно *асимптотически устойчивой*), если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что из $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta$ вытекает $|A^n\boldsymbol{x} - A^n\boldsymbol{x}_0| < \varepsilon$ для всех $0 < n < \infty$ сразу (соответственно еще $A^n\boldsymbol{x} - A^n\boldsymbol{x}_0 \to 0$ при $n \to \infty$).

Изучим теперь подробнее линейные отображения плоскости на себя, сохраняющие площадь.

Теорема. *Пусть $A$ — матрица сохраняющего площадь линейного отображения плоскости на себя* ($\det A = 1$). *Тогда отображение $A$ устойчиво, если $|\operatorname{tr} A| < 2$, и неустойчиво, если $|\operatorname{tr} A| > 2$.*

Доказательство. Пусть $\lambda_1$, $\lambda_2$ — собственные числа $A$. Они удовлетворяют характеристическому уравнению $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + 1 = 0$ с вещественными коэффициентами

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \operatorname{tr} A,$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \det A = 1.$$

Корни $\lambda_1$, $\lambda_2$ этого вещественного квадратного уравнения вещественны при $|\operatorname{tr} A| > 2$ и комплексно сопряжены при $|\operatorname{tr} A| < 2$ (рис. 206). В первом случае одно из собственных чисел больше, а другое меньше 1 по модулю; отображение $A$ есть гиперболический поворот и неустойчиво. Во втором случае собственные числа лежат на единичной окружности:

$$1 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2.$$

Отображение $A$ эквивалентно повороту на угол $\alpha$ (где $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$), т. е. становится поворотом при соответствующем выборе евклидовой структуры на плоскости (почему?). Итак, оно устойчиво.

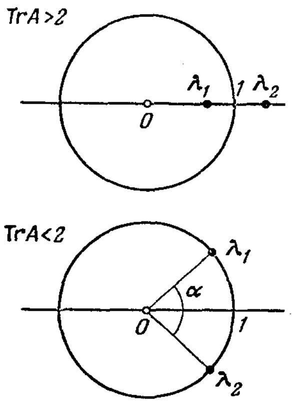


Рис. 206. Собственные числа монодромии.

Теорема доказана.

Таким образом, весь вопрос об устойчивости нулевого решения системы (2) свелся к вычислению следа матрицы $A$. К сожалению, вычислить этот след явно удается лишь в специальных случаях. Его всегда можно найти приближенно, численно интегрируя уравнение на отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$. В важном случае, когда $\omega(t)$ близка к постоянной, помогают простые общие соображения.

**3. Сильно устойчивые системы.** Рассмотрим линейную систему (1) с двумерным фазовым пространством (т. е. с $n = 2$). Такая система называется *гамильтоновой*, если дивергенция $\boldsymbol{v}$ равна нулю. Для гамильтоновых систем, как указано выше, фазовый поток сохраняет площади: $\det A = 1$.

Определение. Нулевое решение линейной гамильтоновой системы *сильно устойчиво*, если оно устойчиво и у всякой близкой линейной гамильтоновой системы нулевое решение тоже устойчиво.

Из предыдущих двух теорем вытекает

Следствие. *Если $|\operatorname{tr} A| < 2$, то нулевое решение сильно устойчиво.*

Ибо если $|\operatorname{tr} A| < 2$, то для отображения $A'$, соответствующего достаточно близкой системе, тоже выполнено условие $|\operatorname{tr} A'| < 2$.

Применим это к системе с почти постоянными коэффициентами. Рассмотрим, например, уравнение

$$\ddot{x} = -\omega^2 (1 + \varepsilon a(t))\, x, \qquad \varepsilon \ll 1, \tag{3}$$

где $a(t+2\pi) = a(t)$, например, $a(t) = \cos t$ (маятник, частота которого колеблется около $\omega$ с малой амплитудой и с периодом $2\pi$)*).

Каждую систему (3) будем изображать точкой на плоскости параметров $\varepsilon$, $\omega$ (рис. 207). Очевидно, устойчивые системы с $|\mathrm{tr}\, A| < 2$ образуют на плоскости $(\omega, \varepsilon)$ открытое множество, так же как и неустойчивые системы с $|\mathrm{tr}\, A| > 2$.

Граница устойчивости дается уравнением $|\mathrm{tr}\, A| = 2$.

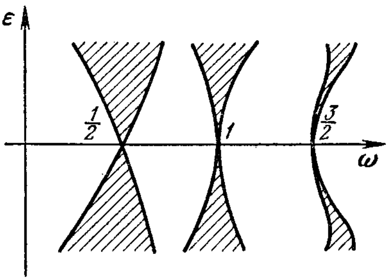


Рис. 207. Область неустойчивости при параметрическом резонансе.

Теорема. *Все точки оси* $\omega$, *исключая целые и полуцелые точки* $\omega = k/2$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *соответствуют сильно устойчивым системам* (3).

Таким образом, множество неустойчивых систем может подходить к оси $\omega$ только в точках $\omega = k/2$. Иными словами, раскачать качели малым периодическим изменением длины можно лишь в том случае, когда один период изменения длины близок к целому числу полупериодов собственных колебаний,— результат, всем известный из эксперимента.

Доказательство сформулированной теоремы основано на том, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (3) имеет постоянные коэффициенты и явно решается.

Задача 1. Вычислить для системы (3) с $\varepsilon = 0$ матрицу преобразования $A$ за период $T = 2\pi$ в базисе $(x, \dot{x})$.

Решение. Общее решение:

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Частное решение с начальным условием $x = 1$, $\dot{x} = 0$:

$$x = \cos \omega t, \qquad \dot{x} = -\omega \sin \omega t.$$

Частное решение с начальным условием $x = 0$, $\dot{x} = 1$:

$$x = (\sin \omega t)/\omega \qquad \dot{x} = \cos \omega t.$$

*Ответ.* $A = \begin{pmatrix} \cos 2\pi\omega & \sin 2\pi\omega/\omega \\ -\omega \sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{pmatrix}.$

Поэтому $|\mathrm{tr}\, A| = |2 \cos 2\omega\pi| < 2$, если $\omega \neq k/2$, $k = 0, 1, \ldots$, и теорема вытекает из предыдущего следствия.

Более внимательный анализ **) показывает, что, вообще говоря (и, в частности, при $a(t) = \cos t$), вблизи точек $\omega = k/2$, $k = 1, 2, \ldots$, область

*) В случае $a(t) = \cos t$ уравнение (3) называется *уравнением Матье*.

**) См., например, разобранную ниже задачу 1 п. 4.

неустойчивости (заштрихованная на рис. 207) действительно подходит к оси $\omega$.

Таким образом, при некоторых соотношениях между частотой изменения параметров и собственной частотой качелей ($\omega \approx k/2$, $k=1, 2, \ldots$) нижнее положение равновесия идеализированных качелей (3) неустойчиво и они раскачиваются при сколь угодно малом периодическом изменении длины.

Это явление называется *параметрическим резонансом*. Характерной особенностью параметрического резонанса является то, что он сильнее всего проявляется в случае, когда частота изменения параметров $\nu$ (в уравнении (3) частота $\nu$ равна 1) вдвое больше собственной частоты $\omega$.

Замечание. Теоретически параметрический резонанс наблюдается при бесконечном наборе соотношений $\omega/\nu \approx k/2$, $k=1, 2, \ldots$ Практически наблюдаемы обычно лишь случаи, когда $k$ невелико ($k=1$, 2, реже 3). Дело в том, что

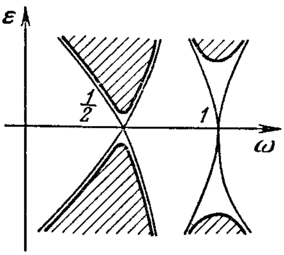

Рис. 208. Влияние малого трения на область неустойчивости.

а) при больших $k$ область неустойчивости подходит к оси $\omega$ узким языком и для резонансной частоты $\omega$ получаются очень жесткие пределы ($\sim \varepsilon^k$ для $a(t)=\cos t$ в (3));

б) сама неустойчивость слабо выражена при больших $k$, так как величина $|\operatorname{tr} A|-2$ невелика и собственные числа близки к 1 при больших $k$;

в) сколь угодно малое трение приводит к тому, что для возникновения параметрического резонанса $k$-го порядка имеется минимальное значение амплитуды $\varepsilon_k$: при меньших $\varepsilon$ колебания затухают. С ростом $k$ $\varepsilon_k$ быстро растет (рис. 208).

Заметим также, что для уравнения (3) в неустойчивом случае величина $x$ растет неограниченно. В реальных системах колебания достигают лишь конечной амплитуды, так как при больших $x$ само линеаризованное уравнение (3) теряет силу и нужно учитывать нелинейные эффекты.

**4. Вычисления.**

Задача 1. Найти вид областей устойчивости на плоскости $\varepsilon$, $\omega$ для системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} = -f(t)\,x, \qquad f(t+2\pi)=f(t), \tag{4}$$

$$f(t)=\begin{cases} \omega+\varepsilon & \text{при } 0 \leqslant t < \pi, \\ \omega-\varepsilon & \text{при } \pi \leqslant t < 2\pi, \end{cases} \qquad \varepsilon \ll 1.$$

Решение. Из решения предыдущей задачи (1 п. 3) следует, что $A=A_2A_1$, где

$$A_k=\begin{pmatrix} c_k & s_k/\omega_k \\ -\omega_k s_k & c_k \end{pmatrix}, \quad c_k=\cos \pi\omega_k, \quad s_k=\sin \pi\omega_k, \quad \omega_{1,2}=\omega \pm \varepsilon.$$

Поэтому граница зоны устойчивости имеет уравнение

$$|\operatorname{tr} A| = |2c_1c_2 - (\omega_1/\omega_2 + \omega_2/\omega_1)\, s_1 s_2| = 2. \qquad (5)$$

Так как $\varepsilon \ll 1$, имеем $\omega_1/\omega_2 = (\omega+\varepsilon)/(\omega-\varepsilon) \approx 1$.

Введем обозначение $\omega_1/\omega_2 + \omega_2/\omega_1 = 2(1+\Delta)$. Тогда, как легко сосчитать, $\Delta = 2\varepsilon^2/\omega^2 + O(\varepsilon^4) \ll 1$. Пользуясь соотношениями $2c_1c_2 = \cos 2\pi\varepsilon + \cos 2\pi\omega$, $2s_1s_2 = \cos 2\pi\varepsilon - \cos 2\pi\omega$, перепишем уравнение (5) в виде

$$-\Delta \cos 2\pi\varepsilon + (2+\Delta)\cos 2\pi\omega = \pm 2$$

или

$$\cos 2\pi\omega = (2+\Delta\cos 2\pi\varepsilon)/(2+\Delta), \qquad (6_1)$$

$$\cos 2\pi\omega = (-2+\Delta\cos 2\pi\varepsilon)/(2+\Delta). \qquad (6_2)$$

В первом случае $\cos 2\pi\omega \approx 1$. Поэтому положим $\omega = k + a$, $|a| \ll 1$; $\cos 2\pi\omega = \cos 2\pi a = 1 - 2\pi^2 a^2 + O(a^4)$. Перепишем уравнение $(6_1)$ в виде

$$\cos 2\pi\omega = 1 - \frac{\Delta}{2+\Delta}(1-\cos 2\pi\varepsilon)$$

или

$$2\pi^2 a^2 + O(a^4) = \Delta\pi^2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4).$$

Подставляя значение $\Delta = (2\varepsilon^2/\omega^2) + O(\varepsilon^4)$, находим $a = \pm\varepsilon^2/\omega^2 + o(\varepsilon^2)$, т. е. $\omega = k \pm \varepsilon^2/k^2 + o(\varepsilon^2)$ (рис. 209).

Аналогично решается уравнение $(6_2)$; в результате получаем

$$\omega = \varkappa \pm \varepsilon/(\pi\varkappa) + o(\varepsilon), \quad \varkappa = k + 1/2.$$

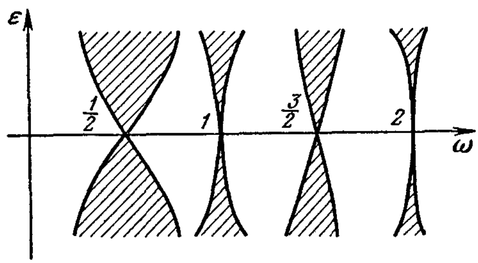


Рис. 209. Область неустойчивости для уравнения (4).

Задача 2. Может ли верхнее, обычно неустойчивое, положение равновесия маятника стать устойчивым, если точка подвеса колеблется в вертикальном направлении?

Решение. Пусть длина маятника $l$, амплитуда колебаний точки подвеса $a \ll l$, период колебаний точки подвеса $2\tau$, причем в течение каждого полупериода ускорение точки подвеса постоянно и равно $\pm c$ (тогда $c = 8a/\tau^2$). Оказывается, при достаточно быстрых колебаниях подвеса ($\tau \ll 1$) верхнее положение равновесия становится устойчивым. Уравнение движения можно записать в виде $\ddot{x} = (\omega^2 \pm \alpha^2)x$ (знак меняется через время $\tau$), где $\omega^2 = g/l$, $\alpha^2 = c/l$. Если колебания подвеса достаточно быстры, то $\alpha^2 > \omega^2$ ($\alpha^2 = 8a/(l\tau^2)$).

Аналогично предыдущей задаче, $A = A_2 A_1$, где

$$A_1 = \begin{pmatrix} \operatorname{ch} k\tau & k^{-1}\operatorname{sh} k\tau \\ k\operatorname{sh} k\tau & \operatorname{ch} k\tau \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \cos\Omega\tau & \Omega^{-1}\sin\Omega\tau \\ -\Omega\sin\Omega\tau & \cos\Omega\tau \end{pmatrix},$$

$$k^2 = \alpha^2 + \omega^2, \qquad \Omega^2 = \alpha^2 - \omega^2.$$

Условие устойчивости $|\operatorname{tr} A| < 2$ имеет поэтому вид

$$|2\operatorname{ch} k\tau\cos\Omega\tau + (k/\Omega - \Omega/k)\operatorname{sh} k\tau\sin\Omega\tau| < 2. \qquad (7)$$

Покажем, что условие это выполнено при достаточно быстрых колебаниях точки подвеса, т. е. когда $c \gg g$. Введем безразмерные переменные $\varepsilon$, $\mu$:

$$a/l = \varepsilon^2 \ll 1, \qquad g/c = \mu^2 \ll 1.$$

Тогда $k\tau = 2\sqrt{2}\,\varepsilon\sqrt{1+\mu^2}$, $\Omega\tau = 2\sqrt{2}\,\varepsilon\sqrt{1-\mu^2}$, $k/\Omega - \Omega/k = 2\mu^2 + O(\mu^4)$.

Поэтому при малых $\varepsilon$, $\mu$ справедливы разложения с точностью $o(\varepsilon^4 + \mu^4)$:

$$\operatorname{ch} k\tau = 1 + 4\varepsilon^2(1+\mu^2) + 2\varepsilon^4/3 + \ldots, \qquad \cos\Omega\tau = 1 - 4\varepsilon^2(1-\mu^2) + 8\varepsilon^4/3 + \ldots,$$

$$(k/\Omega - \Omega/k)\operatorname{sh} k\tau\sin\Omega\tau = 16\varepsilon^2\mu^2 + \ldots$$

Итак, условие устойчивости (7) принимает вид

$$2(1-16\varepsilon^4+16\varepsilon^4/3+8\varepsilon^2\mu^2+\ldots)+16\varepsilon^2\mu^2<2.$$

Пренебрегая малыми высшего порядка, находим $(2/3)\,16\varepsilon^4 \geqslant 32\mu^2\varepsilon^2$ или $\mu < \varepsilon/\sqrt{3}$, или еще $g/c < a/(3l)$. Это условие можно переписать в виде $N > \sqrt{3/32}\,\omega l/a \approx 0{,}3\,\omega l/a$, где $N = l/(2\tau)$ — число колебаний точки подвеса в единицу времени. Например, если длина маятника $l=20$ см, а амплитуда колебаний точки подвеса $a=1$ см, то $N > 0{,}31\sqrt{980/20}\cdot 20 \approx 43$ (колебаний в секунду) В частности, верхнее положение равновесия устойчиво, если число колебаний подвеса в секунду больше 50.

## § 29. Вариация постоянных

При исследовании уравнений, близких к уже исследованным, «невозмущенным» уравнениям, часто полезен следующий прием. Пусть $c$ — первый интеграл «невозмущенного» уравнения. Тогда для близких «возмущенных» уравнений функция $c$ уже не будет первым интегралом. Однако часто удается узнать (точно или приближенно), как меняются со временем значения $c(\varphi(t))$, где $\varphi$ — решение «возмущенного» уравнения. В частности, если исходное уравнение — линейное однородное, а возмущенное — неоднородное, то этот прием приводит к явной формуле для решения, причем в силу линейности уравнения никакой «малости» возмущения не требуется.

**1. Простейший случай.** Рассмотрим простейшее линейное неоднородное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \quad t \in I, \tag{1}$$

соответствующее простейшему однородному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{x}} = 0. \tag{2}$$

Уравнение (1) решается квадратурой:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) = \boldsymbol{\varphi}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

**2. Общий случай.** Рассмотрим линейное неоднородное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\,\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}(t), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n, \quad t \in I, \tag{4}$$

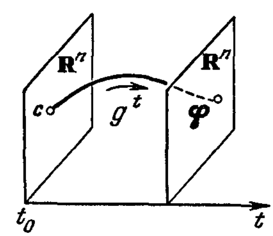

Рис. 210. Координаты точки $c$ являются первыми интегралами однородного уравнения.

соответствующее однородному уравнению

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\,\boldsymbol{x}. \tag{5}$$

Предположим, что мы умеем решать однородное уравнение (5) и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ — его решение. Выберем начальные условия $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{\varphi}(t_0)$ в качестве выпрямляющих интегральные кривые уравнения (5) координат $(\boldsymbol{c}, t)$ в расширенном фазовом пространстве (рис. 210). В новых координатах уравнение (5) примет простейший вид (2). Переход к выпрямляющим координатам осуществляется линейным по $\boldsymbol{x}$

преобразованием. Поэтому в новых координатах неоднородное уравнение (4) примет простейший вид (1), и мы его сможем решить.

**3. Вычисления.** Будем искать решение неоднородного уравнения (4) в виде

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=g^t\boldsymbol{c}(t), \qquad \boldsymbol{c}\colon I\to\mathbf{R}^n, \tag{6}$$

где $g^t\colon \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ — линейный оператор преобразования за время от $t_0$ до $t$ для однородного уравнения (5).

Дифференцируя по $t$, находим

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}=\dot{g}^t\boldsymbol{c}+g^t\dot{\boldsymbol{c}}=Ag^t\boldsymbol{c}+g^t\dot{\boldsymbol{c}}=A\boldsymbol{\varphi}+g^t\dot{\boldsymbol{c}}.$$

Подставляя в уравнение (4), находим $g^t\dot{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{h}(t)$. Итак, доказана

Теорема. *Формула* (6) *дает решение уравнения* (4), *если и только если* $\boldsymbol{c}$ *удовлетворяет уравнению* $\dot{\boldsymbol{c}}=\boldsymbol{f}(t)$, *где* $\boldsymbol{f}(t)=(g^t)^{-1}\boldsymbol{h}(t)$.

Последнее уравнение имеет простейший вид (1). Применяя формулу (3), получаем

Следствие. *Решение неоднородного уравнения* (4) *с начальным условием* $\boldsymbol{\varphi}(t_0)=\boldsymbol{c}$ *имеет вид*

$$\boldsymbol{\varphi}(t)=g^t\left(\boldsymbol{c}+\int_{t_0}^{t}(g^\tau)^{-1}\boldsymbol{h}(\tau)\,d\tau\right).$$

Замечание. В координатной форме доказанную теорему можно сформулировать так:

*Чтобы решить линейное неоднородное уравнение* (4), *зная фундаментальную систему решений однородного уравнения* (5), *достаточно подставить в неоднородное уравнение линейную комбинацию решений фундаментальной системы, считая коэффициенты неизвестными функциями времени. Для определения этих коэффициентов получится тогда простейшее уравнение* (1).

Задача 1. Решить уравнение $\ddot{x}+x=f(t)$.

Решение. Составим однородную систему двух уравнений:

$$\dot{x}_1=x_2, \qquad \dot{x}_2=-x_1.$$

Ее фундаментальная система решений известна:

$$(x_1=\cos t,\quad x_2=-\sin t); \qquad (x_1=\sin t,\quad x_2=\cos t).$$

По общему правилу ищем решение в виде

$$x_1=c_1(t)\cos t+c_2(t)\sin t, \qquad x_2=-c_1(t)\sin t+c_2(t)\cos t.$$

Для определения $c_1$ и $c_2$ получаем систему

$$\dot{c}_1\cos t+\dot{c}_2\sin t=0, \qquad -\dot{c}_1\sin t+\dot{c}_2\cos t=f(t).$$

Следовательно,

$$\dot{c}_1=-f(t)\sin t, \qquad \dot{c}_2=f(t)\cos t.$$

*Ответ.* $x(t)=\left[x(0)-\int_0^t f(\tau)\sin\tau\,d\tau\right]\cos t+\left[\dot{x}(0)+\int_0^t f(\tau)\cos\tau\,d\tau\right]\sin t.$

*Глава 4*

# Доказательства основных теорем

В этой главе доказываются теоремы о существовании, единственности, непрерывности и дифференцируемости решений обыкновенных дифференциальных уравнений, а также теоремы о выпрямлении векторного поля и поля направлений.

Доказательства содержат также способ приближенного построения решений.

## § 30. Сжатые отображения

Рассмотренный ниже метод отыскания неподвижной точки отображения метрического пространства в себя применяется далее для построения решений дифференциальных уравнений.

**1. Определение.** Пусть $A$: $M \to M$ — отображение метрического пространства $M$ (с метрикой $\rho$) в себя. Отображение $M$ называется *сжатым*, если существует постоянная $\lambda$, $0<\lambda<1$, такая, что

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \lambda\rho(x, y) \qquad \forall x,\ y \in M. \tag{1}$$

Пример 1. Пусть $A$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — вещественная функция вещественного переменного (рис. 211). Если производная $A$ по модулю всюду меньше 1, то отображение $A$ может и не быть сжатым. Но оно будет сжатым, если $|A'| \leqslant \lambda < 1$.

