МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

А.Н. Балашов, М.А. Шестакова

ПРАКТИКУМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Издание второе, переработанное и дополненное

Тверь 2023

УДК 51(075.8)
ББК 22.1.я7

Рецензенты: кандидат физико-математических наук доцент кафедры компьютерной безопасности и математических методов управления ТвГУ Шаповалова И.А.; кандидат физико-математических наук, декан математического факультета, доцент кафедры математических методов современного естествознания ТвГУ Чемарина Ю.В.

Балашов А.Н., Шестакова М.А. Практикум по математике: учебное пособие. Издание второе, перераб. и доп. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2023. 148 с.

Для каждого из разделов линейной алгебры, векторной алгебры, аналитической геометрии, математического анализа приведены краткие сведения по теории и методические указания, необходимые для решения задач. Разобраны примеры типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений.

Предназначено для студентов очной и заочной формы обучения, а также адресовано тем, кто самостоятельно изучает высшую математику и желает приобрести необходимые навыки в решении задач.

ISBN 978-5-7995-1284-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 1

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Вычисление определителей

Хорошее начало – половина дела.
Платон

Определителем (детерминантом) второго порядка называется число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, вычисляемое по формуле

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Числа a_{ij} (i, j = 1, 2) называются *элементами* определителя. Первый индекс (i) указывает номер строки, второй (j) – номер столбца. Строки и столбцы называют рядами определителя. Порядок определителя равен количеству его строк или столбцов.

Определителем (детерминантом) третьего порядка называется число $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, которое, в частности, может быть вычислено разложением определителя по элементам первой строки:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1j}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{21}\ldots a_{2j}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots a_{in} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nj}\ldots\ldots a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \ldots + a_{ij}A_{ij} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij}, взятый со знаком «+», если сумма индексов – четное число, и со знаком «–», если сумма индексов i и j – нечетное число, т. е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, получающийся из данного определителя в результате вычеркивания i-й строки и j-го столбца.

Если определитель третьего порядка разложить по первой строке, то получим формулу

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+ a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Элементы $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}$ образуют главную диагональ определителя, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – его побочную диагональ. Для того чтобы запомнить эту формулу, прибегают к графическому ее изображению (рис. 1).

Такой метод вычисления определителя третьего порядка получил название правило «*треугольников*». При вычислении определителя со знаком «+» берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали (рис. 1*а*); при вычислении определителя со знаком «–» берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали (рис. 1*б*).

а *б*

Рис. 1

Задание 1. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Определитель второго порядка

$$det\,A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 + 15 = 27.$$

Ответ: 27.

Задание 2. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. При вычислении определителя воспользуемся формулой его разложения по элементам первой строки:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$
$$=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}.$$

С учетом этого имеем

$$\begin{vmatrix}3&5&1\\1&3&2\\1&4&3\end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix}3&2\\4&3\end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}1&3\\1&4\end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot(9-8)-5\cdot(3-2)+1\cdot(4-3)=-1.$$

Вычислить определитель можно, раскладывая его по элементам любой строки или столбца, в частности по элементам второго столбца:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}=$$
$$=-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}+a_{22}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}-a_{32}\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}.$$

Правильность вычисления определителя можно проверить самостоятельно с помощью встроенной функции *«МОПРЕД(A1:C3)»* программы *Microsoft Excel*.

Ответ: –1.

Задание 3. Вычислите определитель $\begin{vmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&4\end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу «*треугольников*»:

$$\begin{vmatrix}3&2&1\\1&3&2\\2&1&4\end{vmatrix}=3\cdot3\cdot4+2\cdot2\cdot2+1\cdot1\cdot1-1\cdot3\cdot2-2\cdot1\cdot4-3\cdot2\cdot1=$$
$$=36+8+1-6-8-6=25.$$

Ответ: 25.

Другой способ вычисления определителя третьего порядка – по правилу **Саррюса**. Для этого к определителю третьего порядка приписываются справа два первых столбца. Складывают произведения элементов со знаком «+» на диагоналях, параллельных главной, и со знаком «–» на диагоналях, параллельных побочной, т. е.

$$\left|\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}\right|\begin{matrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{matrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+$$
$$+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33}).$$

Задание 4. Вычислите определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. Вычислим определитель по правилу Саррюса:

$$\left|\begin{matrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 27 + 8 + 4 - 24 - 6 - 6 = 3.$$

Ответ: 3.