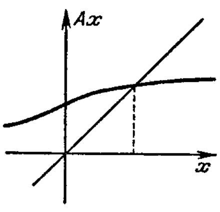


Рис. 211. Неподвижная точка сжатого отображения.

Пример 2. Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор. Если все собственные числа $A$ лежат строго внутри единичного круга, то в $\mathbf{R}^n$ существует такая евклидова метрика (функция Ляпунова, см. § 22), что $A$ — сжатое отображение.

Задача 1. Какие из следующих отображений прямой (с обычной метрикой) в себя сжаты?

1) $y = \sin x$; 2) $\sqrt{x^2+1}$, 3) $y = \operatorname{arctg} x$.

Задача 2. Можно ли заменить знак $\leqslant$ в неравенстве (1) на $<$?

**2. Теорема о сжатых отображениях.** Точка $x \in M$ называется *неподвижной точкой* отображения $A$: $M \to M$, если $Ax = x$.

*Пусть $A$: $M \to M$ — сжатое отображение полного метрического пространства $M$ в себя. Тогда $A$ имеет неподвижную точку, и притом только одну. Для любой точки $x$ из $M$ последовательность образов точки $x$ при применении $A$* (рис. 212)

$$x, \quad Ax, \quad A^2x, \quad A^3x, \ \ldots$$

*сходится к неподвижной точке.*

Доказательство. Пусть $\rho(x, Ax)=d$. Тогда

$$\rho(A^n x, A^{n+1}x) \leqslant \lambda^n d.$$

Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ сходится. Поэтому последовательность $A^n x$, $n=0, 1, 2, \ldots$, является последовательностью Коши. Пространство $M$ полно. Поэтому существует предел $X=\lim\limits_{n\to\infty} A^n x$.

Покажем, что $X$ — неподвижная точка $A$. Заметим, что всякое сжатое отображение непрерывно (можно взять $\delta=\varepsilon$). Поэтому

$$AX=A\lim_{n\to\infty} A^n x=\lim_{n\to\infty} A^{n+1}x=X.$$

Покажем, что всякая неподвижная точка $Y$ совпадает с $X$. Действительно,

$$\rho(X, Y)=\rho(AX, AY) \leqslant \lambda\rho(X, Y), \qquad \lambda<1 \Rightarrow \rho(X, Y)=0.$$

**3. Замечание.** Точки $x$, $Ax$, $A^2x$, ... называются *последовательными приближениями* к $X$. Пусть $x$ — приближение к неподвижной точке $X$

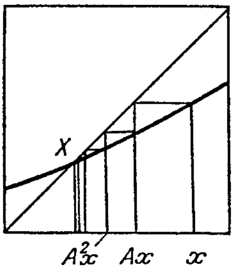


Рис. 212. Последовательность образов точки $x$ при повторении сжатого отображения $A$.

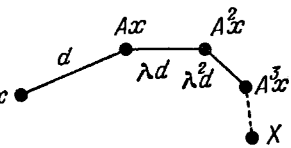


Рис. 213. Оценка точности приближения $x$ к неподвижной точке $X$.

сжатого отображения $A$. Точность этого приближения легко оценить через расстояние $d$ между точками $x$ и $Ax$:

$$\rho(x, X) \leqslant \frac{d}{1-\lambda},$$

ибо $d+\lambda d+\lambda^2 d+\ldots=\dfrac{d}{1-\lambda}$ (рис. 213).

## § 31. Доказательство теорем существования и непрерывной зависимости от начальных условий

Здесь строится такое сжатое отображение полного метрического пространства, что его неподвижная точка определяет решение данного дифференциального уравнения.

**1. Последовательные приближения Пикара.** Рассмотрим дифференциальное уравнение $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$, заданное векторным полем $\boldsymbol{v}$

в некоторой области расширенного фазового пространства $\mathbf{R}^{n+1}$ (рис. 214).

Назовем *отображением Пикара* отображение $A$, переводящее функцию $\varphi\colon t \mapsto \boldsymbol{x}$ в функцию $A\varphi\colon t \mapsto \boldsymbol{x}$, где

$$(A\varphi)(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\tau, \varphi(\tau))\, d\tau.$$

Геометрически переход от $\varphi$ к $A\varphi$ (рис. 215) означает построение по кривой $(\varphi)$ новой кривой $(A\varphi)$, касательная которой при каждом $t$

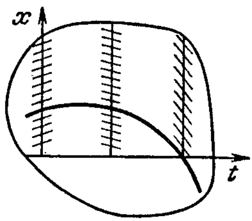


Рис. 214. Интегральная кривая уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$.

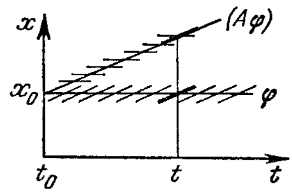


Рис. 215. Отображение Пикара $A$.

параллельна данному полю направлений, но не на самой кривой $(A\varphi)$ — тогда $A\varphi$ было бы решением,— а в соответствующей точке кривой $(\varphi)$. Имеем

$$\left(\begin{array}{c}\varphi \text{ — } \textit{решение} \\ \textit{с начальным условием} \\ \varphi(t_0) = \boldsymbol{x}_0\end{array}\right) \Leftrightarrow (\varphi = A\varphi).$$

Вдохновляясь теоремой о сжатых отображениях, рассмотрим последовательность *приближений Пикара* $\varphi$, $A\varphi$, $A^2\varphi$, ... (начав, скажем, с $\varphi = \boldsymbol{x}_0$).

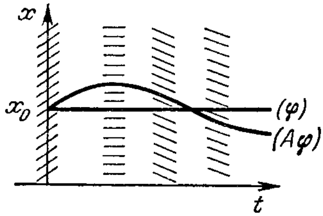


Рис. 216. Приближения Пикара для уравнения $\dot{x} = f(t)$.

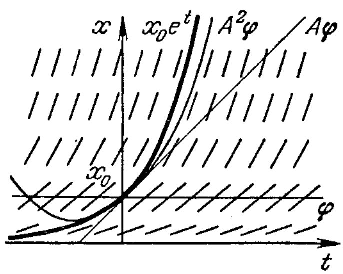


Рис. 217. Приближение Пикара для уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$.

Пример 1. $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t)$ (рис. 216). $(A\varphi)(t) = \boldsymbol{x}_0 + \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{f}(\tau)\, d\tau$. В этом случае уже первый шаг приводит к точному решению.

Пример 2. $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}$, $t_0 = 0$ (рис. 217). Сходимость приближений в этом случае можно усмотреть непосредственно; в точке $t$

$$\begin{aligned}
&\varphi = 1,\\
&A\varphi = 1 + \int_0^t d\tau = 1 + t,\\
&A^2\varphi = 1 + \int_0^t (1+\tau)\, d\tau = 1 + t + t^2/2,\\
&\dots\\
&A^n\varphi = 1 + t + t^2/2 + \ldots + t^n/n!,\\
&\lim_{n\to\infty} A^n\varphi = e^t.
\end{aligned}$$

Замечание 1. Таким образом, два определения экспоненты

$$1)\ e^t = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n, \qquad 2)\ e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ldots$$

соответствуют двум способам приближенного решения простейшего дифференциального уравнения $\dot{x} = x$: способу ломаных Эйлера и последовательным приближениям Пикара. Исторически исходное определение экспоненты было просто:

3) $e^t$ есть решение уравнения $\dot{x} = x$ с начальным условием $x(0) = 1$.

Замечание 2. Аналогичным образом можно доказать сходимость приближений для уравнения $\dot{x} = kx$. Причина сходимости последовательных приближений в общем случае заключается в том, что уравнение $\dot{x} = kx$ «самое плохое»: последовательные приближения для любого уравнения сходятся не медленнее, чем для некоторого уравнения вида $\dot{x} = kx$.

Для доказательства сходимости последовательных приближений мы построим полное метрическое пространство, в котором отображение Пикаро сжато. Вначале напомню некоторые факты из курса анализа.

**2. Предварительные оценки.**

1) *Норма.* Будем обозначать норму вектора $\boldsymbol{x}$ евклидова пространства $\mathbf{R}^n$ через $|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$. Пространство $\mathbf{R}^n$ с метрикой $\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|$ — полное метрическое пространство.

Отметим два важных неравенства: неравенство треугольника

$$|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}| \leqslant |\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{y}|$$

и неравенство Шварца

$$|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leqslant |\boldsymbol{x}|\,|\boldsymbol{y}|\ ^{*)}.$$

2) *Векторный интеграл.* Пусть $\boldsymbol{f}\colon [a, b] \to \mathbf{R}^n$ — вектор-функция со значениями в $\mathbf{R}^n$, непрерывная на $[a, b]$. Вектор-интеграл

$$\boldsymbol{I} = \int_a^b \boldsymbol{f}(t)\, dt \in \mathbf{R}^n$$

определяется обычным образом (с помощью интегральных сумм).

---

*) Напомним доказательство этих неравенств. Проведем через векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ евклидова пространства двумерную плоскость. Эта плоскость наследует из $\mathbf{R}^n$ евклидову структуру. На евклидовой плоскости оба неравенства известны из элементарной геометрии. Тем самым эти неравенства доказаны и в любом евклидовом пространстве, например в $\mathbf{R}^n$. В частности, мы доказали без всяких вычислений, что

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i^2, \qquad \left|\int_a^b fg\, dt\right|^2 \leqslant \int_a^b f^2\, dt \int_a^b g^2\, dt.$$

Лемма.

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_a^b |f(t)|\,dt\right|. \tag{1}$$

Доказательство. Сравним интегральные суммы с помощью неравенства треугольника: $|\sum f(t_i)\Delta_i| \leqslant \sum |f(t_i)|\,|\Delta_i|$, что и требовалось доказать.

3) *Норма оператора.* Пусть $A\colon \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор из одного евклидова пространства в другое. Мы будем обозначать его норму через $|A| = \sup\limits_{x \in \mathbf{R}^n \setminus 0} \dfrac{|Ax|}{|x|}$. Тогда

$$|A+B| \leqslant |A| + |B|, \quad |AB| \leqslant |A|\,|B|. \tag{2}$$

Множество линейных операторов из $\mathbf{R}^m$ в $\mathbf{R}^n$ становится полным метрическим пространством, если положить $\rho(A, B) = |A - B|$.

**3. Условие Липшица.** Пусть $A\colon M_1 \to M_2$ — отображение метрического пространства $M_1$ (с метрикой $\rho_1$) в метрическое пространство $M_2$ (с метрикой $\rho_2$) и $L$ — положительное вещественное число.

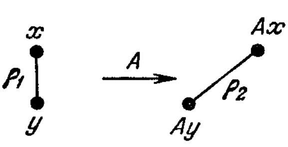


Рис. 218. Условие Липшица $\rho_2 \leqslant L\rho_1$.

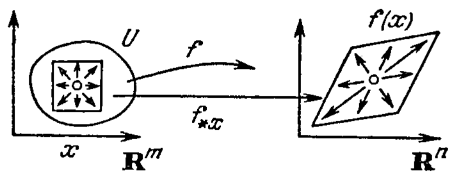


Рис. 219. Производная отображения $f$.

Определение. Отображение $A$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $L$ (пишется: $A \in \operatorname{Lip} L$), если оно увеличивает расстояние между любыми двумя точками $M_1$ не более чем в $L$ раз (рис. 218):

$$\rho_2(Ax, Ay) \leqslant L\rho_1(x, y) \qquad \forall x, y \in M_1.$$

Отображение $A$ *удовлетворяет условию Липшица*, если существует постоянная $L$ такая, что $A \in \operatorname{Lip} L$.

Задача 1. Удовлетворяют ли условию Липшица следующие отображения (метрика везде евклидова)?

1) $y = x^2$, $x \in \mathbf{R}$; 2) $y = \sqrt{x}$, $x > 0$; 3) $y = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

4) $y = \sqrt{x_1^2 - x_2^2}$, $x_1^2 \geqslant x_2^2$; 5) $y = \begin{cases} x \ln x, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$ 6) $y = x^2$, $x \in \mathbf{C}$, $|x| \leqslant 1$.

Задача 2. Докажите, что

*сжатость* $\Rightarrow$ *условие Липшица* $\Rightarrow$ *непрерывность.*

**4. Дифференцируемость и условие Липшица.** Пусть $f\colon U \to \mathbf{R}^n$ — гладкое (класса $C^r$, $r \geqslant 1$) отображение области $U$ евклидова пространства $\mathbf{R}^m$ в евклидово пространство $\mathbf{R}^n$ (рис. 219). Касательное пространство к евклидову пространству в каждой точке само имеет естественную евклидову структуру. Поэтому производная $f$ в точке $x \in U \subset \mathbb{R}^m$

$$f_{*x}\colon\ T_x\mathbb{R}^m \to T_{f(x)}\mathbb{R}^n$$

есть линейный оператор из одного евклидова пространства в другое. Очевидна

Теорема. *Непрерывно дифференцируемое отображение $f$ на всяком выпуклом компактном подмножестве $V$ области $U$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L$, равной верхней грани производной $f$ на $V$:*

$$L = \sup_{x \in V} |f_{*x}|.$$

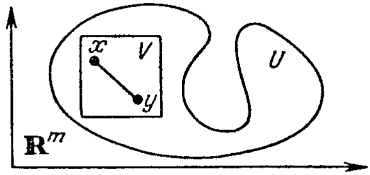


Рис. 220. Из непрерывной дифференцируемости вытекает выполнение условия Липшица.

Доказательство. Соединим точки $x, y \in V$ отрезком (рис. 220). $z(t) = x + t(y - x)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. По формуле Ньютона—Лейбница

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(f(z(\tau)))\, d\tau = \int_0^1 f_{*z(\tau)}\dot{z}(\tau)\, d\tau\ .$$

Из формул (1), (2) п. 2 и из того, что $\dot{z} = y - x$, имеем

$$\left| \int_0^1 f_{*z(\tau)}\dot{z}(\tau)\, d\tau \right| \leqslant \int_0^1 L|y - x|\, d\tau = L\,|y - x|,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Верхняя грань нормы производной $|f_*|$ на $V$ достигается. Действительно, по предположению $f \in C^1$, и, значит, производная $f_*$ непрерывна. Следовательно, $|f_*|$ достигает на компакте $V$ максимума $L$.

Приступая к доказательству сходимости пикаровских приближений, мы рассмотрим их в малой окрестности одной точки. Для описания этой окрестности мы используем следующие четыре числа.

**5. Величины $C$, $L$, $a'$, $b'$.** Пусть правая часть $v$ дифференциального уравнения

$$\dot{x} = v(t, x) \tag{3}$$

определена и дифференцируема (класса $C^r$, $r \geqslant 1$) в области $U$ расширенного фазового пространства: $U \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^n$. Мы фиксируем евклидову структуру в $\mathbb{R}^n$ и тем самым в $T_x\mathbb{R}^n$.

Рассмотрим любую точку $(t_0, x_0) \in U$ (рис. 221). Цилиндр

$$Ц = \{t, x\colon\ |t - t_0| \leqslant a, \quad |x - x_0| \leqslant b\}$$

при достаточно малых $a$ и $b$ лежит в области $U$. Обозначим через $C$

и $L$ верхние грани величин $|v|$ и $|v_*|$ *) на этом цилиндре. Они достигаются, так как цилиндр компактен: $|v| \leqslant C$, $|v_*| \leqslant L$.

Рассмотрим конус $К_0$ с вершиной $(t_0, x_0)$, раствором $C$ и высотой $a'$:

$$К_0 = \{t, x\colon\ |t-t_0| \leqslant a',\quad |x-x_0| \leqslant C\,|t-t_0|\}.$$

Если число $a'$ достаточно мало, то этот конус $К_0$ лежит внутри цилиндра Ц. Если числа $a'$, $b'>0$ достаточно малы, то внутри Ц лежит

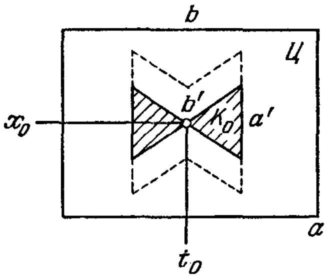


Рис. 221. Цилиндр Ц и конус $К_0$.

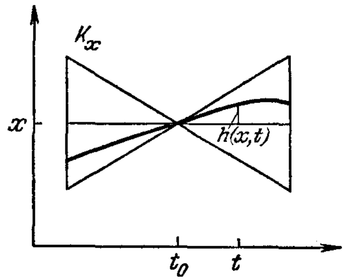


Рис. 222. Определение $h(t, x)$.

также всякий конус $К_x$, полученный из $К_0$ параллельным перенесением вершины в точку $(t_0, x)$, где $|x-x_0| \leqslant b'$.

Мы будем считать, что $a'$ и $b'$ выбраны столь малыми, что $К_x \subset$ Ц. Решение $\varphi$ уравнения (3) с начальным условием $\varphi(t_0)=x$ мы будем искать в виде $\varphi(t)=x+h(t, x)$ (рис. 222).

Соответствующая интегральная кривая лежит внутри конуса $К_x$.

**6. Метрическое пространство $M$.** Рассмотрим всевозможные непрерывные отображения $h$ цилиндра $|x-x_0| \leqslant b'$, $|t-t_0| \leqslant a'$ в евклидово пространство $\mathbf{R}^n$. Через $M$ мы обозначаем множество таких отображений, удовлетворяющих еще условию

$$|h(t, x)| \leqslant C\,|t-t_0| \tag{4}$$

(в частности, $h(t, x_0)=0$).

Введем в $M$ метрику $\rho$, полагая

$$\rho(h_1, h_2) = \|h_1-h_2\| = \max_{\substack{|x-x_0| \leqslant b' \\ |t-t_0| \leqslant a'}} |h_1(t, x)-h_2(t, x)|.$$

Теорема. *Множество $M$, снабженное метрикой $\rho$, является полным метрическим пространством.*

Доказательство. Равномерно сходящаяся последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции. Если допредельные функции удовлетворяли неравенству (4), то и предельная функция удовлетворяет неравенству (4) с той же постоянной $C$.

Заметим, что пространство $M$ зависит от трех положительных чисел: $a'$, $b'$, $C$.

---

*) Звездочкой здесь и далее обозначается производная (по $x$) при фиксированном $t$.

**7. Сжатое отображение $A$: $M \to M$.** Определим отображение $A$: $M \to M$, полагая *)

$$(Ah)(t, x) = \int_{t_0}^{t} v(\tau, x + h(\tau, x))\, d\tau. \tag{5}$$

Благодаря неравенству (4) точка $(\tau, x + h(x, \tau))$ принадлежит конусу $K_x$ и, следовательно, области определения поля $v$.

Т е о р е м а. *Если значение $a'$ достаточно мало, то формула* (5) *задает сжатое отображение пространства $M$ в себя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1. Покажем, что $A$ *переводит* $M$ *в себя.* Функция $Ah$ непрерывна, так как интеграл непрерывно зависящей от параметра непрерывной функции непрерывно зависит от параметра и от верхнего предела. Функция $Ah$ удовлетворяет неравенству (4), так как

$$|(Ah)(t, x)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} v(\ldots)\, d\tau \right| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} C\, dt \right| \leqslant C|t - t_0|.$$

Итак, $AM \subset M$.

2. Покажем, что *отображение $A$ сжато*:

$$\| Ah_1 - Ah_2 \| \leqslant \lambda \| h_1 - h_2 \|, \quad 0 < \lambda < 1.$$

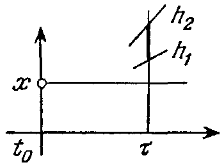

Рис. 223. Сравнение $v_1$ и $v_2$.

Для этого оценим значение $Ah_1 - Ah_2$ в точке $(t, x)$. Имеем (рис. 223)

$$(Ah_1 - Ah_2)(t, x) = \int_{t_0}^{t} (v_1 - v_2)\, d\tau,$$

где $v_i(\tau) = v(\tau, x + h_i(\tau, x))$, $i = 1, 2$.

Согласно теореме п. 4 функция $v(\tau, x)$ при фиксированном $\tau$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $L$ (по второму аргументу). Поэтому

$$|v_1(\tau) - v_2(\tau)| \leqslant L\, |h_1(\tau, x) - h_2(\tau, x)| \leqslant L\, \|h_1 - h_2\|.$$

Согласно лемме п. 2

$$|(Ah_1 - Ah_2)(t, x)| \leqslant \left| \int_{t_0}^{t} L\, \|h_1 - h_2\|\, d\tau \right| \leqslant La'\, \|h_1 - h_2\|.$$

При $La' < 1$ отображение сжато.

Теорема доказана.

**8. Теорема существования и единственности.**

С л е д с т в и е. *Пусть правая часть $v$ дифференциального уравнения* (3) *непрерывно дифференцируема в окрестности точки $(t_0, x_0)$ расширенного фазового пространства. Тогда у точки $t_0$ есть такая окрестность, что в этой окрестности определено решение уравнения* (3) *с начальным условием $\varphi(t_0) = x$, где $x$ — любая достаточно близкая к $x_0$ точка, причем это решение непрерывно зависит от начальной точки $x$.*

---

*) При сравнении с отображением Пикара п. 1 следует иметь в виду, что мы теперь ищем решение в виде $x + h$.

Доказательство. Сжатое отображение $A$, по теореме § 30, имеет неподвижную точку $h \in M$. Положим $g(t, x) = x + h(t, x)$. Тогда

$$g(t, x) = x + \int_{t_0}^{t} v(\tau, g(\tau, x))\, d\tau, \qquad \frac{\partial g(t, x)}{\partial t} = v(t, g(t, x)).$$

Мы видим, что $g$ при фиксированном $x$ удовлетворяет уравнению (3), а при $t = t_0$ — начальному условию $g(t, x_0) = x$. Функция $g$ непрерывна, так как $h \in M$.

Следствие доказано.

Итак, мы доказали теорему существования для уравнения (3) и предъявили решение, непрерывно зависящее от начальных условий.

Задача 1. Доказать теорему единственности.

Решение 1. Положим $b' = 0$ в определении $M$. Из единственности неподвижной точки сжатого отображения $A\colon M \to M$ следует единственность решения (с начальным условием $\varphi(t_0) = x_0$).

Решение 2. Пусть $\varphi_1$ и $\varphi_2$ — два решения с общим начальным условием $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, определенные при $|t - t_0| < \alpha$. Пусть $0 < \alpha' < \alpha$. Положим $\|\varphi\| = \max\limits_{|t-t_0|<\alpha'} |\varphi(t)|$. Имеем

$$\varphi_1(t) - \varphi_2(t) = \int_{t_0}^{t} v(\tau, \varphi_1(\tau)) - v(\tau, \varphi_2(\tau))\, d\tau.$$

При достаточно малом $\alpha'$ точки $(\tau, \varphi_1(\tau))$ и $(\tau, \varphi_2(\tau))$ лежат в цилиндре, где $v \in \mathrm{Lip}\, L$. Поэтому $\|\varphi_1 - \varphi_2\| \leqslant L\alpha' \|\varphi_1 - \varphi_2\|$, откуда при $L\alpha' < 1$ вытекает $\|\varphi_1 - \varphi_2\| = 0$. Итак, решения $\varphi_1$, $\varphi_2$ в некоторой окрестности точки $t_0$ совпадают.

Локальная теорема единственности доказана.

## 9. Другие применения сжатых отображений.

Задача 1. Доказать теорему об обратной функции.

Указание. Достаточно обратить $C^1$-отображение с единичной линейной частью, $y = x + \varphi(x)$, где $\varphi'(0) = 0$, в окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^n$ (общий случай сводится к этому линейной заменой координат).

Ищем решение в виде $x = y + \psi(y)$. Тогда получаем для $\psi$ уравнение $\psi(y) = -\varphi(y + \psi(y))$.

Следовательно, искомая функция $\psi$ является неподвижной точкой отображения $A$, определенного формулой

$$(A\psi)(y) = -\varphi(y + \psi(y)).$$

Отображение $A$ (в подходящей метрике) сжато, потому что производная функции $\varphi$ в окрестности точки 0 мала (ввиду условия $\varphi'(0) = 0$).

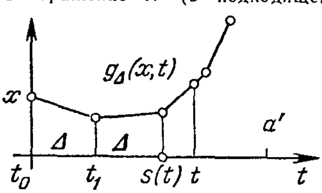

Рис. 224. Ломаная Эйлера.

Задача 2. Доказать, что ломаная Эйлера стремится к решению, когда ее шаг стремится к нулю.

Решение. Пусть $g_\Delta = x + h_\Delta$ — ломаная Эйлера с шагом $\Delta$ и началом $g_\Delta(t, x_0) = x$ (рис. 224). Иными словами, при $t \neq t_0 + k\Delta$

$$\partial g_\Delta(t, x)/\partial t = v(s(t), \quad g_\Delta(s(t), x)),$$

где $s(t) = t_0 + k\Delta$, $k$ — целая часть $(t - t_0)/\Delta$. Отличие ломаной Эйлера от решения $g$ можно оценить по формуле п. 3 § 30:

$$\|g_\Delta - g\| = \|h_\Delta - h\| \leqslant (1 - \lambda)^{-1} \|Ah_\Delta - h_\Delta\|.$$

Но

$$\left(Ah_\Delta\right)(t, x)=\int_{t_0}^{t} v\left(\tau, g_\Delta(\tau, x)\right) d\tau, \qquad h_\Delta(t, x)=\int_{t_0}^{t} v\left(s(\tau), g_\Delta(s(\tau), x)\right) d\tau.$$

При $\Delta \to 0$ разность подынтегральных выражений равномерно по $\tau$, $|\tau| \leqslant a'$, стремится к 0 (вследствие равностепенной непрерывности $v$). Поэтому $\|Ah_\Delta - h_\Delta\| \to 0$ при $\Delta \to 0$ и ломаная Эйлера стремится к решению.

Задача* 3. Рассмотрим диффеоморфизм $A$ окрестности точки 0 в $\mathbf{R}^n$ на окрестность точки 0 в $\mathbf{R}^n$, переводящий 0 в 0. Предположим, что линейная часть $A$ в 0 (т. е. линейный оператор $A_{*0}$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$) не имеет собственных чисел с модулем 1. Пусть число собственных чисел с $|\lambda| < 1$ равно $m_-$, а с $|\lambda| > 1$ равно $m_+$. Тогда $A_{*0}$ имеет инвариантное подпространство $\mathbf{R}^{m_-}$ (входящий ус) и инвариантное подпространство $\mathbf{R}^{m_+}$ (выходящий ус), точки которых стремятся к 0 при применении $A_{*0}^N$, где $N \to +\infty$ (для $\mathbf{R}^{m_-}$) или $N \to -\infty$ (для $\mathbf{R}^{m_+}$) (рис. 225).

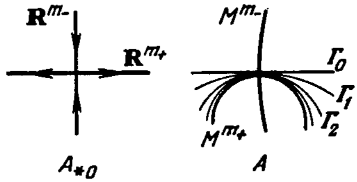


Рис. 225. Усы отображения и его линейной части.

Доказать, что *исходное нелинейное отображение $A$ тоже имеет в окрестности точки 0 инвариантные подмногообразия $M^{m_-}$ и $M^{m_+}$* (входящий и выходящий усы), *касающиеся в 0 подпространств* $\mathbf{R}^{m_-}$ *и* $\mathbf{R}^{m_+}$ ($A^N x \to 0$ при $N \to +\infty$ на $M^{m_-}$, при $N \to -\infty$ для $x \in M^{m_+}$).

Указание. Взять какое-либо подмногообразие $\Gamma_0$ размерности $m_+$ (скажем, касающееся $\mathbf{R}^{m_+}$ в 0) и применять к нему степени $A$. Методом сжатых отображений доказать сходимость полученных приближений $\Gamma_N = A^N \Gamma_0$, $N \to +\infty$, к $M^{m_+}$.

Задача* 4. Доказать существование входящего и выходящего усов у нелинейного седла $\dot{x} = v(x)$, $v(0) = 0$ (предполагается, что ни одно из собственных чисел оператора $A = v_*(0)$ не лежит на мнимой оси).

## § 32. Теорема о дифференцируемости

В этом параграфе доказывается теорема о выпрямлении.

**1. Уравнение в вариациях.** С дифференцируемым отображением $f$: $U \to V$ связано линейное отображение касательных пространств в каждой точке

$$f_{*x}: T_x U \to T_{f(x)} V.$$

Точно так же с дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(t, x), \qquad x \in U \subset \mathbf{R}^n, \qquad (1)$$

связана система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = v(t, x), & x \in U \subset \mathbf{R}^n, \\ \dot{y} = v_*(t, x)\, y, & y \in T_x U, \end{cases} \qquad (2)$$

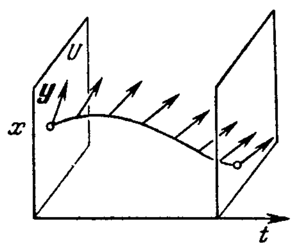


Рис. 226. Решение уравнения в вариациях с начальным условием $(x, y)$.

называемая *системой уравнений в вариациях* для уравнения (1) и *линейная* относительно касательного вектора $y$ (рис. 226).

Звездочка в формуле (2) (и в дальнейших формулах) означает производную по $x$ при фиксированном $t$. Так, $v_*(t, x)$ есть линейный оператор из $\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{R}^n$.

Наряду с системой (2) удобно рассматривать систему

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in U \subset \mathbf{R}^n, \quad \dot{z}=\boldsymbol{v}_*(t, \boldsymbol{x}) z, \quad z\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n. \tag{3}$$

Система (3) получена из системы (2) заменой неизвестного вектора $\boldsymbol{y}$ неизвестным линейным преобразованием $z$. Мы будем употреблять название *уравнение в вариациях* также и применительно к системе (3).

Замечание. Вообще, если дано линейное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{y}}=A(t)\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^n, \tag{2'}$$

то полезно рассмотреть ассоциированное уравнение

$$\dot{z}=A(t) z, \quad z\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n, \tag{3'}$$

относительно линейного оператора $z$.

Зная решения одного из уравнений (2′), (3′), легко найти решения другого (как?).

**2. Теорема о дифференцируемости.** *Пусть правая часть $\boldsymbol{v}$ уравнения* (1) *дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$. *Тогда решение $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ уравнения* (1) *с начальным условием $\boldsymbol{g}(t_0, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ зависит от начального условия $\boldsymbol{x}$ непрерывно дифференцируемо, когда $\boldsymbol{x}$ и $t$ меняются в некоторой* (*быть может, меньшей*) *окрестности точки* $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$:

$$\boldsymbol{v} \in C^2 \Rightarrow \boldsymbol{g} \in C_x^1$$

(*класса $C^1$ по $\boldsymbol{x}$*).

Доказательство. $\boldsymbol{v} \in C^2 \Rightarrow \boldsymbol{v}_* \in C^1$. Поэтому система уравнений в вариациях (3) удовлетворяет условиям из § 31 и последовательность пикаровских приближений равномерно сходится к ее решению в достаточно малой окрестности точки $t_0$. Выберем начальные условия $\boldsymbol{\varphi}_0=\boldsymbol{x}$ (достаточно близко к $\boldsymbol{x}_0$), $\psi_0=E$. Обозначим пикаровские приближения через $\boldsymbol{\varphi}_n$ (для $\boldsymbol{x}$) и $\psi_n$ (для $z$), т. е. положим

$$\boldsymbol{\varphi}_{n+1}(t, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}+\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(\tau, \boldsymbol{\varphi}_n(\tau, \boldsymbol{x}))\, d\tau, \tag{4}$$

$$\psi_{n+1}(t, \boldsymbol{x})=E+\int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}_*(\tau, \boldsymbol{\varphi}_n(\tau, \boldsymbol{x}))\, \psi_n(\tau, \boldsymbol{x})\, d\tau. \tag{5}$$

Заметим, что $\boldsymbol{\varphi}_{0*}=\psi_0$. Из определений (4) и (5) индукцией по $n$ заключаем, что $\boldsymbol{\varphi}_{n+1*}=\psi_{n+1}$. Поэтому последовательность $\{\psi_n\}$ — это последовательность производных последовательности $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$. Обе последовательности (4), (5) равномерно сходятся (как последовательности пикаровских приближений системы (3)) при достаточно малом $|t-t_0|$. Итак, последовательность $\{\boldsymbol{\varphi}_n\}$ сходится равномерно вместе с производными по $\boldsymbol{x}$. Поэтому предельная функция $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})=\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{\varphi}_n(t, \boldsymbol{x})$ непрерывно дифференцируема по $\boldsymbol{x}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Одновременно доказана

Теорема. *Производная $\boldsymbol{g}_*$ решения уравнения* (1) *по начальному условию $\boldsymbol{x}$ удовлетворяет уравнению в вариациях* (3) *с начальным* *условием* $z(t_0)=E$:

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}(t,\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{g}_*(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{v}_*(t,\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}))\,\boldsymbol{g}_*(t,\boldsymbol{x}),$$

$$\boldsymbol{g}(t_0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}, \qquad \boldsymbol{g}_*(t_0,\boldsymbol{x})=E.$$

Эта теорема объясняет смысл уравнений в вариациях: они описывают действие преобразований за время от $t_0$ до $t$ на касательные векторы к фазовому пространству (рис. 227).

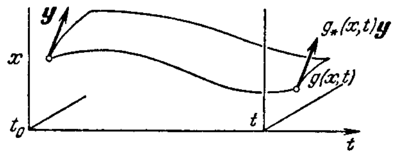


Рис. 227. Действие преобразования за время от $t_0$ до $t$ на кривую в фазовом пространстве и на ее касательный вектор.

**3. Высшие производные по $x$.** Пусть $r\geqslant 2$ — целое число.

Теорема $T_r$. *Пусть правая часть* $\boldsymbol{v}$ *уравнения* (1) $r$ *раз непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности точки* $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$. *Тогда решение* $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$ *уравнения* (1) *с начальным условием* $\boldsymbol{g}(t_0,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$ *зависит от начального условия* $\boldsymbol{x}$ $r-1$ *раз непрерывно дифференцируемо, когда* $\boldsymbol{x}$ *и* $t$ *меняются в некоторой (быть может, меньшей) окрестности точки* $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$:

$$\boldsymbol{v}\in C^r\Rightarrow \boldsymbol{g}\in C_x^{r-1}.$$

Доказательство. $\boldsymbol{v}\in C^r\Rightarrow \boldsymbol{v}_*\in C^{r-1}$. Значит, система уравнений в вариациях (3) удовлетворяет условиям теоремы $T_{r-1}$. Поэтому теорема $T_r$, $r>2$, вытекает из теоремы $T_{r-1}$:

$$\boldsymbol{v}\in C^r\Rightarrow \boldsymbol{v}_*\in C^{r-1}\Rightarrow \boldsymbol{g}_*\in C_x^{r-2}\Rightarrow \boldsymbol{g}\in C_x^{r-1}.$$

Но теорема $T_2$ доказана в п. 2. Итак, теорема $T_r$ доказана.

**4. Производные по $x$ и $t$.** Пусть $r\geqslant 2$ — целое число.

Теорема $T'_r$. *В условиях теоремы* $T_r$ *решение* $\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x})$ *является дифференцируемой функцией класса* $C^{r-1}$ *по переменным* $x$ *и* $t$ *вместе*: $\boldsymbol{v}\in C^r\Rightarrow \boldsymbol{g}\in C^{r-1}$.

Эта теорема — очевидное следствие предыдущей. Вот формальное доказательство.

Лемма. *Пусть* $\boldsymbol{f}$ — *функция (со значениями в* $\mathbf{R}^n$*), определенная на прямом произведении области* $G$ *евклидова пространства* $\mathbf{R}^m$ *и отрезка* $I$ *на оси* $t$:

$$\boldsymbol{f}\colon G\times I\to \mathbf{R}^n$$

*Составим интеграл*

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\tau)\,d\tau, \qquad \boldsymbol{x}\in G,\ [t_0,t]\subset I.$$

*Если* $\boldsymbol{f}\in C_x^r$ *и* $\boldsymbol{f}\in C^{r-1}$, *то* $\boldsymbol{F}\in C^r$.

Действительно, любая $r$-я частная производная функции $\boldsymbol{F}$ по переменным $x_i$ и $t$, содержащая дифференцирование по $t$, выражается через $\boldsymbol{f}$ и частные производные функции $\boldsymbol{f}$ порядка меньше $r$, а потому непрерывна; всякая же $r$-я частная производная по переменным $x_i$ непрерывна по условию.

Доказательство теоремы. Имеем

$$g(t, x)=x+\int_{t_0}^{t} v(\tau, g(\tau, x))\,d\tau.$$

Обозначим $f(\tau, x)=v(\tau, g(\tau, x))$ и будем применять лемму. Находим при $1\leqslant\rho\leqslant r$

$$g\in C^{\rho-1}\cap C_x^\rho \Rightarrow g\in C^\rho.$$

Согласно теореме $T_r$, имеем $g\in C_x^\rho$ при $\rho<r$. Последовательно получаем

$$g\in C^0\Rightarrow g\in C^1\Rightarrow\ldots\Rightarrow g\in C^{r-1}.$$

Но, согласно § 31, $g\in C^0$ (решение непрерывно зависит от $(x, t)$).

Теорема $T_r'$ доказана.

Задача 1. Докажите, что если правая часть дифференциального уравнения (1) бесконечно дифференцируема, то и решение зависит от начальных условий бесконечно дифференцируемо:

$$v\in C^\infty\Rightarrow g\in C^\infty.$$

Замечание. Можно также доказать, что если правая часть $v$ аналитична (разлагается в сходящийся к $v$ ряд Тейлора в окрестности каждой точки), то и решение $g$ аналитически зависит от $x$ и $t$.

Дифференциальные уравнения с аналитическими правыми частями естественно рассматривать как при комплексных значениях неизвестных, так и (что особенно важно) при комплексных значениях времени. Об этой теории см., например, книгу В. В. Голубева «Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений» (М.: Гостехиздат, 1950).

**5. Теорема о выпрямлении.** Эта теорема — очевидное следствие теоремы $T_r'$. Перед доказательством вспомним два простых геометрических предложения. Пусть $L_1$ и $L_2$ — два линейных подпространства третьего линейного пространства $L$ (рис. 228). Подпространства $L_1$ и $L_2$ называются *трансверсальными*, если их сумма есть все пространство $L$: $L_1+L_2=L$. Например, прямая в $\mathbf{R}^3$ трансверсальна плоскости, если пересекает ее под ненулевым углом.

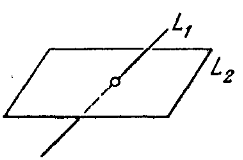


Рис. 228. Прямая $L_1$ трансверсальна плоскости $L_2$ в пространстве $\mathbf{R}^3$.

Предложение 1. *Для каждого $k$-мерного подпространства $\mathbf{R}^k$ в $\mathbf{R}^n$ найдется трансверсальное ему $(n-k)$-мерное (притом даже среди $C_n^k$ координатных плоскостей пространства $\mathbf{R}^n$).*

Доказательство см. в курсах линейной алгебры (*теорема о ранге матрицы*).

Предложение 2. *Если линейное отображение $A$: $L\to M$ отображает какие-либо два трансверсальных подпространства на трансверсальные, то оно — на все пространство $M$.*

Доказательство. $AL=AL_1+AL_2=M$.

Доказательство теоремы о выпрямлении: неавтономный случай (см. гл. 2, § 8, п. 1). Рассмотрим отображение $G$ области прямого произведения $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ в расширенное фазовое пространство уравнения

$$\dot{x}=v(t, x), \tag{1}$$

заданное формулой $G(t, \boldsymbol{x})=(t, \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}))$, где $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ — решение уравнения (1) с начальным условием $\boldsymbol{g}(t_0, \boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}$.

Покажем, что $G$ в окрестности точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ — выпрямляющий диффеоморфизм.

а) *Отображение $G$ дифференцируемо* (класса $C^{r-1}$, если $\boldsymbol{v}\in C^r$) по теореме $T'_r$.

б) *Отображение $G$ оставляет $t$ на месте*: $G(t, \boldsymbol{x})=(t, \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}))$.

в) *Отображение $G_*$ переводит стандартное векторное поле* $\boldsymbol{e}$ $(\dot{\boldsymbol{x}}=0, t=1)$ *в данное поле*: $G_*\boldsymbol{e}=(1, \boldsymbol{v})$ (так как $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x})$ — решение уравнения (1)).

г) *Отображение $G$ в окрестности точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ — диффеоморфизм*. Действительно, сосчитаем сужения линейного оператора $G_*|_{t_0, \boldsymbol{x}_0}$ на трансверсальные плоскости $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^1$ (рис. 229). Находим:

$$G_*|_{\mathbf{R}^n:\ t=t_0}=E, \quad G_*|_{\mathbf{R}^1:\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0}\boldsymbol{e}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}.$$

Плоскость $\mathbf{R}^n$ и прямая с направляющим вектором $\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}$ трансверсальны. Итак, $G_*$ есть линейное отображение $\mathbf{R}^{n+1}$ на $\mathbf{R}^{n+1}$,

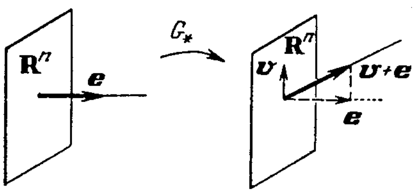


Рис. 229. Производная отображения $G$ в точке $(t_0, x_0)$.

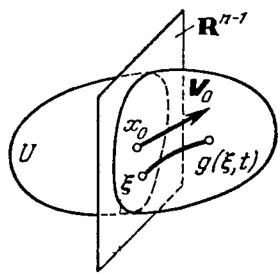


Рис. 230. Построение диффеоморфизма, выпрямляющего векторное поле.

следовательно, изоморфизм (якобиан $G_*$ в точке $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ отличен от 0). По теореме об обратной функции $G$ — локальный диффеоморфизм.

Теорема доказана.

Доказательство теоремы о выпрямлении: автономный случай (§ 7, п. 1). Рассмотрим автономное уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in U\subset\mathbf{R}^n. \tag{6}$$

Пусть вектор $\boldsymbol{v}_0$ фазовой скорости в точке $\boldsymbol{x}_0$ отличен от 0 (рис. 230). Тогда существует $(n-1)$-мерная гиперплоскость $\mathbf{R}^{n-1}\subset\mathbf{R}^n$, проходящая через $\boldsymbol{x}_0$ и трансверсальная $\boldsymbol{v}_0$ (точнее, соответствующая плоскость в касательном пространстве $T_{\boldsymbol{x}_0}U$ трансверсальна прямой $\mathbf{R}^1$ направления $\boldsymbol{v}_0$).

Определим отображение $G$ области $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{n-1}$, где $\mathbf{R}^{n-1}=\{\boldsymbol{\xi}\}$, $\mathbf{R}=\{t\}$, в область $\mathbf{R}^n$ формулой $G(t, \boldsymbol{\xi})=\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{\xi})$, где $\boldsymbol{\xi}$ лежит на $\mathbf{R}^{n-1}$ вблизи $\boldsymbol{x}_0$, а $\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{\xi})$ есть значение решения уравнения (6) с начальным условием $\boldsymbol{\varphi}(0)=\boldsymbol{\xi}$ в момент $t$. Покажем, что в достаточно малой окрестности точки $(\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{x}_0, t=0)$ отображение $G^{-1}$ — выпрямляющий диффеоморфизм.

а) *Отображение $G$ дифференцируемо* ($G \in C^{r-1}$, если $v \in C^r$) по теореме $T_r$.

б) *Отображение $G^{-1}$ выпрямляющее*, так как $G_*$ переводит стандартное векторное поле $e$ ($\dot{\xi}=0$, $\dot{t}=1$) в $G_*e=v$, поскольку $g(t, \xi)$ удовлетворяет уравнению (6).

в) *Отображение $G$ есть локальный диффеоморфизм.* Действительно, сосчитаем линейный оператор $G_*|_{t_0, x_0}$ на трансверсальных плоскостях $\mathbf{R}^{n-1}$ и $\mathbf{R}^1$. Находим $G_*|_{\mathbf{R}^{n-1}}=E$, $G_*|_{\mathbf{R}^1}e=v_0$.