Основные свойства определителей

1. Величина определителя не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.

2. Величина определителя меняет знак на противоположный при перестановке двух параллельных рядов.

3. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя.

4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

5. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответственно элементы другого параллельного ряда, умноженные на произвольное число.

6. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на их алгебраические дополнения равна величине определителя.

Задание 5. Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Определитель четвертого порядка вычисляется разложением по элементам какого-либо ряда. Обычно выбирается ряд, у которого часть элементов равна нулю. Если нулевых элементов нет, то, используя пятое свойство определителя, получаем три нуля в каком-либо ряде:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} + a_{41}A_{41} =$$

$$= 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 + 8 + 12 = -4.$$

Ко второй строке прибавили первую, предварительно умноженную на (–2).

К четвертой строке прибавили первую, предварительно умноженную на (–1).

Разложили определитель по элементам первого столбца.

Ответ: –4.

Задание 6. Определите, при каком α алгебраическое дополнение элемента a_{31} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 5 & \alpha \\ -1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$ равно 4.

Решение. Алгебраическое дополнение A_{31} элемента a_{31} определителя $A_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = \begin{vmatrix} 5 & \alpha \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 - \alpha \cdot 2 = 15 - 2\alpha.$

По условию $A_{31} = 4$. Следовательно, $15 - 2\alpha = 4$, $\alpha = 5{,}5$.

Ответ: 5,5.

§ 2. Матрицы: основные понятия

Математика – это язык, на котором
говорят все точные науки.

Н.И. Лобачевский

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$), состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = (a_{ij}) = [a_{ij}] = \|a_{ij}\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{ij} называются элементами матрицы; элемент a_{ij} расположен в i-й строке и j-м столбце матрицы.

Матрица размера $n \times n$ называется *квадратной матрицей* порядка n.

Квадратная матрица называется:

а) *треугольной*, если все элементы по одну сторону от главной или побочной диагонали равны нулю, например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$;

б) *диагональной*, если для $i \neq j$ все $a_{ij} = 0$, т. е. $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$;

в) *единичной* матрицей E, если на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

Матрица размера $m \times n$ называется *ступенчатой*, если она не содержит нулевых строк или столбцов и все элементы, находящиеся ниже элементов a_{ii}, равны нулю. Частным случаем ступенчатой матрицы является треугольная матрица.

Если в матрице A заменить строки соответствующими столбцами, то получится *транспонированная* матрица A^T.

Квадратная матрица A называется *симметрической*, если $A^T = A$.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размера $m \times n$ равны тогда и только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

Суммой $A + B$ двух матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размера $m \times n$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Произведением αA матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$ на число α называется матрица $B = [b_{ij}]$ того же размера, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на число α.

Максимальный порядок r отличного от нуля миноров матрицы A называется ее *рангом* ($rang\ A$).

Приведем два способа вычисления ранга матрицы:

1-й используется для матрицы малых размеров. Выбирается произвольно какой-либо минор второго порядка матрицы. Если он отличен от нуля, то выбирается минор третьего порядка, в который входит выбранный ранее минор второго порядка, и т. д. Этот метод называется методом окаймляющих миноров;

2-й – с помощью элементарных преобразований приводят матрицу к ступенчатому виду. Получившееся количество ненулевых строк ступенчатой матрицы будет равно рангу матрицы.

Не меняют ранг матрицы элементарные операции над ее строками (столбцами):

1) перестановка строк (столбцов) местами;

2) умножение любой строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к одной строке (столбца) другой, умноженной на произвольное число;

4) вычеркивание нулевой строки (столбца).

Задание 7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите $C = A + 3B$.

Решение. При сложении матриц одинакового порядка складываются соответствующие элементы этих матриц. При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число. Поэтому

$$C = A + 3B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} 10 & -1 \\ 10 & 18 \end{pmatrix}$.

Задание 8. Найдите ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение

1-й способ

Найдем ранг матрицы ($rang\ A$) методом окаймляющих миноров.