Итак, оператор $G_*|_{t_0, x_0}$ переводит пару трансверсальных подпространств $\mathbf{R}^{n-1}$ и $\mathbf{R}^1 \subset \mathbf{R}^n$ в пару трансверсальных подпространств. Поэтому $G_*|_{t_0, x_0}$ — линейное отображение $\mathbf{R}^n$ на $\mathbf{R}^n$, следовательно,— изоморфизм. По теореме об обратной функции $G$ — локальный диффеоморфизм. Теорема доказана.

Замечание. Поскольку теорема о дифференцируемости доказана с потерей одной производной ($v \in C^r \Rightarrow g \in C^{r-1}$), то и у выпрямляющих диффеоморфизмов мы также гарантируем лишь класс гладкости $C^{r-1}$. В действительности построенный выпрямляющий диффеоморфизм имеет класс $C^r$; доказательство приведено ниже.

**6. Последняя производная.** В теореме о дифференцируемости (п. 2) мы предполагали поле $v$ дважды непрерывно дифференцируемым. В действительности достаточно однократной непрерывной дифференцируемости.

Теорема. *Если правая часть $v(t, x)$ дифференциального уравнения $\dot{x}=v(t, x)$ непрерывно дифференцируема, то решение $g(t, x)$ с начальным условием $g(t_0, x)=x$ зависит от начальных условий непрерывно дифференцируемо*:

$$v \in C^1 \Rightarrow g \in C_x^1. \tag{7}$$

Следствия.

1) $v \in C^r \Rightarrow g \in C^r$ *при* $r \geqslant 1$.

2) *Построенные в п. 5 выпрямляющие диффеоморфизмы $r$ раз непрерывно дифференцируемы, если $v \in C^r$.*

Следствия выводятся из соотношения (7) дословным повторением рассуждений пп. 3, 4, 5. Доказательство же самой теоремы (7) требует некоторых ухищрений.

Доказательство теоремы. Начнем со следующих замечаний.

Лемма 1. *Решение линейного уравнения $\dot{y}=A(t)y$ с непрерывно зависящей от $t$ правой частью существует, непрерывно, определяется начальными условиями $\varphi(t_0)=y_0$ однозначно и зависит от $y_0$ и $t$ непрерывно.*

Действительно, доказательство теорем существования, единственности и непрерывности (§ 31) использовало только дифференцируемость по $x$ при фиксированном $t$ (фактически даже только условие Липшица по $x$). Поэтому доказательство сохраняет силу, если зависимость от $t$ предполагать лишь непрерывной. Лемма доказана.

Заметим, что от $y_0$ решение зависит линейно, а от $t$ — непрерывно дифференцируемо, поэтому принадлежит классу $C^1$ по $y_0$ и $t$ вместе.

Лемма 2. *Если линейный оператор $A$ в лемме 1 зависит еще от параметра $\alpha$ так, что функция $A(t, \alpha)$ непрерывна, то и решение будет непрерывной функцией от $y_0$, $t$ и $\alpha$.*

Действительно, решение можно построить как предел последовательности пикаровских приближений. Каждое приближение непрерывно зависит от $y_0$, $t$ и $\alpha$. Последовательность приближений сходится равномерно относительно $y_0$, $t$ и $\alpha$, меняющихся в достаточно малой окрестности любой точки $(y_{0,0}, t_0, \alpha_0)$. Поэтому предел — непрерывная функция от $y_0$, $t$ и $\alpha$.

Лемма 2 доказана.

Применим лемму 2 к уравнению в вариациях.

Лемма 3. *Система уравнений в вариациях*

$$\dot{x}=v(t,x), \qquad \dot{y}=v_*(t,x)\,y$$

*имеет решение, которое определяется своими начальными данными однозначно и зависит от них непрерывно, если только поле $v$ класса $C^1$.*

Действительно, первое уравнение системы имеет решение по теореме существования § 31. Это решение определено своими начальными условиями $(t_0, x_0)$ однозначно и зависит от них непрерывно. Подставим это решение во второе уравнение. Получим линейное уравнение относительно $y$. Его правая часть непрерывно зависит от $t$ и — как от параметра — от начального условия $x_0$ рассматриваемого решения первого уравнения. По лемме 2 это линейное уравнение имеет решение, которое определяется своими начальными данными $y_0$ и является непрерывной функцией от $t$, $y_0$ и параметра $x_0$.

Лемма 3 доказана.

Таким образом, *уравнения в вариациях разрешимы и в случае* $v\in C^1$. Заметим, что в случае $v\in C^2$ мы доказали, что производная решения по начальным данным удовлетворяет уравнению в вариациях (3). Теперь же мы не можем этого утверждать: ведь мы еще не знаем, существует ли такая производная.

Чтобы доказать дифференцируемость решения по начальным условиям, рассмотрим сперва частный случай.

Лемма 4. *Если векторное поле $v(t,x)$ класса $C^1$ равно 0 в точке $x=0$ при всех $t$ вместе со своей производной $v_*$, то решение уравнения $\dot{x}=v(t,x)$ дифференцируемо по начальным условиям в точке $x=0$.*

Действительно, по условию $|v(t,x)|=o(|x|)$ в окрестности точки $x=0$. Оценим погрешность приближения $x=x_0$ к решению $x=\varphi(t)$ с начальным условием $\varphi(t_0)=x_0$ по формуле п. 3 § 30. При достаточно малых $|x_0|$ и $|t-t_0|$ находим

$$|\varphi-x_0|\leqslant(1-\lambda)^{-1}\left|\int_{t_0}^{t} v(\tau,x_0)\,d\tau\right|\leqslant K\max_{t_0\leqslant\tau\leqslant t} v(\tau,x_0),$$

где константа $K$ не зависит от $x_0$.

Итак, $|\varphi-x_0|=o(|x_0|)$, откуда следует, что $\varphi$ дифференцируемо по $x_0$ в нуле, что и требовалось доказать.

А теперь мы сведем общий случай к специальной ситуации леммы 4: для этого достаточно выбрать в расширенном фазовом пространстве подходящую систему координат. Прежде всего, мы всегда можем считать рассматриваемое решение нулевым:

Лемма 5. *Пусть $x=\varphi(t)$ — решение уравнения $\dot{x}=v(t,x)$ с правой частью класса $C^1$, заданной в области расширенного фазового пространства $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$. Тогда существует $C^1$ — диффеоморфизм расширенного фазового пространства, сохраняющий время $((t,x)\mapsto(t,x_1(t,x)))$ и переводящий решение $\varphi$ в $x_1\equiv0$.*

Действительно, достаточно сделать сдвиг $x_1=x-\varphi(t)$, поскольку $\varphi\in C^1$.

Лемма 5 доказана.

В системе координат $(t,x_1)$ правая часть нашего уравнения равна 0 в точке $x_1=0$. Покажем, что производную правой части по $x_1$ можно также обратить в нуль при помощи подходящей линейной по $x$ замены координат.

Лемма 6. *В предположениях леммы 5 координаты $(t,x_1)$ можно выбрать так, что уравнение $\dot{x}=v(t,x)$ будет эквивалентно уравнению $\dot{x}_1=v_1(t,x_1)$, где поле $v_1$ равно 0 в точке $x_1=0$ вместе со своей производной $\partial v_1/\partial x_1$. Притом функцию $x_1(t,x)$ можно выбрать линейной (не обязательно однородной) относительно $x$.*

Согласно лемме 5 можно считать, что $v_1(t,0)=0$.

Чтобы доказать лемму 6, рассмотрим сперва ее частный случай:

Лемма 7. *Утверждение леммы 6 справедливо для линейного уравнения $\dot{x}=A(t)\,x$.*

Действительно, достаточно принять за $x_1$ значение решения с начальным условием $\varphi(t)=x$ в фиксированный момент $t_0$. Согласно лемме 1 $x_1=B(t)\,x$, где $B(t)$:

$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор класса $C^1$ по $t$. В координатах $(t, \boldsymbol{x}_1)$ наше линейное уравнение принимает вид $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = 0$.

Лемма 7 доказана.

Доказательство леммы 6. Линеаризуем уравнение $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ в нуле, т. е. составим уравнение в вариациях $\dot{\boldsymbol{x}} = A(t)\boldsymbol{x}$, где $A(t) = \boldsymbol{v}_*(t, 0)$.

По условию, $\boldsymbol{v} \in C^1$, поэтому $A \in C^0$. По лемме 7 можно выбрать $C^1$-координаты $\boldsymbol{x}_1 = B(t)\boldsymbol{x}$ так, что в новых координатах линеаризованное уравнение примет вид $\dot{\boldsymbol{x}}_1 = 0$. Легко проверить, что в этой системе координат правая часть исходного нелинейного уравнения будет иметь нулевую линейную часть.

Действительно, введем обозначения $\boldsymbol{V} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}$ (тогда $\boldsymbol{R} = o(|\boldsymbol{x}|)$) и $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}_1$ (тогда $C = B^{-1}$). Дифференциальное уравнение для $\boldsymbol{x}_1$ получается из $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}$ подстановкой $\boldsymbol{x} = C\boldsymbol{x}_1$. Получаем

$$\dot{C}\boldsymbol{x}_1 + C\dot{\boldsymbol{x}}_1 = AC\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{R}.$$

Но, по определению $C$, первые (линейные по $\boldsymbol{x}_1$) слагаемые слева и справа равны Итак,

$$\dot{\boldsymbol{x}}_1 = C^{-1}\boldsymbol{R}(t, C\boldsymbol{x}_1) = o(|\boldsymbol{x}_1|).$$

Лемма 6 доказана.

Соединяя леммы 6 и 4, приходим к следующему заключению:

Лемма 8. *Решение дифференциального уравнения $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})$ с правой частью класса $C^1$ дифференцируемо зависит от начального условия. Производная $\boldsymbol{z}$ решения по начальному условию удовлетворяет системе уравнений в вариациях*

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{v}_*(t, \boldsymbol{x})\,\boldsymbol{z}, \qquad \boldsymbol{z}(t_0) = E\colon\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n.$$

Для доказательства леммы 8 достаточно записать уравнение в системе координат леммы 6 и применить лемму 4.

Для доказательства теоремы осталось убедиться в непрерывности производной решения по начальному условию. Согласно лемме 8 это производная существует и удовлетворяет системе уравнений в вариациях. Из леммы 3 следует непрерывная зависимость решений этой системы от $\boldsymbol{x}_0$ и $t$.

Итак, теорема доказана.

*Глава 5*

# Дифференциальные уравнения на многообразиях

В этой главе определяются дифференцируемые многообразия и доказывается теорема о существовании фазового потока, заданного векторным полем на многообразии.

В теории дифференциальных уравнений на многообразиях получено много интересных и глубоких результатов, о которых нельзя было успеть рассказать в настоящей главе, являющейся лишь кратким введением в эту область на стыке анализа и топологии.

## § 33. Дифференцируемые многообразия

Понятие дифференцируемого, или гладкого, многообразия играет в геометрии и в анализе столь же фундаментальную роль, как в алгебре понятия группы и линейного пространства.

**1. Примеры многообразий.** Когда ниже будет дано определение многообразия, то многообразиями окажутся, например, следующие объекты (рис. 231):

1. Линейное пространство $\mathbf{R}^n$ или любая его область (открытое подмножество) $U$.

2. Сфера $S^n$, заданная в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ уравнением

$$x_1^2+\ldots+x_{n+1}^2=1.$$

В частности, окружность $S^1$.

3. Тор $T^2=S^1\times S^1$ (ср. § 24).

4. Проективное пространство $\mathbf{RP}^n=\{(x_0:x_1:\ldots:x_n)\}$. Вспомним, что точками этого пространства являются прямые, проходящие через начало координат в $\mathbf{R}^{n+1}$. Такая прямая задается любой своей (отличной от 0) точкой. Координаты этой точки $(x_0, \ldots, x_n)$ в $\mathbf{R}^{n+1}$ называются однородными координатами соответствующей точки проективного пространства.

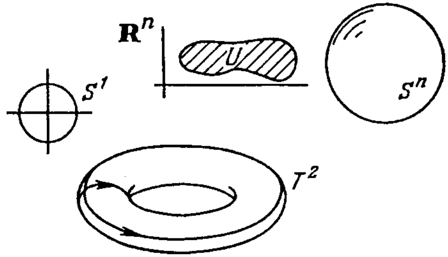

Рис. 231. Примеры многообразий.

Последний пример особенно поучителен. При рассмотрении следующих определений полезно иметь в виду аффинные координаты в проективном пространстве (см. пример 3 п. 3 ниже).

**2. Определения.** Дифференцируемое многообразие $M$ — это множество $M$ вместе со структурой дифференцируемого многообразия в нем.

В множестве $M$ введена *структура многообразия*, если задан *атлас*, состоящий из *карт*, которые *согласованы*.

Определение 1. *Картой* называется область $U \subset \mathbf{R}^n$ вместе с взаимно однозначным отображением $\varphi\colon W \to U$ подмножества $W$ множества $M$ на $U$ (рис. 232). Мы назовем $\varphi(x)$ *изображением* точки $x \in W \subset M$ на карте $U$.

Рассмотрим карты (рис. 233)

$$\varphi_i\colon W_i \to U_i \text{ и } \varphi_j\colon W_j \to U_j.$$

Если множества $W_i$ и $W_j$ пе-

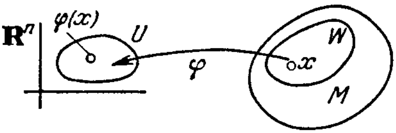


Рис. 232. Карта.

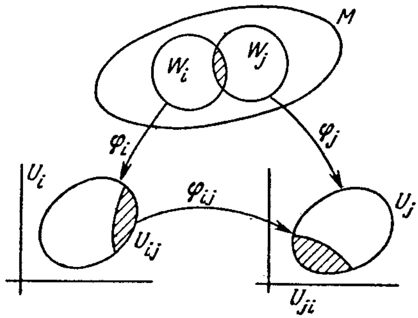


Рис. 233. Согласованные карты.

ресекаются, то их пересечение $W_i \cap W_j$ имеет изображения на обеих картах:

$$U_{ij} = \varphi_i(W_i \cap W_j), \qquad U_{ji} = \varphi_j(W_j \cap W_i).$$

Переход с одной карты на другую задается отображением *подмножеств линейных пространств*

$$\varphi_{ij}\colon U_{ij} \to U_{ji}, \qquad \varphi_{ij}(x) = \varphi_j(\varphi_i^{-1}(x)).$$

Определение 2. Две карты $\varphi_i\colon W_i \to U_i$, $\varphi_j\colon W_j \to U_j$ называются *согласованными*, если

1) множества $U_{ij}$, $U_{ji}$ открыты (быть может, пусты);

2) отображения $\varphi_{ij}$ и $\varphi_{ji}$ (определенные, если $W_i \cap W_j$ непусто) являются диффеоморфизмами областей $\mathbf{R}^n$.

Замечание. В зависимости от класса гладкости отображений $\varphi_{ij}$ получаются разные классы многообразий.

Если под диффеоморфизмом понимать диффеоморфизм класса $C^r$, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, то многообразие (которое мы определим ниже) будет называться *дифференцируемым многообразием* класса $C^r$. Если положить $r = 0$, т. е. требовать лишь, чтобы $\varphi_{ij}$ были гомеоморфизмами, получится определение *топологического многообразия*. Если требовать, чтобы $\varphi_{ij}$ были аналитическими *), то получим *аналитические многообразия*.

---

*) Функция аналитична, если ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности каждой точки.

Есть и другие возможности. Например, если фиксировать в $\mathbf{R}^n$ ориентацию и требовать, чтобы диффеоморфизмы $\varphi_{ij}$ ее сохраняли (якобиан $\varphi_{ij}$ в каждой точке положителен), то получится определение *ориентированного многообразия.*

Определение 3. *Атласом* на $M$ называется совокупность карт $\varphi_i$: $W_i \to U_i$, если

1) любые две карты согласованы;

2) любая точка $x \in M$ имеет изображение хоть на одной карте.

Определение 4. Два атласа на $M$ *эквивалентны*, если их объединение есть снова атлас (т. е. если любая карта первого атласа согласована с любой картой второго).

Легко видеть, что определение 4 действительно задает отношение эквивалентности.

Определение 5. *Структурой дифференцируемого многообразия* на $M$ называется класс эквивалентных атласов.

Отметим здесь же два условия, часто накладываемые на многообразия, чтобы избежать патологий.

1. *Отделимость*: у любых двух точек $x$, $y \in M$ есть непересекающиеся окрестности (рис. 234). То есть либо существуют две карты $\varphi_i$: $W_i \to U_i$,

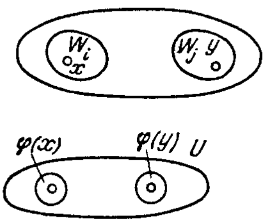


Рис. 234. Отделимость.

$\varphi_j$: $W_j \to U_j$ с непересекающимися $W_i$, $W_j$, содержащими $x$ и $y$ соответственно, либо существует карта, на которой изображены обе точки $x$, $y$.

Если не требовать отделимости, то многообразием будет множество, полученное из двух прямых $\mathbf{R}=\{x\}$, $\mathbf{R}=\{y\}$ отождествлением точек с равными отрицательными координатами $x$, $y$. На таком многообразии неверна теорема единственности продолжения решений дифференциального уравнения, хотя локальная теорема единственности и верна.

2. *Счетность*: существует атлас $M$ из не более чем счетного числа карт.

Далее слово «многообразие» означает дифференцируемое многообразие, удовлетворяющее условиям отделимости и счетности.

**3. Примеры атласов.**

1. Сферу $S^2$, заданную уравнением $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$ в $\mathbf{R}^3$, можно снабдить атласом из двух карт, например — в стереографической проекции (рис. 235). Здесь

$$W_1=S^2\setminus N, \qquad U_1=\mathbf{R}_1^2;$$

$$W_2=S^2\setminus S, \qquad U_2=\mathbf{R}_2^2.$$

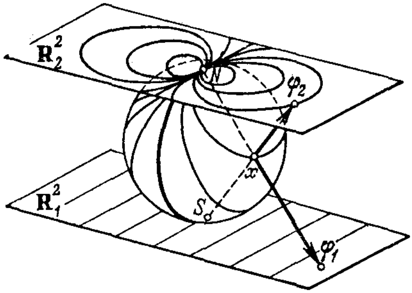


Рис. 235. Атлас сферы. Семейство касающихся в точке $N$ окружностей, лежащих на сфере, изображается на нижней карте семейством параллельных прямых, а на верхней — семейством касающихся окружностей.

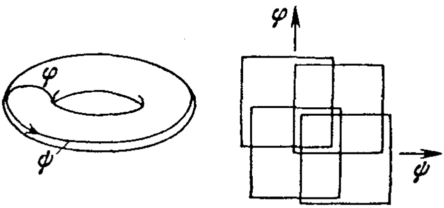


Рис. 236. Атлас тора.

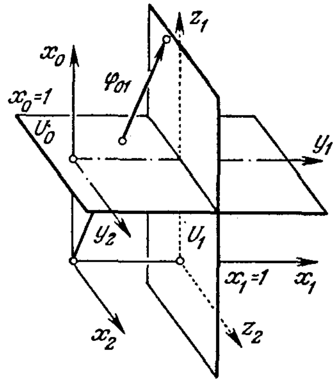


Рис. 237. Аффинные карты проективной плоскости.

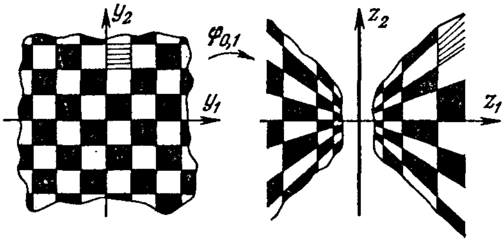


Рис. 238. Согласованность карт проективной плоскости.

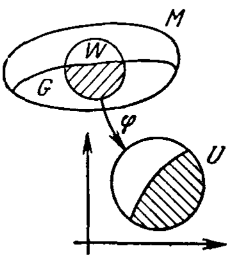


Рис. 239. Открытое подмножество

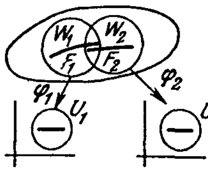


Рис. 240. Компактное подмножество.

Задача 1. Написать формулы для отображений $\varphi_{1,2}$ и проверить, что наши две карты согласованы.

Аналогичным образом, дифференцируемую структуру $S^n$ можно задать атласом из двух карт.

2. Атлас тора $T^2$ строится с помощью угловых координат: широты $\varphi$ и долготы $\psi$ (рис. 236). Например, можно рассмотреть 4 карты, соответствующие изменению $\varphi$ и $\psi$ в интервалах

$$0<\varphi<2\pi, \qquad -\pi<\varphi<\pi;$$
$$0<\psi<2\pi, \qquad -\pi<\psi<\pi.$$

3. Атлас проективной плоскости $\mathbf{RP}^2$ можно составить из трех «аффинных карт» (рис. 237):

$$x_0:x_1:x_2 \begin{cases} \xrightarrow{\varphi_0} \; y_1=\dfrac{x_1}{x_0}, \quad y_2=\dfrac{x_2}{x_0}, & \text{если} \quad x_0\neq 0, \\ \xrightarrow{\varphi_1} \; z_1=\dfrac{x_0}{x_1}, \quad z_2=\dfrac{x_2}{x_1}, & \text{если} \quad x_1\neq 0, \\ \xrightarrow{\varphi_2} \; u_1=\dfrac{x_0}{x_2}, \quad u_2=\dfrac{x_1}{x_2}, & \text{если} \quad x_2\neq 0. \end{cases}$$

Эти карты согласованы. Например, согласованность $\varphi_0$ и $\varphi_1$ означает, что отображение $\varphi_{0,1}$ области $U_{0,1}=\{y_1, y_2\colon\ y_1\neq 0\}$ плоскости $(y_1, y_2)$ на область $U_{1,0}$: $z_1\neq 0$ плоскости $(z_1, z_2)$, заданное формулами $z_1=y_1^{-1}$, $z_2=y_2y_1^{-1}$, является диффеоморфизмом (рис. 238).

Доказательство: $y_1=z_1^{-1}$, $y_2=z_2z_1^{-1}$.

Аналогичным образом, дифференцируемая структура в проективном пространстве $\mathbf{RP}^n$ задается атласом из $n+1$ аффинной карты.

**4. Компактность.**

Определение. Подмножество $G$ многообразия $M$ называется *открытым*, если его изображение $\varphi(W\cap G)$ на каждой карте $\varphi$: $W\to U$ является открытым подмножеством области $U$ линейного пространства (рис. 239).

Задача 1. Докажите, что пересечение двух и объединение любого числа открытых подмножеств многообразия открыто.

Определение. Подмножество $K$ многообразия $M$ называется *компактным*, если из всякого покрытия множества $K$ открытыми множествами можно выбрать конечное подпокрытие.

Задача 2. Докажите, что сфера $S^n$ компактна. Компактно ли проективное пространство $\mathbf{RP}^n$?

Указание. Для решения можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема. *Пусть подмножество $F$ многообразия $M$* (рис. 240) *является объединением конечного числа подмножеств $F_i$, каждое из которых имеет компактное изображение на одной из карт $F_i\subset W_i$, $\varphi_i$: $W_i\to U_i$, $\varphi_i(F_i)$ — компакт в $\mathbf{R}^n$.*

*Тогда $F$ компактно.*

Доказательство. Пусть $\{G_j\}$ — открытое покрытие множества $F$. Тогда $\{\varphi_i(G_j \cap W_i)\}$ при каждом $i$ есть открытое покрытие компакта $\varphi_i(F_i)$. Выбираем из него конечное подпокрытие. Заставляя $j$ пробегать полученное конечное множество значений, получаем конечное число $G_j$, покрывающих $F$.

**5. Связность и размерность.**

Определение. Многообразие $M$ называется *связным* (рис. 241), если для любых двух его точек $x$, $y$ существует конечная цепочка карт $\varphi_i$: $W_i \to U_i$ таких, что $W_1$ содержит $x$, $W_n$ содержит $y$ и $W_i \cap W_{i+1}$ $\forall i$ непусто, а $U_i$ связно*).

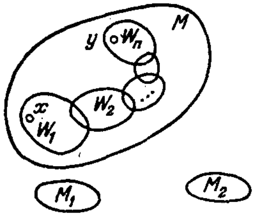


Рис. 241. Связное многообразие $M$ и несвязное $M_1 \cup M_2$.

Если многообразие $M$ не связно, то оно естественным образом распадается на компоненты связности $M_i$.

Задача 1. Связны ли многообразия, заданные уравнениями в $\mathbf{R}^3$ (в $\mathbf{RP}^3$)

$$x^2+y^2-z^2=C, \quad C \neq 0?$$

Задача 2. Множество всех матриц порядка $n$ с отличным от 0 определителем имеет естественную структуру дифференцируемого многообразия (область в $\mathbf{R}^{n^2}$). Сколько компонент связности имеет это многообразие?

Теорема. *Пусть $M$ — связное многообразие, $\varphi_i$: $W_i \to U_i$ — его карты. Тогда размерности всех линейных пространств $\mathbf{R}^n$, областями в которых являются $U_i$, одинаковы.*

Доказательство. Это следует из того, что диффеоморфизм между областями линейных пространств возможен лишь при равных размерностях пространств, и из того, что всякие две области $W_i$ и $W_j$ связного многообразия $M$ можно соединить конечной цепочкой попарно пересекающихся областей.

Определенное в теореме число $n$ называется *размерностью* многообразия $M$ и обозначается $\dim M$ (от англ. «dimension»).

Например, $\dim \mathbf{R}^n = \dim S^n = \dim T^n = \dim \mathbf{RP}^n = n$.

Несвязное многообразие называется $n$-мерным, если все его компоненты связности имеют одинаковую размерность $n$.

Задача 3. Снабдить множество $\mathrm{O}(n)$ всех ортогональных матриц порядка $n$ структурой дифференцируемого многообразия. Найти его компоненты связности и их размерность.

*Ответ.* $\mathrm{O}(n) = \mathrm{SO}(n) \times \mathbf{Z}_2$, $\dim \mathrm{O}(n) = n(n-1)/2$.

**6. Дифференцируемые отображения.**

Определение. Отображение $f$: $M_1 \to M_2$ одного $C^r$-многообразия в другое называется *дифференцируемым* (класса $C^r$), если в локальных координатах на $M_1$ и $M_2$ оно задается дифференцируемыми функциями (класса $C^r$).

*) То есть любые две точки $U_i$ можно соединить ломаной в $U_i \subset \mathbf{R}^n$.

Иными словами, пусть $\varphi_1\colon W_1 \to U_1$ — карта $M_1$, изображающая точку $x \in W_1$, $\varphi_2\colon W_2 \to U_2$ — карта $M_2$, изображающая точку $f(x) \in W_2$ (рис. 242). Тогда заданное в окрестности точки $\varphi_1(x)$ отображение областей евклидовых пространств $\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$ должно быть дифференцируемым класса $C^r$.

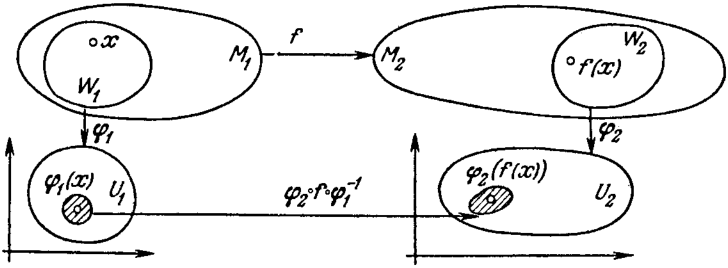


Рис. 242. Дифференцируемое отображение.

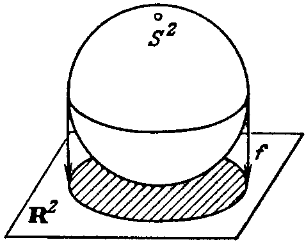


Рис. 243. При проектировании сферы на плоскость получается замкнутый круг.

Пример 1. Проекция сферы на плоскость (рис. 243) есть дифференцируемое отображение $f\colon S^2 \to \mathbf{R}^2$.

Мы видим, что образ дифференцируемого отображения — не обязательно дифференцируемое многообразие.

Пример 2. *Кривой* *) на многообразии $M$, выходящей в момент $t_0$ из точки $x \in M$, называется дифференцируемое отображение $f\colon I \to M$ содержащего $t_0$ интервала $I$ вещественной оси $t$ в многообразие $M$, причем $f(t_0) = x$.

*) Или *параметризованной кривой*, так как кривыми на $M$ иногда называют также одномерные подмногообразия многообразия $M$ (определение см. ниже, в п. 8)

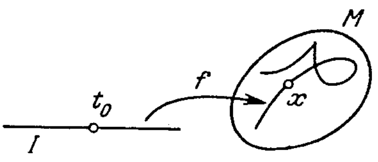


Рис. 244. Кривая на многообразии $M$.

У параметризованной кривой могут быть точки самопересечения, точки возврата и т. п. (рис. 244)

Пример 3. *Диффеоморфизмом* $f\colon M_1 \to M_2$ многообразия $M_1$ на многообразие $M_2$ называется дифференцируемое отображение $f$, обратное к которому $f^{-1}\colon M_2 \to M_1$ существует и дифференцируемо.

Многообразия $M_1$ и $M_2$ *диффеоморфны*, если существует диффеоморфизм одного на другое. Например, сфера и эллипсоид диффеоморфны.

**7. Замечание.** Легко видеть, что всякое связное одномерное многообразие диффеоморфно окружности (если оно компактно) или прямой (если оно не компактно).

Примерами двумерных многообразий являются сфера, тор (диффеоморфный «сфере с одной ручкой») и «сфера с $n$ ручками» (рис. 245).

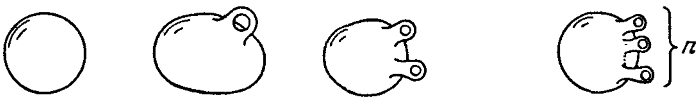


Рис. 245. Недиффеоморфные двумерные многообразия.

В курсах топологии доказывается, что всякое двумерное компактное связное ориентируемое многообразие диффеоморфно сфере с $n \geqslant 0$ ручками. О трехмерных многообразиях известно мало. Например, неизвестно, всякое ли компактное односвязное *) трехмерное многообразие диффеоморфно сфере $S^3$ (*гипотеза Пуанкаре*) или хотя бы гомеоморфно ей.

В больших размерностях дифференцируемая и топологическая классификация многообразий не совпадают. Например, существует ровно 28 гладких многообразий, гомеоморфных сфере $S^7$, но не диффеоморфных друг другу. Они называются *сферами Милнора*.

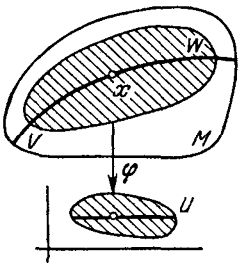


Рис. 246. Подмногообразие.

Сферу Милнора можно задать в $\mathbf{C}^5$ с координатами $z_1, \ldots, z_5$ следующими двумя уравнениями:

$$z_1^{6k-1} + z_2^3 + z_3^2 + z_4^2 + z_5^2 = 0, \qquad |z_1|^2 + \ldots + |z_5|^2 = 1.$$

При $k = 1, 2, \ldots, 28$ получаем 28 сфер Милнора **). Одно из этих 28 многообразий диффеоморфно сфере $S^7$.

**8. Подмногообразия.** Сфера в $\mathbf{R}^3$, заданная уравнением $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, доставляет пример подмножества евклидова пространства, наследующего от него естественную структуру дифференцируемого многообразия — структуру *подмногообразия* $\mathbf{R}^3$. Общее определение подмногообразия следующее:

Определение. Подмножество $V$ многообразия $M$ (рис. 246) называется *подмногообразием*, если каждая точка $x \in V$ имеет такую окрестность $W$ в $M$ и такую карту $\varphi\colon W \to U$, что $\varphi(W \cap V)$ является областью некоторого аффинного подпространства того аффинного пространства $\mathbf{R}^n$, в котором лежит $U$.

Подмногообразие $V$ само имеет естественную структуру многообразия ($W' = W \cap V$, $U' = \varphi(W')$).

*) Многообразие односвязно, если всякий замкнутый путь в нем можно непрерывно стянуть в точку.

**) См. Е. Брискорн, Примеры из дифференциальной топологии особенностей.— сб. пер. «Математика», 1967, 11, 6, стр. 132—143.

Следующий фундаментальный факт приводится без доказательства и не будет использоваться в дальнейшем.

Теорема. *Всякое многообразие $M^n$ диффеоморфно подмногообразию евклидова пространства достаточно большой размерности* $\mathbf{R}^N$ (*например, достаточно* $N > 2n$, *где* $n = \dim M^n$).

Таким образом, абстрактное понятие многообразия в действительности охватывает не больший круг объектов, чем «$n$-мерные поверхности в $N$-мерном пространстве». Преимущество абстрактного подхода состоит в том, что он сразу охватывает и те случаи, когда заранее не дано никакого вложения в евклидово пространство, а его привлечение привело бы лишь к ненужным усложнениям (пример: проективное пространство $\mathbf{RP}^n$). Положение здесь такое же, как с конечномерными линейными пространствами (они все изоморфны координатному пространству $\{(x_1, \ldots, x_n)\}$, но привлечение координат часто лишь усложняет дело).

**9. Пример.** Рассмотрим в заключение пять интересных многообразий (рис. 247). $M_1 = SO(3)$ есть *группа ортогональных матриц* третьего порядка с определителем $+1$. Поскольку матрица имеет 9 элементов, $M_1$ есть подмножество пространства $\mathbf{R}^9$. Легко видеть, что это подмножество является в действительности подмногообразием.

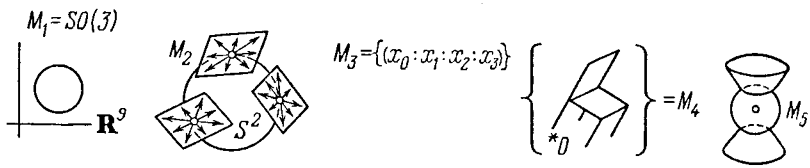


Рис. 247. Примеры трехмерных многообразий.

$M_2 = T_1S^2$ есть *множество всех касательных векторов длины* 1 *к сфере* $S^2$ в трехмерном евклидовом пространстве. Ввести структуру дифференцируемого многообразия в этом множестве предоставляется читателю (ср. § 34).

$M_3 = \mathbf{RP}^3$ — это *трехмерное проективное пространство.*

$M_4$ — *конфигурационное пространство твердого тела*, закрепленного в неподвижной точке $O$.

$M_5$ — *подмногообразие пространства* $\mathbf{R}^6 = {}^{\mathbf{R}}\mathbf{C}^3$, *заданное уравнениями* $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$, $|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2 = 2$.

Задача* 1. Какие из многообразий $M_1$ — $M_5$ диффеоморфны?

## § 34. Касательное расслоение. Векторные поля на многообразии

С каждым гладким многообразием $M$ связано другое многообразие (вдвое большей размерности), называемое *касательным расслоением* *) $M$ и обозначаемое $TM$. Касательное расслоение позволит нам сразу перенести на многообразия всю теорию обыкновенных дифференциальных уравнений.

*) Касательное расслоение — частный случай векторного расслоения; еще более общее понятие — расслоенное пространство. Все эти понятия относятся к числу основных в топологии и в анализе, но мы ограничимся лишь касательным расслоением, которое особенно важно для теории *обыкновенных* дифференциальных уравнений.

**1. Касательное пространство.** Пусть $M$ — гладкое многообразие. *Касательным к $M$ в точке $x$ вектором* $\xi$ называется класс эквивалентности выходящих из $x$ кривых; две кривые (рис. 248)

$$\gamma_1\colon I\to M,\qquad \gamma_2\colon I\to M$$

эквивалентны, если их изображения на какой-либо карте $\varphi\gamma_1\colon I\to U$, $\varphi\gamma_2\colon I\to U$ эквивалентны.

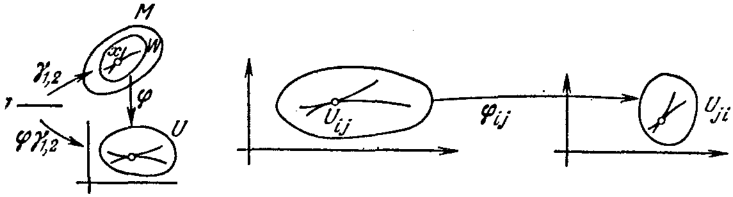


Рис. 248. Касательный вектор.

Заметим, что понятие эквивалентности кривых не зависит от выбора карты атласа (см. § 5): из эквивалентности на карте $\varphi_i$ следует эквивалентность на любой другой $\varphi_j$, так как переход с одной карты на другую, $\varphi_{ij}$, есть диффеоморфизм.

Множество векторов, касательных к $M$ в $x$, имеет структуру линейного пространства, не зависящую от выбора карты (см. § 5). Это линейное пространство называется *касательным пространством к $M$ в $x$* и обозначается $T_xM$. Его размерность равна размерности $M$.

Пример 1. Пусть $M^n$ — подмногообразие аффинного пространства $\mathbf{R}^N$ (рис. 249). Тогда $T_xM^n$ можно представить себе в виде $n$-мерной плоскости в $\mathbf{R}^N$, проходящей через $x$. При этом, однако, следует помнить, что *касательные пространства к $M$ в разных точках $x$, $y$ не пересекаются*: $T_xM\cap T_yM=\varnothing$.

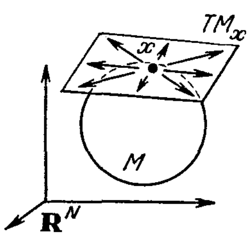


Рис. 249. Касательное пространство.

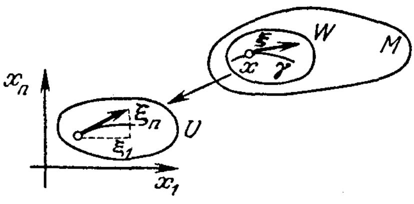


Рис. 250. Координаты касательного вектора.

**2. Касательное расслоение.** Рассмотрим объединение касательных пространств к многообразию $M$ во всех его точках $TM=\bigcup\limits_{x\in M}T_xM$.

Множество $TM$ имеет естественную структуру гладкого многообразия.

Действительно, рассмотрим какую-нибудь карту на многообразии $M$, и пусть $(x_1,\ldots,x_n)\colon W\to U\subset\mathbf{R}^n$ (рис 250) — локальные координаты в окрестности $W$ точки $x$, задающие эту карту. Всякий вектор $\xi$, касательный к $M$ в точке $x \in W$, задается набором своих компонент $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в указанной системе координат. Именно, если $\gamma$: $I \to M$ — кривая, выходящая из $x$ по направлению $\xi$ в момент $t_0$, то $\xi_i = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=t_0} x_i(\gamma(t))$. Таким образом, всякий вектор $\xi$, касательный к $M$ в одной из точек области $W$, задается набором $2n$ чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — $n$ координат «точки приложения» $x$ и $n$ «компонент» $\xi_i$. Мы получили карту части множества $TM$:

$$\psi\colon TW \to \mathbf{R}^{2n}, \qquad \psi(\xi) = (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n).$$

Различные карты $TM$, соответствующие разным картам атласа $M$, согласованы (класса $C^{r-1}$, если $M$ класса $C^r$). Действительно, пусть $(y_1, \ldots, y_n)$ — другая локальная система координат на $M$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — компоненты вектора в этой системе; тогда

$$y_i = y_i(x_1, \ldots, x_n), \qquad \eta_i = \sum_{j=1}^{n} (\partial y_i / \partial x_j)\, \xi_j \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

— гладкие функции от $x_j$ и $\xi_j$.

Итак, множество $TM$ всех касательных к $M$ векторов получило структуру гладкого многообразия размерности $2n$.

Определение. Многообразие $TM$ называется *касательным расслоением* *) многообразия $M$.

Существуют естественные отображения $i$: $M \to TM$ (*нулевое сечение*) и $p$: $TM \to M$ (*проекция*): $i(x)$ есть нулевой вектор $T_xM$, а $p(\xi)$ есть та точка $x$, в которой $\xi$ касается $M$ (рис. 251).

Задача 1. Докажите, что отображения $i$, $p$ дифференцируемы, что $i$ является диффеоморфизмом $M$ на $i(M)$ и что $p \circ i$: $M \to M$ — тождественное отображение.

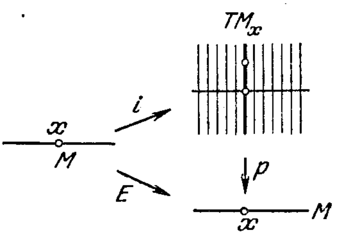


Рис. 251. Касательное расслоение

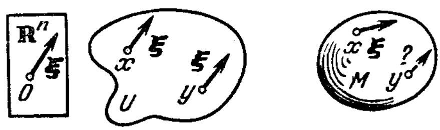


Рис. 252. Параллелизованное и непараллелизуемое многообразия.

Прообразы точек $x \in M$ при отображении $p$: $TM \to M$ называются *слоями* расслоения $TM$. Каждый слой имеет структуру линейного пространства. Многообразие $M$ называется *базой* расслоения $TM$.

**3. Замечание о параллелизуемости.** Касательное расслоение аффинного пространства $\mathbf{R}^n$ или его области $U$ имеет еще дополнительную структуру прямого произведения: $TU = U \times \mathbf{R}^n$.

Действительно, касательный вектор к $U$ можно задать парой $(x, \xi)$, где $x \in U$, а $\xi$ — вектор линейного пространства $\mathbf{R}^n$, для которого указан линейный изоморфизм с $T_xU$ (рис. 252).

*) Мы будем использовать это краткое название вместо более педантичного термина *пространство касательного расслоения*.

Можно выразить это иначе, сказав, что аффинное пространство *параллелизовано*: для касательных векторов к области $U$ пространства $\mathbf{R}^n$ в разных точках $x$ и $y$ определено равенство.

Касательное расслоение многообразия вовсе не обязано быть прямым произведением, и, вообще говоря, нельзя разумно определить равенство векторов, приложенных в разных точках многообразия $M$.

Положение здесь такое же, как с листом Мёбиуса (рис. 253), который является расслоением с базой окружность и слоем прямая, но не является прямым произведением окружности на прямую.

Определение. Многообразие $M$ называется *параллелизованным*, если в его касательном расслоении введена структура прямого

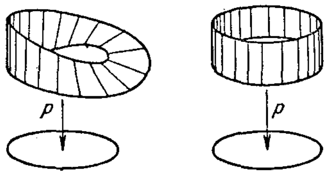


Рис. 253. Расслоение, не являющееся прямым произведением.

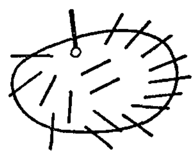

Рис. 254. Теорема о еже.

произведения, т. е. задан диффеоморфизм $TM^n \cong M^n \times \mathbf{R}^n$, линейно переводящий $T_xM$ в $x \times \mathbf{R}^n$. Многообразие *параллелизуемо*, если оно может быть параллелизовано.

Пример 1. Любая область в евклидовом пространстве естественно параллелизована.

Задача 1. Докажите, что тор $T^n$ параллелизуем, а лист Мёбиуса нет

Теорема*. *Из сфер $S^n$ параллелизуемы только следующие три: $S^1$, $S^3$, $S^7$. В частности, двумерная сфера непараллелизуема*:

$$TS^2 \neq S^2 \times \mathbf{R}^2.$$

(Отсюда вытекает, например, что ежа нельзя причесать: хоть одна игла будет перпендикулярна поверхности (рис. 254).)

Читатель, решивший задачу в конце § 33, легко докажет непараллелизуемость $S^2$ (указание: $\mathbf{RP}^3 \not\cong S^2 \times S^1$). Параллелизация окружности $S^1$ очевидна. Параллелизовать $S^3$ — поучительное упражнение (указание: $S^3$ — это группа, а именно группа кватернионов с модулем 1). Полное доказательство сформулированной теоремы требует довольно глубокого проникновения в топологию; оно было получено относительно недавно.

Аналитики склонны считать все расслоения прямыми произведениями и все многообразия параллелизуемыми. Этой ошибки следует остерегаться.

**4. Касательное отображение.** Пусть $f\colon M \to N$ — гладкое отображение многообразия $M$ в многообразие $N$ (рис. 255). Обозначим через $f_{*x}$ индуцированное отображение касательных пространств. Оно определяется, как в § 6, и является линейным отображением одного линейного пространства в другое:

$$f_{*x}\colon T_xM \to T_{f(x)}N.$$

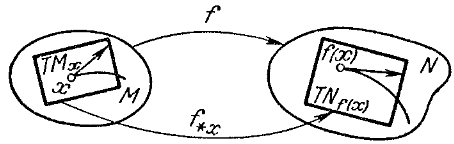


Рис. 255. Производная отображения $f$ в точке $x$.

Пусть $x$ пробегает $M$. Предыдущая формула определяет отображение

$$f_*\colon TM \to TN, \qquad f_*|_{T_xM} = f_{*x},$$

касательного расслоения $M$ в касательное расслоение $N$. Это отображение дифференцируемо (почему?) и линейно отображает слои $TM$ в слои $TN$ (рис. 256).

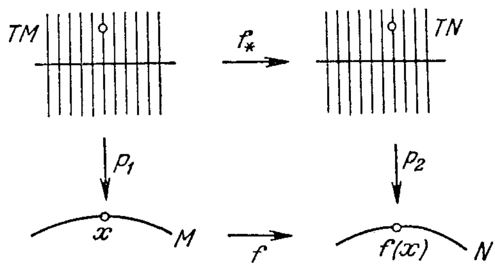


Рис. 256. Касательное отображение.

Отображение $f_*$ называется *касательным отображением* к $f$ (употребляется также обозначение $Tf\colon TM \to TN$).

Задача 1. Пусть $f\colon M \to N$ и $g\colon N \to K$ — гладкие отображения, $g \circ f\colon M \to K$ — их суперпозиция. Доказать, что $(g \circ f)_* = (g_*) \circ (f_*)$, т. е. что

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dr, "g"] & \\ M \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & K \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & TN \arrow[dr, "g_*"] & \\ TM \arrow[ur, "f_*"] \arrow[rr, "(g\circ f)_*"'] & & TK \end{tikzcd}$$

Терминологическое замечание. В анализе эта формула называется правилом дифференцирования сложной функции в алгебре — функториальностью (ковариантной) перехода к касательному отображению.

**5. Векторные поля.** Пусть $M$ — гладкое (класса $C^{r+1}$) многообразие, $TM$ — его касательное расслоение (рис. 257).

Определение. *Векторное поле* *) (класса $C^r$) $\boldsymbol{v}$ на $M$ есть гладкое (класса $C^r$) отображение $\boldsymbol{v}\colon M \to TM$ такое, что отображение

*) Употребляется также термин *сечение касательного расслоения.*

$p\circ v\colon M\to M$ — тождественное: диаграмма

$$\begin{tikzcd} & TM \arrow[d, "p"] \\ M \arrow[ur, "v"] \arrow[r, "E"'] & M \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $p(v(x))=x$.

Замечание. Если $M$ — область пространства $\mathbf{R}^n$ с координатами $x_1, \ldots, x_n$), то это определение совпадает со старым (§ 5).

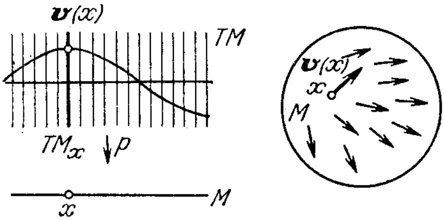


Рис 257. Векторное поле.

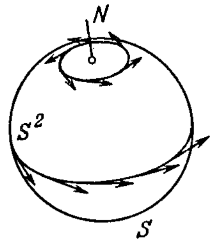


Рис. 258. Поле скоростей.

Однако в новом определении никакая специальная система координат не участвует.

Пример. Рассмотрим семейство $g^t$ вращений сферы $S^2$ вокруг оси $SN$ на угол $t$ (рис. 258). Каждая точка сферы $x\in S^2$ описывает при вращении кривую (параллель) и имеет скорость

$$v(x)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} g^t x\in T_x S^2.$$

Мы получаем отображение $v\colon S^2\to TS^2$; очевидно, $pv=E$, т. е. $v$ — векторное поле на $S^2$.

Вообще, если $g^t\colon M\to M$ — однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия $M$, то возникает векторное поле фазовой скорости на $M$, точь-в-точь как в § 5.

Вся локальная теория (нелинейных) обыкновенных дифференциальных уравнений немедленно переносится на многообразия, так как мы позаботились своевременно (в § 5) о независимости основных понятий от системы координат.

В частности, на многообразия переносится основная локальная теорема о выпрямлении векторного поля и локальные теоремы существования, единственности, непрерывности и дифференцируемости по начальным условиям. Специфика многообразия проявляется лишь при рассмотрении нелокальных вопросов. Простейшими из них являются вопросы о продолжении решений и о существовании фазового потока с данным полем фазовой скорости.

## § 35. Фазовый поток, заданный векторным полем

Доказанная ниже теорема является простейшей теоремой качественной теории дифференциальных уравнений: она дает условия, при которых имеет смысл ставить вопрос о поведении решений дифференциального уравнения на бесконечном интервале времени.

Из этой теоремы вытекает, в частности, непрерывность и дифференцируемость решения по начальным данным в целом (т. е. на любом конечном интервале времени). Эта теорема полезна также как технический метод для конструирования диффеоморфизмов. Например, с ее помощью можно доказать, что всякое замкнутое многообразие, имеющее гладкую функцию лишь с двумя критическими точками, гомеоморфно сфере.

**1. Теорема.** *Пусть $M$ — гладкое (класса $C^r$, $r \geqslant 2$) многообразие* (рис. 259), $v$: $M \to TM$ *— векторное поле. Пусть вектор $v(x)$ отличен*

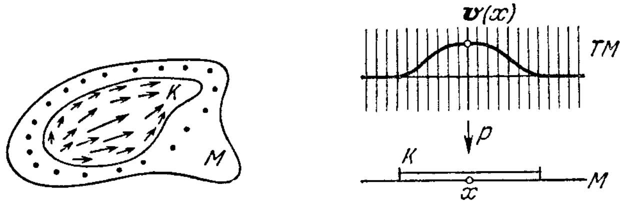


Рис. 259. Векторное поле, равное 0 вне компакта $K$.

*от нулевого вектора $T_xM$ только лишь в компактной части $K$ многообразия $M$. Тогда существует однопараметрическая группа диффеоморфизмов $g^t$: $M \to M$, для которой поле $v$ является полем фазовой скорости:*

$$\frac{d}{dt} g^t x = v(g^t x). \qquad (1)$$

Следствие 1. *Всякое векторное поле $v$ на компактном многообразии $M$ является полем фазовой скорости некоторой однопараметрической группы диффеоморфизмов.*

В частности, в условиях теоремы или в условиях следствия 1 имеет место

Следствие 2. *Всякое решение дифференциального уравнения*

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in M, \qquad (2)$$

*можно продолжать вперед и назад неограниченно. При этом значение решения $g^t x$ в момент $t$ зависит от $t$ и от начального условия $x$ гладко.*

Замечание. Условие компактности нельзя отбросить.

Пример 1. $M = \mathbf{R}$, $\dot{x} = x^2$ (см. § 1, п. 7): решения нельзя продолжать неограниченно.

Пример 2. $M = \{x: 0 < x < 1\}$, $\dot{x} = 1$

Приступаем к доказательству теоремы.

**2. Построение диффеоморфизмов $g^t$ при малых $t$.** *Для каждой точки $x \in M$ существует открытая окрестность $U \subset M$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что для любой точки $y$ из $U$ и для любого $t$ с $|t| < \varepsilon$ решение $g^t y$ уравнения (2) с начальным условием $y$ (при $t = 0$) существует, единственно, дифференцируемо зависит от $t$ и от $y$ и удовлетворяет условию*

$$g^{t+s}y = g^t g^s y, \tag{3}$$

*если* $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$, $|s+t| < \varepsilon$.

Действительно, точка $x$ изображается на некоторой карте, а для уравнений в области аффинного пространства наше утверждение доказано (см. гл. 2 и гл. 4) *).

Итак, компактное множество $K$ покрыто окрестностями $U$. Мы можем выбрать конечное покрытие $\{U_i\}$.

Пусть $\varepsilon_i$ — соответствующие числа $\varepsilon$; возьмем $\varepsilon_0 = \min \varepsilon_i > 0$.

Тогда при $|t| < \varepsilon_0$ определены *в целом* диффеоморфизмы $g^t\colon M \to M$, $g^{t+s} = g^t g^s$, если $|s|$, $|t|$, $|s+t| < \varepsilon$, $g^t x = x$ при $x$ вне $K$.

Действительно, хотя определенные с помощью разных карт решения уравнения (2) с начальным условием $x$ (при $t = 0$) a priori различны, они совпадают при $|t| < \varepsilon_0$ ввиду выбора $\varepsilon_0$ и локальной теоремы единственности.

Далее, по локальной теореме дифференцируемости точка $g^t x$ зависит дифференцируемо от $t$ и $x$, а поскольку $g^t g^{-t} = E$, то отображение $g^t$ $M \to M$ — диффеоморфизм. Заметим, что $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = \boldsymbol{v}(x)$.

**3. Построение $g^t$ при любых $t$.** Представим $t$ в виде $n\varepsilon_0/2 + r$, где $n$ — целое и $0 \leqslant r < \varepsilon_0/2$. Такое представление существует и единственно. Диффеоморфизмы $g^{\varepsilon_0/2}$ и $g^r$ уже определены.

Положим $g^t = (g^{\varepsilon_0/2})^n g^r$. Это диффеоморфизм $M$ на $M$. При $|t| < \varepsilon_0/2$ новое определение согласуется с предыдущим (см. п. 2) определением. Поэтому $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} g^t x = \boldsymbol{v}(x)$.

Легко видеть, что при любых $s$, $t$

$$g^{s+t} = g^s g^t. \tag{4}$$

Действительно, пусть

$$s = (m\varepsilon_0/2) + p, \qquad t = (n\varepsilon_0/2) + q, \qquad s + t = (k\varepsilon_0/2) + r.$$

*) Доказательство единственности требует небольшого дополнительного рассуждения: нужно проверить, что из единственности решения с данными начальными условиями на каждой фиксированной карте вытекает единственность на многообразии. На неотделимом многообразии единственности может и не быть (пример: уравнение $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 1$ на многообразии, полученном из двух прямых $\{x\}$, $\{y\}$ отождествлением точек с равными отрицательными координатами). Если же многообразие $M$ отделимо, то проходит доказательство единственности из § 7, п. 6. (Отделимость используется при доказательстве совпадения значений решений $\varphi_1(T)$ и $\varphi_2(T)$ в первой точке $T$, начиная с которой они не совпадают.)

Тогда левая и правая части равенства (4) принимают вид

$$(g^{\varepsilon_0/2})^k g^r \quad \text{и} \quad (g^{\varepsilon_0/2})^m g^p (g^{\varepsilon_0/2})^n g^q$$

Возможны два случая:

1) $m+n=k, \quad p+q=r,$ 2) $m+n=k-1, \quad p+q=r+(\varepsilon_0/2).$

Заметим, что поскольку $|p|<\varepsilon_0/2$, $|q|<\varepsilon_0/2$, то диффеоморфизмы $g^{\varepsilon_0/2}$, $g^p$ и $g^q$ коммутируют. Отсюда вытекает формула (4) как в первом случае, так и во втором ($g^{\varepsilon_0/2}g^r=g^pg^q$, так как $|p|$, $|q|$, $|r|<\varepsilon_0/2$, $p+q=\varepsilon_0/2+r$).

Остается проверить, что точка $g^tx$ зависит от $t$ и $x$ дифференцируемо. Это следует, например, из того, что $g^t=(g^{t/N})^N$, а $g^{t/N}x$ при достаточно больших $N$ зависит дифференцируемо от $t$ и $x$ (см. п. 2)

Итак, $g^t$ есть однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия $M$; соответствующее поле фазовой скорости есть $\boldsymbol{v}$, и теорема доказана.

**4. Замечание.** Из доказанной теоремы легко вывести, что *каждое решение неавтономного уравнения*

$$\dot{x}=\boldsymbol{v}(t, x), \qquad x\in M, \qquad t\in\mathbf{R},$$

*заданного зависящим от времени $t$ векторным полем $\boldsymbol{v}$ на компактном многообразии $M$, можно продолжать неограниченно.*

Этим объясняется, в частности, возможность неограниченного продолжения решений линейного уравнения

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{v}(t, \boldsymbol{x})=A(t)\,\boldsymbol{x}, \qquad t\in\mathbf{R}, \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n. \tag{5}$$

В самом деле, будем рассматривать $\mathbf{R}^n$ как аффинную часть проективного пространства $\mathbf{RP}^n$. Пространство $\mathbf{RP}^n$ получается из своей аффинной части добавлением бесконечно удаленной плоскости: $\mathbf{RP}^n=\mathbf{R}^n\cup\mathbf{RP}^{n-1}$

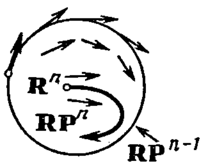


Рис. 260. Продолжение линейного векторного поля на проективное пространство.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — линейное векторное поле в $\mathbf{R}^n$ ($\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=A\boldsymbol{x}$). Легко проверяется.

Л е м м а. *Векторное поле $\boldsymbol{v}$ на $\mathbf{R}^n$ можно единственным образом продолжить до гладкого поля $\boldsymbol{v}'$ на $\mathbf{RP}^n$. Поле $\boldsymbol{v}'$ на бесконечно удаленной плоскости $\mathbf{RP}^{n-1}$ касается $\mathbf{RP}^{n-1}$.*

В частности, продолжим (при каждом $t$) поле $\boldsymbol{v}(t)$, задающее уравнение (5), до поля $\boldsymbol{v}'(t)$ на $\mathbf{RP}^n$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{v}'(t, \boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x}\in\mathbf{RP}^n, \qquad t\in\mathbf{R}. \tag{6}$$

Проективное пространство компактно. Следовательно, каждое решение уравнения (6) можно продолжать неограниченно (рис. 260).

Решение с начальным условием в $\mathbf{RP}^{n-1}$ всегда остается в $\mathbf{RP}^{n-1}$, так как поле $v'$ касается $\mathbf{RP}^{n-1}$.

По теореме единственности решения уравнения с начальными условиями в $\mathbf{R}^n$ остаются в пределах $\mathbf{R}^n$ при всех $t$. Но в пределах $\mathbf{R}^n$ уравнение (6) имеет вид (5). Итак, каждое решение уравнения (5) продолжается неограниченно.

Задача 1. Доказать лемму.

Решение 1. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ — аффинные координаты в $\mathbf{RP}^n$, $(y_1, \ldots, y_n)$ — другие аффинные координаты:

$$y_1 = x_1^{-1}, \quad y_k = x_k x_1^{-1} \ (k=2, \ldots, n).$$

Уравнение $\mathbf{RP}^{n-1}$ в новых координатах: $y_1 = 0$.

Дифференциальное уравнение (5)

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j, \quad i = 1, \ldots, n,$$

в новых координатах записывается в виде (рис. 261)

$$dy_1/dt = -y_1 (a_{1,1} + \sum a_{1,k} y_k), \qquad k > 1;$$

$$dy_k/dt = a_{k,1} + \sum a_{k,l} y_l - y_k (a_{1,1} + \sum a_{1,l} y_l),$$

$$k > 1, \quad l > 1.$$

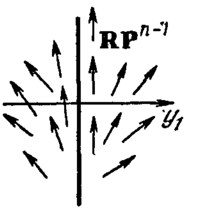

Рис. 261 Поведение продолженного поля вблизи бесконечно удаленной плоскости.

Из этих формул, верных при $y_1 \neq 0$, видно, как доопределить поле при $y_1 = 0$. При $y_1 = 0$ находим $dy_1/dt = 0$, что и доказывает лемму.

Решение 2. Аффинное преобразование можно рассматривать как проективное, оставляющее на месте бесконечно удаленную плоскость, но не ее точки. В частности, линейные преобразования $e^{At}$ продолжаются до диффеоморфизмов проективного пространства, оставляющих на месте бесконечно удаленную плоскость. Эти диффеоморфизмы образуют однопараметрическую группу; ее поле фазовой скорости и есть $v'$.

## § 36. Индексы особых точек векторного поля

Здесь рассмотрены простые применения топологии к исследованию дифференциальных уравнений.

**1. Индекс кривой.** Начнем с наглядных рассуждений; ниже они будут подкреплены точными определениями и доказательствами (см. п. 7).

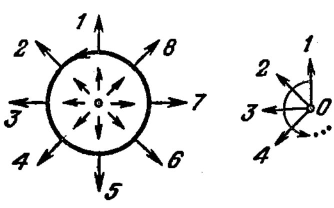

Рис. 262 Кривая индекса 1

Рассмотрим векторное поле, заданное на ориентированной евклидовой плоскости. Пусть на плоскости дана замкнутая ориентированная кривая, не проходящая через особые точки поля (рис. 262). Пусть точка обходит кривую в положительном направлении. Вектор поля в рассматриваемой точке при движении точки будет непрерывно поворачиваться *). Когда точка, обой-

*) Чтобы следить за поворотом вектора, удобно снести все векторы в одну точку $O$, следуя естественной параллелизации плоскости.

дя кривую, вернется на место, вектор тоже вернется к исходному положению. Но при этом он может делать несколько оборотов в ту или другую сторону.

Число оборотов вектора поля при обходе кривой называется *индексом* кривой. При этом число оборотов берется со знаком плюс, если вектор вращается в сторону, заданную ориентацией плоскости (от первого орта ко второму), и со знаком минус в противном случае.

Пример 1. Индексы кривых $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ на рис. 263 равны 1, 0, 2, и $-1$ соответственно.

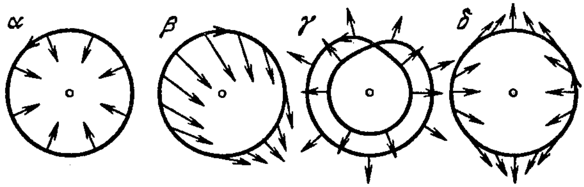


Рис. 263. Кривые с разными индексами.

Пример 2. Пусть $O$ — неособая точка поля. Тогда индекс всякой кривой, лежащей в достаточно малой окрестности точки $O$, равен 0.

Действительно, направление поля в точке $O$ непрерывно и в достаточно малой ее окрестности меняется меньше чем, скажем, на $\pi/2$.

Задача 1. Зададим векторное поле на плоскости $\mathbf{R}^2 = {}^{R}\mathbf{C}$ без точки $O$ формулой $v(z) = z^n$ ($n$ — целое число, не обязательно положительное) Сосчитать индекс окружности $z = e^{i\varphi}$, ориентированной в сторону возрастания $\varphi$ (плоскость ориентирована репером 1, $i$).

*Ответ.* $n$.

**2. Свойства индекса.**

Свойство 1. *При непрерывной деформации замкнутой кривой ее индекс не меняется, пока кривая не проходит через особые точки.*

Действительно, направление вектора поля вне особых точек меняется непрерывно; поэтому число оборотов также непрерывно зависит от кривой. Будучи целым числом, оно постоянно.

Свойство 2. *Индекс кривой не меняется при непрерывной деформации векторного поля, если только при этом на кривой во все время деформации нет особых точек поля.*

Из этих двух свойств, интуитивно достаточно очевидных *), вытекает множество глубоких теорем.

**3. Примеры.**

Пример 1. Рассмотрим векторное поле на плоскости. Пусть $D$ — круг, а $S$ — его окружность **).

---

*) Аккуратная формулировка и доказательство сформулированных утверждений требуют некоторой топологической техники: гомотопий, гомологий или чего-нибудь в этом роде (далее мы воспользуемся с этой целью формулой Грина). См., например, книгу Н. Стинрода и У. Чина, «Первые понятия топологии» (М.: Мир, 1967).

**) Можно также рассмотреть более общий случай, когда $D$ — любая плоская область, ограниченная простой замкнутой кривой $S$.

Теорема. *Если индекс кривой $S$ отличен от 0, то внутри ограниченной ею области $D$ есть хоть одна особая точка.*

В самом деле, если особых точек нет, то $S$ можно внутри $D$ деформировать непрерывно и не проходя через особые точки, так что после деформации получится сколь угодно близкая к одной точке $O$ кривая (можно даже просто деформировать $S$ в точку $O$). Индекс полученной маленькой кривой равен 0. Но при деформации индекс не меняется: значит, и вначале он был равен 0.

Задача 1. Докажите, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=x+P(x, y), \qquad \dot{y}=y+Q(x, y),$$

где $P$ и $Q$ — ограниченные на всей плоскости функции, имеет по меньшей мере одно положение равновесия.

Пример 2. Докажем основную теорему алгебры:

*Всякое уравнение $z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n=0$ имеет по меньшей мере один комплексный корень.*

Рассмотрим векторное поле $\boldsymbol{v}$ на плоскости комплексного переменного $z$, заданное формулой $\boldsymbol{v}(z)=z^n+a_1z^{n-1}+\ldots+a_n$. Особые точки поля $\boldsymbol{v}$ — это корни нашего уравнения.

Лемма. *Индекс окружности достаточно большого радиуса в построенном поле равен $n$* (ориентации — как в задаче п. 1).

В самом деле, формула

$$\boldsymbol{v}_t(z)=z^n+t(a_1z^{n-1}+\ldots+a_n), \qquad 0\leqslant t\leqslant 1,$$

определяет непрерывную деформацию исходного поля в поле $z^n$. Пусть $r>1+|a_1|+\ldots+|a_n|$. Тогда $r^n>|a_1|r^{n-1}+\ldots+|a_n|$. Поэтому на окружности радиуса $r$ во все время деформации нет особых точек. По свойству 2 индекс этой окружности в исходном поле и в поле $z^n$ одинаков. Но в поле $z^n$ он равен $n$.

Лемма доказана.

По предыдущей теореме внутри круга радиуса $r$ есть особые точки векторного поля, т. е. корни нашего уравнения.

Теорема доказана.

Пример 3. Докажем следующую теорему о неподвижной точке:

Теорема. *Всякое гладкое*) отображение $f\colon D\to D$ замкнутого круга в себя имеет хоть одну неподвижную точку.*

Будем считать, что на плоскости круга $D$ введена структура линейного пространства с началом в центре круга (рис. 264). Неподвижные точки отображения $f$ — это особые точки векторного поля $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{x}$.

Предположим, что особых точек в $D$ нет. Тогда их нет и на окружности.

Лемма. *Индекс окружности круга $D$ в поле $\boldsymbol{v}$ равен* 1.

---

*) Эта теорема справедлива для любого непрерывного отображения, но мы здесь считаем все отображения гладкими и докажем теорему (см. п. 7) только в этом предположении.

Действительно, существует такая непрерывная деформация поля $v$ в поле $-x$, что во все время деформации на окружности нет особых точек (например, достаточно положить $v_t(x)=tf(x)-x$, $0\leqslant t\leqslant 1$). Поэтому индексы окружности в полях $v_0=-x$ и $v_1=v$ одинаковы. Но индекс окружности $|x|=r$ в поле $-x$ легко сосчитать непосредственно: он равен 1.

Лемма доказана.

По теореме примера 1 внутри круга есть особая точка поля $v$, т. е. неподвижная точка отображения $f$.

**4. Индекс особой точки векторного поля.** Пусть $O$ — изолированная особая точка векторного поля на плоскости, т. е. пусть в некоторой

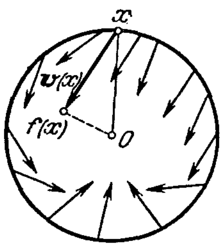


Рис. 264. Отображение круга в себя.

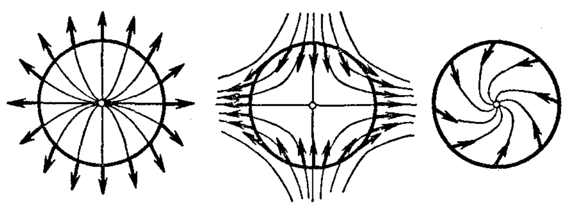

Рис. 265. Индексы простых особых точек равны $\pm 1$

окрестности точки $O$ нет других особых точек. Рассмотрим окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $O$; предположим, что плоскость ориентирована и что ориентация на окружности выбрана положительной (как в п. 1).

Теорема. *Индекс окружности достаточно малого радиуса с центром в изолированной особой точке $O$ не зависит от радиуса окружности, лишь бы он был достаточно мал.*

В самом деле, две такие окружности можно непрерывно продеформировать одну в другую, не проходя через особые точки.

Заметим также, что вместо окружности можно было бы взять любую другую кривую, обходящую вокруг $O$ один раз в положительном направлении.

Определение. Индекс какой-нибудь (и тогда любой) достаточно малой положительно ориентированной окружности с центром в изолированной особой точке векторного поля называется *индексом особой точки.*

Примеры. Индексы особых точек типа узел, седло и фокус (или центр) равны $+1$, $-1$, $+1$ соответственно (рис. 265).

Особая точка векторного поля называется *простой*, если оператор линейной части поля в этой точке невырожден. Простые особые точки на плоскости — это узлы, седла, фокусы и центры. Таким образом, индекс простой особой точки равен всегда $\pm 1$.

Задача 1. Построить векторное поле с особой точкой индекса $n$.

Указание. См., например, задачу п. 1.

Задача 2. Докажите, что индекс особой точки не зависит от выбора ориентации плоскости.

Указание. При изменении ориентации одновременно изменяются и положительное направление обхода окружности, и положительное направление счета числа оборотов.

**5. Теорема о сумме индексов.** Пусть $D$ — компактная область на ориентированной плоскости, ограниченная простой кривой $S$. Ориентируем кривую $S$, как полагается ориентировать границу $D$ (т. е. так, чтобы область $D$ оставалась при обходе слева). Это значит, что репер, образованный вектором скорости обхода и вектором нормали, направленным внутрь $D$, должен задавать положительную ориентацию плоскости.

Пусть на плоскости задано векторное поле, не имеющее особых точек на кривой $S$ и имеющее лишь конечное число особых точек в области $D$.

Теорема. *Индекс кривой $S$ равен сумме индексов особых точек поля, лежащих внутри $D$.*

Для доказательства заметим, что индекс кривой обладает следующим свойством аддитивности.

Рассмотрим две ориентированные кривые $\gamma_1$, $\gamma_2$, проходящие через одну точку. Можно образовать новую ориентированную кривую $\gamma_1+\gamma_2$, пройдя сначала $\gamma_1$, а потом $\gamma_2$.

Лемма. *Индекс кривой $\gamma_1+\gamma_2$ равен сумме индексов кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$.*

Действительно, вектор поля сделает $n_1$ оборотов при обходе кривой $\gamma_1$ и еще $n_2$ оборотов при обходе кривой $\gamma_2$, итого $n_1+n_2$ оборотов. Лемма доказана.

Теперь разобьем $D$ на части $D_i$ так, чтобы внутри каждой из них было не больше одной особой точки поля (рис. 266), а на границах чтобы особых точек не было. Ориентируем кривые $\gamma_i$, ограничивающие эти части, как полагается ориентировать границы (рис. 266); тогда по лемме

$$\operatorname{ind}\sum_i \gamma_i=\operatorname{ind}\Big(S+\sum_j \operatorname{ind}\delta_j\Big),$$

где $\delta_j$ — замкнутая кривая, представляющая часть границы области $D_i$, находящуюся внутри $D$ и пройденную два раза в разные стороны.

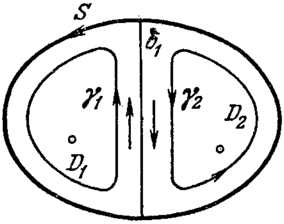

Рис. 266. Индекс кривой $S$ равен сумме индексов кривых $\gamma_1$ и $\gamma_2$.

Индекс каждой кривой $\delta_j$ равен 0, так как эта кривая стягивается в точку, минуя особые точки поля (см. п. 8). Индекс кривой $\gamma_i$ равен индексу той особой точки, которую эта кривая охватывает (или 0, если в область $D_i$, охватываемой этой кривой, особых точек нет). Теорема доказана.

Задача 1. Пусть $p$ — многочлен степени $n$ от комплексного переменного $z$, $D$ — область на плоскости переменного $z$, ограниченная кривой $S$.

Предположим, что на кривой $S$ нет корней многочлена. Докажите, что число корней многочлена внутри $D$ (с учетом кратностей) равно индексу кривой $S$ в поле $\boldsymbol{v}=p(z)$, т. е. числу оборотов вокруг 0 кривой $p(S)$.

Замечание. Мы получаем тем самым способ решения проблемы Рауса—Гурвица (см. § 23):

*Найти число $n_-$ корней данного многочлена в левой полуплоскости.*

С этой целью рассмотрим полукруг достаточно большого радиуса в левой полуплоскости с центром в точке $z=0$ и с диаметром на мнимой оси. Число корней в левой полуплоскости равно индексу границы этого полукруга (если его радиус достаточно велик и у многочлена нет чисто мнимых корней). Для вычисления индекса кривой $S$ достаточно сосчитать число $\nu$ оборотов образа мнимой оси, ориентированной от $-i$ к $+i$ вокруг начала координат. Действительно, легко проверить, что

$$n_- = \operatorname{ind} S = \nu + n/2,$$

так как образ полуокружности достаточно большого радиуса при отображении $p$ делает приблизительно $n/2$ оборотов вокруг начала координат (тем точнее $n/2$, чем больше радиус).

В частности, *все корни многочлена степени $n$ лежат в левой полуплоскости, если и только если точка $p(it)$ при изменении $t$ от $-\infty$ до $+\infty$ обходит начало координат $n/2$ раз (в сторону от 1 к $i$).*

### 6. Сумма индексов особых точек на сфере.

Задача* 1. Докажите, что индекс особой точки векторного поля на плоскости сохраняется при диффеоморфизме.

Таким образом, индекс — понятие геометрическое, не зависящее от системы координат. Это обстоятельство позволяет определить индекс особой точки не только на плоскости, но и на любом двумерном многообразии. Действительно, достаточно рассмотреть индекс особой точки на какой-нибудь карте: на других картах он будет тем же самым.

Пример 1. Рассмотрим сферу $x^2+y^2+z^2=1$ в евклидовом трехмерном пространстве. Векторное поле скорости вращения вокруг оси $z$ ($\dot{x}=y$, $\dot{y}=-x$, $\dot{z}=0$) имеет две особые точки: северный и южный полюсы (рис. 267). Индекс каждой из них равен $+1$.

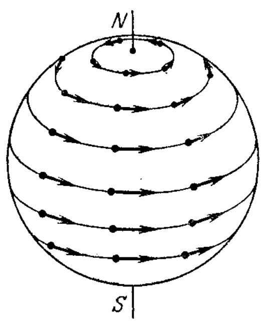


Рис. 267. Векторное поле на сфере, имеющее две особые точки индекса 1.

Предположим, что на сфере дано векторное поле, имеющее лишь изолированные особые точки. Тогда их конечное число, так как сфера компактна.

Теорема*. *Сумма индексов всех особых точек поля на сфере не зависит от выбора поля.*

Из предыдущего примера видно, что *эта сумма равна* 2.

Идея доказательства. Рассмотрим карту сферы, покрывающую ее всю, кроме одной точки, которую мы назовем полюсом. В евклидовой плоскости этой карты рассмотрим координатное векторное поле $\boldsymbol{e}_1$. Перенесем это поле на сферу. Тогда получим поле на сфере (не определенное в одном лишь полюсе), которое мы по-прежнему будем обозначать через $\boldsymbol{e}_1$.

Рассмотрим теперь карту окрестности полюса. На плоскости этой карты мы также можем нарисовать векторное поле на сфере $\boldsymbol{e}_1$, не определенное лишь в одной точке $O$. Как оно будет выглядеть, показано на рис. 268.

Лемма. *Индекс замкнутой кривой, обходящей один раз точку $O$ в построенном поле на плоскости, равен* 2.

Для доказательства леммы достаточно явно проделать описанные выше операции, взяв в качестве двух карт, например, карты сферы в стереографической проекции (рис. 235). Параллельные прямые первой карты перейдут на второй в окружности рис. 268, из которого ясно, что индекс равен 2.

Рассмотрим теперь векторное поле $\boldsymbol{v}$ на сфере. Выберем за полюс неособую точку поля. Тогда все особые точки поля изображаются на

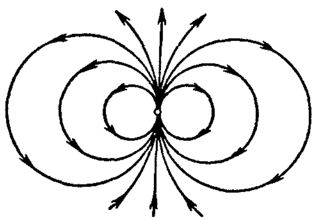

Рис. 268. Векторное поле, параллельное на одной карте сферы, но нарисованное на другой.

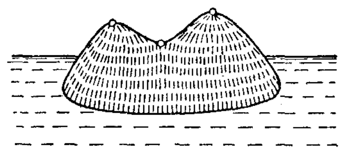

Рис. 269. На каждом острове сумма числа вершин с числом котловин на 1 больше числа перевалов.

карте дополнения к полюсу. Сумма индексов всех особых точек поля равна индексу окружности достаточно большого радиуса на плоскости этой карты (по теореме п. 5). Перенесем эту окружность на сферу, а со сферы на карту окрестности полюса. На этой карте индекс полученной окружности в исследуемом поле равен 0, так как полюс — неособая точка поля. Оставаясь на этой новой карте, мы можем истолковать индекс окружности на первой карте как «число оборотов поля $\boldsymbol{v}$ *относительно поля* $\boldsymbol{e}_1$» при обходе окружности.

Это число равно $+2$, так как на новой карте при обходе по окружности вокруг точки $O$ в положительную для первой карты сторону изображенное на новой карте поле $\boldsymbol{e}_1$ совершает 2 оборота, а поле $\boldsymbol{v}$ — 0 оборотов.

Задача* 2 Пусть $f\colon S^2 \to \mathbf{R}^1$ — гладкая функция на сфере, все критические точки которой просты (т. е. второй дифференциал в каждой критической точке невырожден) Докажите, что $m_0 - m_1 + m_2 = 2$, где $m_i$ — число критических точек, у которых отрицательный индекс инерции второго дифференциала равен $i$.

Иными словами, *если от числа минимумов отнять число седел и прибавить число максимумов, то всегда получится* 2. Например, число всех горных вершин на Земле плюс число всех котловин на 2 больше, чем число перевалов. Если ограничиться одним островом или материком, т. е. рассматривать функции на круге без критических точек на краю, то $m_0 - m_1 + m_2 = 1$ (рис. 269).

Указание. Рассмотрите градиент функции $f$.

Задача* 3. Докажите теорему Эйлера о многогранниках:

*Для всякого выпуклого ограниченного многогранника с $\alpha_0$ вершинами, $\alpha_1$ ребрами и $\alpha_2$ гранями $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$.*

Указание. Эту задачу можно свести к предыдущей.

Задача* 4. Докажите, что *сумма индексов $\chi$ особых точек векторного поля на любом двумерном компактном многообразии не зависит от поля.*

Число $\chi$ называется *эйлеровой характеристикой* многообразия. Например, выше мы видели, что эйлерова характеристика сферы $\chi(S^2)$ равна 2.

Задача 5. Найдите эйлерову характеристику тора, кренделя и сферы с $n$ ручками (рис. 245).

*Ответ.* 0, $-2$, $2-2n$.

Задача* 6. Перенесите результаты задач 2, 3 со сферы на любое двумерное компактное многообразие $M$:

$$m_0-m_1+m_2=\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2=\chi(M).$$

**7. Обоснование.** Дадим теперь точное определение *числа оборотов* векторного поля.

Пусть $\boldsymbol{v}$ — гладкое векторное поле, заданное в области $U$ плоскости с координатами $(x_1, x_2)$ своими компонентами $v_1(x_1, x_2)$, $v_2(x_1, x_2)$. Система координат $(x_1, x_2)$ задает на плоскости ориентацию и евклидову структуру.

Выкинем из области $U$ особые точки поля и обозначим оставшуюся область через $U'$. Зададим отображение области $U'$ на окружность формулой $f\colon U'\to S^1$, $f(x)=\dfrac{\boldsymbol{v}(x)}{|\boldsymbol{v}(x)|}$.

Это отображение гладкое (так как мы исключили особые точки поля). Рассмотрим какую-нибудь точку $x$ области $U'$. На окружности в окрестности образа $f(x)$ точки $x$ можно ввести угловую координату $\varphi$. Мы получаем тогда определенную в окрестности точки $x$ гладкую вещественную функцию $\varphi(x_1, x_2)$.

Сосчитаем ее полный дифференциал. Имеем при $v_1\neq 0$

$$d\varphi=d\operatorname{arctg}\frac{v_2}{v_1}=\frac{v_2\,dv_1-v_1\,dv_2}{v_1^2+v_2^2}. \tag{1}$$

Левая часть равна правой и при $v_1=0$, $v_2\neq 0$. Итак, хотя сама функция $\varphi$ определена только локально и только с точностью до прибавления кратного $2\pi$, ее дифференциал есть вполне определенная гладкая дифференциальная форма во всей области $U'$. Мы будем обозначать эту форму через $d\varphi$.

Определение. *Индексом ориентированной замкнутой кривой* $\gamma\colon S^1\to U'$ называется интеграл формы (1) по кривой $\gamma$, поделенный на $2\pi$:

$$\operatorname{ind}\gamma=\frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma} d\varphi. \tag{2}$$

Теперь мы можем аккуратно доказывать приведенные выше теоремы. Докажем, например, теорему о сумме индексов (см. п. 5).

Доказательство. Пусть $D$ — область с границей $S$, внутри которой данное поле $\boldsymbol{v}$ имеет конечное число особых точек. Обозначим через $D'$ область, полученную из $D$ выкидыванием малых круговых окрестностей особых точек. Тогда граница $D'$ с учетом ориентаций есть $\partial D'=S-\sum\limits_i S_i$, где $S_i$ — окружность, обходящая вокруг $i$-й особой точки в положительную сторону (рис. 270). Применим к области $D'$ и интегралу (2) формулу Грина. Получим

$$\iint\limits_{D'} 0 = \oint\limits_{S} d\varphi - \sum_i \oint\limits_{S_i} d\varphi.$$

Слева стоит 0, так как форма (1) локально является полным дифференциалом. Ввиду определения (2) получаем $\operatorname{ind} S = \sum \operatorname{ind} S_i$, что и требовалось доказать.

Задача* 1. Докажите, что индекс замкнутой кривой — целое число.

Задача* 2. Провести полностью доказательство утверждений пп. 1, 2, 3, 4.

**8. Многомерный случай.** Многомерное обобщение понятия *число оборотов* называется степенью отображения.

Степень отображения — это число прообразов точки с учетом знаков, определяемых ориентациями. Например, степень отображения

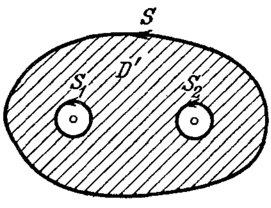


Рис. 270. Область, к которой применяется формула Грина.

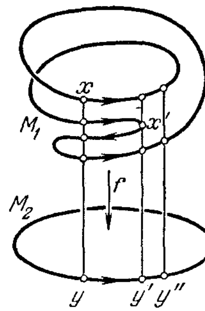


Рис. 271. Отображение степени 2.

ориентированной окружности на ориентированную окружность, нарисованного на рис. 271, равна 2, так как число прообразов точки $y$, учитывая знаки, равно $1+1-1+1=2$.

Чтобы дать общее определение, поступаем следующим образом. Пусть $f\colon M_1^n \to M_2^n$ — гладкое отображение одного $n$-мерного ориентированного многообразия на другое такое же. Точка $x \in M_1^n$ многообразия-прообраза называется *регулярной точкой*, если производная отображения $f$ в точке $x$ есть невырожденный линейный оператор $f_{*x}\colon T_x M_1^n \to T_{f(x)} M_2^n$.

Например, точка $x$ на рис. 271 регулярна, а точка $x'$ нет.

Определение. *Степенью отображения $f$ в регулярной точке $x$* называется число $\deg_x f$, равное $+1$ или $-1$ в зависимости от того, переводит ли $f_{*x}$ заданную ориентацию пространства $T_x M_1^n$ в заданную ориентацию пространства $T_{f(x)} M_2^n$ или в противоположную.

Задача 1. Докажите, что степень линейного автоморфизма $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ во всех точках одинакова и равна $\deg_x A = \operatorname{sgn} \det A = (-1)^{m_-}$, где $m_-$ — количество собственных чисел оператора $A$ с отрицательной вещественной частью.

Задача 2. Пусть $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный автоморфизм в евклидовом пространстве. Определим отображение единичной сферы на себя формулой $f(x)=A(x)/|Ax|$. Найти степень отображения $f$ в точке $x$.

*Ответ.* $\deg_x f=\deg A$.

Задача 3. Пусть $f$: $S^{n-1} \to S^{n-1}$ — отображение, переводящее каждую точку сферы в диаметрально противоположную. Какова его степень в точке $x$?

*Ответ.* $\deg_x f=(-1)^n$.

Задача 4. Пусть $A$: $\mathbf{C}^n \to \mathbf{C}^n$ — $\mathbf{C}$-линейный автоморфизм. Найти степень его овеществления, ${}^{\mathbf{R}}A$.

*Ответ.* $+1$.

Рассмотрим теперь какую-нибудь точку $y$ многообразия-образа $M_2^n$. Точка $y \in M_2^n$ называется *регулярным значением отображения* $f$, если все точки ее полного прообраза $f^{-1}y$ регулярны. Например, на рис. 271 точка $y$ является регулярным значением, а точка $y'$ нет.

Предположим теперь дополнительно, что наши многообразия $M_1^n$ и $M_2^n$ компактны и связны. Тогда имеет место

Теорема.

1. *Регулярные значения существуют.*
2. *Число точек прообраза регулярного значения конечно.*
3. *Сумма степеней отображения во всех точках прообраза регулярного значения не зависит от того, какое именно регулярное значение мы рассматриваем.*

Доказательство этой теоремы довольно сложно и не будет здесь приводиться; оно имеется в учебниках топологии *).

Замечание 1. В действительности регулярными значениями являются почти все точки многообразия $M_2^n$: нерегулярные значения образуют множество меры 0.

Замечание 2. Условие компактности существенно не только для второго, но и для третьего утверждения теоремы. (Рассмотрите, например, вложение отрицательной полуоси в числовую прямую.)

Замечание 3. Число точек прообраза (без учета знаков) для разных регулярных значений может быть разным (например, на рис. 271 у значения $y$ их четыре, а у значения $y''$ всего два).

Определение. Сумма степеней отображения $f$ во всех точках прообраза регулярного значения называется *степенью отображения*:

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}y} \deg_x f.$$

Задача 5. Найти степень отображения окружности $|z|=1$ на себя, заданного формулой $f(z)=z^n$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

*Ответ.* $n$.

Задача 6. Найти степень отображения единичной сферы в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n$ на себя, заданного формулой $f(z)=Az/|Az|$, где $A$: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — невырожденный линейный оператор.

*Ответ.* $\deg f = \operatorname{sgn} \det A$.

Задача 7. Найти степень отображения комплексной проективной прямой $\mathbf{CP}^1$ на себя, заданного формулой а) $f(z)=z^n$; б) $f(z)=\overline{z}^n$.

*Ответ.* а) $n$; б) $-n$.

*) См., например, «Особенности дифференцируемых отображений» (М.: Мир, 1968, стр. 38—40).

Задача 8. Найти степень отображения комплексной прямой $\mathbf{CP}^1$ на себя, заданного многочленом степени $n$.

*Ответ.* $n$.

Задача* 9. Докажите, что индекс замкнутой кривой $\gamma$: $S^1 \to U'$, определенный в п. 7, совпадает со степенью следующего отображения $h$ окружности на окружность.

Пусть $f$: $U' \to S^1$ — построенное в п. 7 с помощью векторного поля $\boldsymbol{v}$ в области $U'$ отображение. Положим $h = f \circ \gamma$: $S^1 \to S^1$. Тогда

$$\operatorname{ind} \gamma = \deg h.$$

Определение. *Индексом изолированной особой точки* 0 векторного поля $\boldsymbol{v}$, заданного в содержащей 0 области евклидова пространства $\mathbf{R}^n$, называется степень соответствующего полю отображения $h$ сферы малого радиуса $r$ с центром в точке 0 на себя. Отображение $h$: $S^{n-1} \to S^{n-1}$, $S^{n-1} = \{x \in \mathbf{R}^n: |x| = r\}$ задается формулой $h(x) = \dfrac{r\boldsymbol{v}(x)}{|\boldsymbol{v}(x)|}$.

Задача 10. Пусть оператор $\boldsymbol{v}_{*0}$ линейной части поля $\boldsymbol{v}$ в точке 0 невырожден. Тогда индекс особой точки 0 равен степени этого оператора.

Задача 11. Найти индекс особой точки 0 поля в $\mathbf{R}^n$, соответствующего уравнению $\dot{x} = -x$.

*Ответ.* $(-1)^n$.

Понятие степени позволяет сформулировать многомерные аналоги рассмотренных выше двумерных теорем. Доказательства можно найти в учебниках по топологии.

В частности, *сумма индексов особых точек векторного поля на компактном многообразии любой размерности не зависит от выбора поля и определяется свойствами самого многообразия.* Это число называется *эйлеровой характеристикой* многообразия.

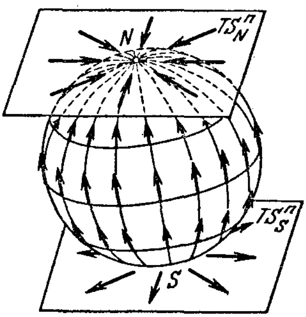


Рис. 272. Линеаризация дифференциального уравнения на сфере вблизи его особых точек.

Чтобы вычислить эйлерову характеристику многообразия, достаточно исследовать особые точки какого-нибудь одного дифференциального уравнения, заданного на нем.

Задача 12. Найти эйлерову характеристику сферы $S^n$, проективного пространства $\mathbf{RP}^n$, тора $T^n$.

*Ответ.* $\chi(S^n) = 2\chi(\mathbf{RP}^n) = 1 + (-1)^n$, $\chi(T^n) = 0$.

Решение. На торе любой размерности есть дифференциальное уравнение без особых точек (см., например, § 24, п. 5), поэтому $\chi(T^n) = 0$.

Ясно, что $\chi(S^n) = 2\chi(\mathbf{RP}^n)$. Действительно, рассмотрим отображение $p$: $S^n \to \mathbf{RP}^n$, переводящее каждую точку сферы $S^n \subset \mathbf{R}^{n+1}$ в прямую, соединяющую ее с началом координат. Отображение $p$ локально диффеоморфно; при этом прообраз каждой точки проективного пространства — это две диаметрально противоположные точки сферы. Следовательно, всякое векторное поле на $\mathbf{RP}^n$ определит на $S^n$ поле с вдвое большим числом особых точек, причем индексы каждой из двух противоположных особых точек на сфере будут такие же, как индекс соответствующей им точки в проективном пространстве.

Чтобы сосчитать $\chi(S^n)$, зададим сферу уравнением $x_0^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^{n+1}$ и рассмотрим функцию $x_0$: $S^n \to \mathbf{R}$.

Составим дифференциальное уравнение на сфере

$$\dot{x} = \operatorname{grad} x_0$$

и исследуем его особые точки (рис. 272). Векторное поле $\operatorname{grad} x_0$ обращается в 0 в двух точках: в северном полюсе $N$ $(x_0=1)$ и в южном $S$ $(x_0=-1)$. Линеаризуя дифференциальное уравнение в окрестности северного и южного полюса соответственно, получим уравнения

$$\dot{\xi}=-\xi,\quad \xi\in\mathbf{R}^n=T_NS^n;\qquad \dot{\eta}=\eta,\quad \eta\in\mathbf{R}^n=T_SS^n.$$

Следовательно, индекс северного полюса равен $(-1)^n$, а южного равен $(+1)^n$, значит, $\chi(S^n)=1+(-1)^n$.

В частности, отсюда вытекает, что *всякое векторное поле на четномерной сфере имеет хоть одну особую точку.*

Задача 13. Построить на нечетномерной сфере $S^{2n-1}$ векторное поле без особых точек.

Указание. Рассмотреть дифференциальное уравнение второго порядка $\ddot{\boldsymbol{x}}=-\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$.

# Программа экзамена

1. Теорема о выпрямлении (§ 7, пп. 1, 7) и ее доказательство (§ 32, п. 5).

2. Теоремы о существовании, единственности и дифференцируемости (§ 7, пп. 2—5 и § 31, пп. 1—8; § 32, пп. 1—4). Сжатые отображения (§ 30).

3. Теорема о продолжении (§ 7, п. 6) и теорема о том, что векторное поле на компактном многообразии задает фазовый поток (§ 35, пп. 1—3).

4. Фазовые кривые автономной системы. Теорема о замкнутых фазовых кривых (§ 9).

5. Производная по направлению векторного поля и первые интегралы (§ 10, § 12).

6. Экспонента линейного оператора. Экспонента комплексного числа и экспонента жордановой клетки (§ 14; § 15, пп. 4, 5; § 25, п. 1).

7. Теоремы о связи фазовых потоков, линейных уравнений, однопараметрических групп линейных преобразований и экспонент (§ 4, пп. 2—4; § 13, пп. 1—3; § 15, пп. 1—3).

8. Связь определителя, экспоненты и следа. Теорема Лиувилля об определителе Вронского (§ 16; § 18, п. 4; § 27, п. 6).

9. Классификация особых точек линейных систем на плоскости (§ 2, пп. 4, 5; § 17, п. 2; § 19, п. 4; § 20, пп. 3—5).

10. Решение линейных однородных автономных систем в комплексной и вещественной области в случае простых корней характеристического уравнения (§ 17, п. 1; § 18, п. 5; § 19; § 20).

11. Решение линейных однородных автономных уравнений и систем в случае кратных корней характеристического уравнения (§ 25).

12. Решение линейных неоднородных автономных уравнений с правой частью в виде суммы квазимногочленов (§ 26).

13. Линейные однородные неавтономные уравнения и системы. Определитель Вронского. Случай периодических коэффициентов (§ 27 и § 28, п. 1).

14. Решение линейных неоднородных уравнений с помощью вариации постоянных (§ 29).

15. Теорема об устойчивости по линейному приближению (§ 22, пп. 3—5; § 23).

16. Фазовые кривые линейного уравнения с чисто мнимыми корнями характеристического уравнения. Малые колебания консервативных систем (§ 24 и § 25, п. 6)

# Образцы экзаменационных задач*)

1. Для остановки речных судов у пристани с них сбрасывают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Какая сила будет тормозить судно, если канат делает 3 витка вокруг столба, коэффициент трения каната о столб равен 1/3 и рабочий на пристани тянет за свободный конец каната с силой 10 кгс?

2. Нарисовать на поверхности цилиндра фазовые кривые маятника, на который действует постоянный крутящий момент:

$$\ddot{x}=1+2\sin x.$$

Какие движения маятника отвечают кривым разных типов?

3. Вычислить матрицу $e^{At}$, где $A$ — данная матрица второго или третьего порядка.

4. Нарисовать образ квадрата $|x_i|<1$ при преобразовании фазового потока системы

$$\dot{x}_1=2x_2,\qquad \dot{x}_2=x_1+x_2$$

за время $t=1$.

5. Сколькими десятичными знаками записывается сотый член последовательности 1, 1, 6, 12, 29, 59, ... ($x_n=x_{n-1}+2x_{n-2}+n$, $x_1=x_2=1$)?

6. Нарисовать фазовую кривую системы

$$\dot{x}=x-y-z,\qquad \dot{y}=x+y,\qquad \dot{z}=3x+z,$$

проходящую через точку (1, 0, 0).

7. Найти все $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, при которых три функции $\sin\alpha t$, $\sin\beta t$, $\sin\gamma t$ линейно зависимы.

8. Нарисовать на плоскости $(x_1, x_2)$ траекторию точки, совершающей малые колебания:

$$\ddot{x}_i=-\partial U/\partial x_i,\qquad U=(5x_1^2-8x_1x_2+5x_2^2)/2.$$

Начальные условия: $x_1=1$, $x_2=0$, $\dot{x}_1=\dot{x}_2=0$.

9. На первоначально покоившийся математический маятник длины 1 м и весом 1 кгс в течение 1 с действовала горизонтальная сила 100 г. Найти амплитуду колебаний, которые установятся после прекращения действия силы (в см).

10. Исследовать, устойчиво ли по Ляпунову нулевое решение системы

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2,\\ \dot{x}_2=-\omega^2x_1,\end{cases}\qquad \omega(t)=\begin{cases}0{,}4 \text{ при } 2k\pi\leqslant t<(2k+1)\pi,\\ 0{,}6 \text{ при } (2k-1)\pi\leqslant t<2k\pi,\end{cases}$$

$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots$$

11. Найти все особые точки системы

$$\dot{x}=xy+12,\qquad \dot{y}=x^2+y^2-25.$$

Исследовать их устойчивость, определить типы особых точек и нарисовать фазовые кривые.

12. Найти все особые точки системы на торе $\{(x, y) \operatorname{mod} 2\pi\}$:

$$\dot{x}=-\sin y,\qquad \dot{y}=\sin x+\sin y.$$

*) Во всех числовых задачах допускается погрешность в 10—20 % ответа.

Исследовать их устойчивость, определить типы особых точек и нарисовать фазовые кривые.

13. Из эксперимента известно, что при преломлении света на границе раздела двух сред синусы углов, образованных падающим и преломленным лучами с нормалью к поверхности раздела, обратно пропорциональны показателям преломления сред: $n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2$.

Найти форму световых лучей на плоскости $(x, y)$ с показателем преломления $n(y)$. Рассмотреть случай $n(y) = 1/y$ (в полуплоскости $y > 0$ с таким показателем преломления реализуется геометрия Лобачевского).

14. Нарисовать лучи, выходящие по различным направлениям из начала координат на плоскости с показателем преломления $y^4 - y^2 + 1$.

Решение этой задачи объясняет явление миража. Показатель преломления воздуха над пустыней имеет максимум на некоторой высоте, так как в более высоких и в более низких горячих слоях воздух более разрежен, а показатель преломления обратно пропорционален скорости. Колебания луча вблизи слоя с максимальным значением показателя преломления и воспринимаются как мираж.

Другое явление, объясняемое теми же колебаниями луча,— звуковой канал в океане, по которому звук распространяется на сотни километров. Причина этого явления — игра температуры и давления, приводящая к образованию слоя с максимальным показателем преломления (т. е. минимальной скоростью звука) на глубине 500—1000 м. Звуковой канал можно использовать, например, для предупреждения о цунами.

15. Нарисовать геодезические на торе, пользуясь теоремой Клеро: произведение расстояния до оси вращения на синус угла геодезической с меридианом вдоль каждой геодезической на поверхности вращения постоянно.

16. Выпрямить фазовые кривые уравнения $\ddot{x} = x - x^2$ в окрестности точки $x = 0$, $\dot{x} = 1$.

17. Выпрямить интегральные кривые уравнения $\dot{x} = x + \cos t$.

18. Выпрямить поле направлений уравнения $\dot{x} = x + te^t$.

19. Выпрямить поле фазовой скорости уравнения $\dot{x} = x$ вблизи точки $x = 0$.

20. В каких координатах разделяются переменные в уравнении

$$dy/dx = x^2 + y^{2/3}?$$

21. Решить уравнение $\dot{x} = x + \delta(t - 2)$.

22. Найти производную решения уравнения $\ddot{x} = \dot{x}^2 + Ax^3$ с начальным условием $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) = 0$ по $A$ при $A = 0$.

23. Найти собственные числа и векторы оператора монодромии $2\pi$-периодического решения уравнения $\ddot{x} - x = \sin t$.

24. Решить уравнение $\dot{x} = Atx + x$, где $A\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ — линейный оператор.

25. Могут ли операторы $A$ и $B$ не коммутировать, если

$$e^A = e^B = e^{A+B} = E?$$

26. Найти все не зависящие от времени непрерывные на всей фазовой плоскости первые интегралы системы $\dot{x} = y$, $\dot{y} = x + y$.

27. Числа 1 и $i$ — собственные для $A\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Имеет ли уравнение $\dot{x} = Ax$ непрерывные в $\mathbf{R}^3$ непостоянные первые интегралы?

28. Числа 1 и $-1$ — собственные для $A\colon \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$. Имеет ли уравнение $\dot{x} = Ax$ непрерывные в $\mathbf{R}^3$ непостоянные первые интегралы?

29. Решить задачу Коши

$$xu_x + u_y = 0, \qquad u|_{y=0} = \sin x.$$

30. Уравнение $x^{(n)} = F(t, x, \ldots, x^{(n-1)})$ имеет решения $t$ и $\sin t$. Определить $n$.

31 Продолжаются ли решения уравнения $\dot{x} = x^3 \sin x$ на всю ось времени?

32. Продолжаются ли все решения уравнения Ньютона $\ddot{x} = -\operatorname{grad} U$, $U = x_1^4 + x_1 x_2 + x_2^6$, неограниченно?

33. Продолжаются ли неограниченно все решения уравнения

$$\ddot{x} = 1 + 2\sin x?$$

34. Может ли положение равновесия уравнения Ньютона быть устойчивым по Ляпунову, не будучи точкой локального минимума потенциальной энергии?

35. Может ли периодическое решение автономной системы, изображаемое на фазовой плоскости предельным циклом, быть асимптотически устойчивым?

36. Может ли периодическое решение автономной системы быть неустойчивым по Ляпунову, если на фазовой плоскости оно изображается предельным циклом, на который снаружи и изнутри наматываются спирально приближающиеся к циклу при движении в направлении возрастания времени фазовые кривые?

37. Может ли неустойчивое по Ляпунову положение равновесия сделаться после линеаризации устойчивым? асимптотически устойчивым?

38. Может ли асимптотически устойчивое положение равновесия стать неустойчивым по Ляпунову после линеаризации?

**Дополнительные задачи**

1. Имеет ли ограниченные на всей оси времени ненулевые решения уравнение в вариациях для уравнения $\ddot{x} = -\sin x$ вдоль решения с начальным условием $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 2$?

2. Имеет ли неограниченные решения уравнение в вариациях вдоль решения с начальным условием $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$ того же уравнения?

3. Решить уравнение в вариациях задачи 1.

4. Найти собственные числа и векторы оператора монодромии для уравнения в вариациях задачи 2.

5. Найти производную $2\pi$-периодического решения уравнения $\ddot{x} + \sin x = \varepsilon \cos t$, обращающегося при $\varepsilon = 0$ в $x \equiv \pi$, по $\varepsilon$ при $\varepsilon = 0$.

6. Найти наибольшее значение $t$, при котором решение задачи Коши

$$u_t + u u_x = -\sin x, \qquad u|_{t=0} = 0$$

продолжается на $[0, t)$.

7. Найти все конечномерные подпространства пространства бесконечно-дифференцируемых функций на прямой, инвариантные относительно всех сдвигов прямой.

8. Пусть функция $v$ имеет в нуле 2-кратный корень. Докажите, что уравнение $\dot{x} = v(x)$ диффеоморфизмом окрестности нуля приводится к виду $\dot{y} = y^2 + Cy^3$ (постоянная $C$ определяется полем).

9. Докажите, что нули линейной комбинации первых $n$ собственных функций задачи Штурма — Лиувилля

$$u_{xx} + q(x) u = \lambda u, \qquad u(0) = u(l) = 0, \qquad q > 0$$

делят отрезок $[0, l]$ не более чем на $n$ частей.

Указание (И. М. Гельфанд). Перейти к Ферми-частицам, т. е. к кососимметрическим решениям уравнения $\sum u_{x_i x_i} + \sum q(x_i) u = \lambda u$, и воспользоваться тем, что его первая собственная функция не имеет нулей внутри фундаментального симплекса $0 < x_1 < \ldots < x_n < l$.

10. (Н. Н. Баутин). Докажите, что обобщенная система Лотка — Вольтерра

$$\dot{x} = x(a + kx + ly), \qquad \dot{y} = y(b + mx + ny)$$

не имеет предельных циклов: ее замкнутые неточечные фазовые кривые, когда они есть, заполняют целиком кольцеобразные области.

11. Рассмотрим движение материи по окружности под действием переноса полем скоростей и малой диффузии. Докажите, что если поле скоростей имеет стационарные точки и общего положения, то почти вся масса соберется в конце концов в окрестности одной из притягивающих точек.

[Уравнение эволюции плотности: $\dot{u} = \varepsilon u_{xx} - (uv)_x$, где $v\,\partial/\partial x$ — поле скоростей. На накрывающей окружность прямой поле потенциально: $v = -U_x$. Если поле скоростей потенциально, т. е. функция $U$ периодична, то стационарное решение дается распределением Гиббса

$$u(x) = Ce^{-U(x)/\varepsilon}$$

При малых $\varepsilon$ это распределение сосредоточено вблизи минимума потенциала.

Если функция $U$ стремится к $-\infty$ на $-\infty$, то стационарное решение имеет вид

$$u(x) = C \int_{-\infty}^{x} e^{[U(\xi) - U(x)]/\varepsilon}\, d\xi.$$

Оно сосредоточено вблизи такого локального минимума потенциала, для которого превышение максимального значения потенциала на полуоси левее этого минимума над этим минимальным значением максимально.]

12 (А. А. Давыдов). *Инволюцией* называется диффеоморфизм, квадрат которого — тождественное преобразование. Инволюция плоскости называется *допустимой* относительно векторного поля, если неподвижные точки инволюции образуют кривую и под действием инволюции векторы поля в точках этой кривой меняют знак.

Докажите, что в окрестности неособой точки поля все допустимые инволюции общего положения эквивалентны (переводятся друг в друга сохраняющими каждую фазовую кривую поля диффеоморфизмами).

[Решение этой задачи доставляет нормальную форму $p^2 = x$ уравнения, не разрешенного относительно производной, в окрестности нерегулярной точки общего положения (она найдена Л. Дара и Ю. Бродским). Уравнение $F(x, y, p) = 0$ определяет поверхность в трехмерном пространстве. В нерегулярной точке ее касательная плоскость вертикальна (касается оси $p$). В окрестности нерегулярной точки общего положения возникает инволюция (она переставляет близкие точки пересечения поверхности с вертикальной прямой). Эта инволюция допустима относительно векторного поля, касательного к интегральным кривым уравнения на поверхности. Приведение инволюции к нормальной форме эквивалентно нормализации уравнения локальным диффеоморфизмом плоскости $(x, y)$].

13 (продолжение). Пусть неподвижная кривая инволюции, допустимой относительно векторного поля с особой точкой типа фокус, седло или узел, проходит через особую точку, причем модули собственных чисел седла или узла различны.

Докажите, что любые две такие инволюции эквивалентны в окрестности особой точки, если касательные к их неподвижным кривым в особой точке не разделены собственными направлениями.

[Эта теорема Давыдова доставляет нормальную форму $(p - kx)^2 = y$ уравнения общего положения, не разрешенного относительно производной, в окрестности нерегулярной точки, в которой плоскость $dy = p\,dx$ касается поверхности $F = 0$; $k$ — единственный модуль (инвариант относительно деффеоморфизмов) возникающего «сложенного фокуса, седла или узла», образованного проекциями интегральных кривых на плоскость $(x, y)$].

Решения задач 12—13 доставляют также нормальные формы семейств траекторий медленного движения в теории релаксационных колебаний общего положения при двух медленных переменных. В этой теории в трехмерном пространстве, расслоенном на вертикальные прямые над «плоскостью медленных переменных» задано два векторных поля: одно («быстрое») вертикально, а другое («возмущающее») произвольно. Нули быстрого поля образуют «медленную поверхность». Плоскости, натянутые на векторы обоих полей, высекают на медленной поверхности поле направлений «медленного движения». Речь идет о семействе проекций интегральных кривых этого поля с медленной поверхности на плоскость медленных переменных.

Критические значения проектирования медленной поверхности на плоскость медленных переменных образуют (в системе общего положения) дискриминантную кривую с отдельными точками возврата. В окрестности общей точки этой кривой семейство проекций диффеоморфно семейству полукубических парабол $(y - c)^2 = x^3$ (это следует из нормальной формы задачи 12). В отдельных точках гладкости дискриминантной кривой семейство проекций диффеоморфно сложенному фокусу, седлу или узлу (задача 13). Кроме того, в системе общего положения встречаются отдельные точки гладкости дискриминантной кривой, в окрестности которых семейство можно описать следующим образом. Занумеруем интегральные кривые параметром $c$ и рассмотрим семейство их проекций на плоскость $(x, y)$ как поверхность в трехмерном пространстве с координатами $(x, y, c)$, разбитую на линии $c=\text{const}$. Эта поверхность диффеоморфна (локально) поверхности «сложенного зонтика» $u^2=v^3w^2$, разбитой на линии $u+v+w=\text{const}$. Наконец, в окрестности точки возврата дискриминантной кривой семейство проекций описывается аналогичным образом при помощи разбиения поверхности «ласточкиного хвоста» $\{u, v, w\colon \lambda^4+u\lambda^2+v\lambda+w$ имеет кратный корень$\}$ на кривые $u=\text{const}$. Последнее семейство проекций, в отличие от описанных раньше, имеет бесконечное число модулей даже относительно гомеоморфизмов плоскости $(x, y)$ (в случае сложенного зонтика модулей нет с точностью до бесконечно-дифференцируемых диффеоморфизмов, но в аналитическом случае появляется бесконечное число независимых модулей).

Решения задач 12 и 13 описывают также особенности семейств асимптотических линий на поверхности трехмерного пространства (семейство полукубических парабол в общей точке параболической линии и сложенный фокус, узел или седло в отдельных точках касания асимптотического направления параболической линии).

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

# Оглавление