1-й шаг. Среди элементов матрицы есть ненулевые элементы. Следовательно, $rang\ A \geq 1$.

2-й шаг. Если мы найдем хотя бы один ненулевой определитель второго порядка, составленный из сочетания элементов строк и столбцов матрицы A, то $rang\ A \geq 2$. В частности, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 \neq 0$. Следовательно, $rang\ A \geq 2$.

3-й шаг. Найдем определитель (детерминант) матрицы A методом треугольника:

$$det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot 8 - (3 \cdot 6 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 +$$

$$+ 1 \cdot 1 \cdot 8) = 24 + 6 + 48 - (54 + 16 + 8) = 78 - 78 = 0.$$

Так как $det\, A = 0$, то $rang\ A = 2$.

Напомним, что рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора.

2-й способ

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к ступенчатому виду. Для этого прибавим ко второй строке первую, умноженную на (–2); прибавим к третьей строке первую, умноженную на (–3). В итоге получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \\ 3 & 8 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Далее вычтем из третьей строки вторую и вычеркнем полученную нулевую строку. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две строки. Следовательно, $rang\ A = 2$.

Напомним, что ранг матрицы равен количеству ненулевых строк матрицы, приведенной к ступенчатому виду.

Ответ: $rang\ A = 2$.

Задание 9. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ найдите транспонированную матрицу.

Решение. При нахождении транспонированной матрицы необходимо заменить строки исходной матрицы соответствующими столбцами, т. е. первая строка станет первым столбцом, вторая строка – вторым столбцом:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^T = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Задание 10. Ранг матрицы A равен 3. Найдите ранг матрицы $5A$.

Решение. Умножение матрицы на число, отличное от нуля, не меняет ранг матрицы. Следовательно, ранг матрицы $5A$ равен 3.

Ответ: 3.

§ 3. Умножение матриц

Пессимист видит трудности при каждой возможности;
оптимист в каждой трудности видит возможности.

У. Черчилль

Произведением AB матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m \times n$ на матрицу $B = [b_{ij}]$ размера $n \times k$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ размера $m \times k$, элементы c_{ij} которой равны сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \ldots + a_{in}b_{nj}.$$

В каждом произведении матриц AB количество n столбцов матрицы A должно равняться количеству строк матрицы B.

Если $AB = BA$, то матрицы называют *перестановочными*.

Задание 11. Операция произведения матриц правильно определена для матричного умножения вида…

1) $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрицу A размера $m \times n$ можно умножить на матрицу B размера $k \times l$, если $n = k$.

Для первого произведения $n = 2$, $k = 1$, $n \neq k$, матрицы нельзя перемножать.

Для второго произведения $n = 2$, $k = 2$, $n = k$, матрицы можно перемножать.

Для третьего произведения $n = 2$, $k = 2$, $n = k$, матрицы можно перемножать.

Ответ: 2) и 3).

Задание 12. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C = A \cdot B$.

Решение. Матрицы можно перемножать, так как число столбцов первой матрицы A равно числу строк второй матрицы B.

Элементы матрицы C находим по формуле

$$c_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}.$$

При вычислении элемента c_{ij} находим сумму произведений элементов i-й строки первой матрицы на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы:

$$c_{11} = \sum a_{1k} \cdot b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0;$$

$$c_{12} = \sum a_{1k} \cdot b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 5 = 13;$$

$$c_{21} = \sum a_{2k} \cdot b_{k1} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) = 2;$$

$$c_{22} = \sum a_{2k} \cdot b_{k2} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} = 3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 = 29.$$

В итоге

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 2 & 29 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 0 & 13 \\ 2 & 29 \end{pmatrix}$.

Задание 13. Найдите матрицу $C = AB^T$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Для матрицы B найдем транспонированную матрицу B^T:

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдем элементы матрицы C. Умножим первую строку $\begin{pmatrix} 2 & 5 \end{pmatrix}$ матрицы A на первый столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ матрицы B^T: $c_{11} = 2 \cdot 1 + 5 \cdot 3 = 17$.

Умножим первую строку $\begin{pmatrix}2 & 5\end{pmatrix}$ матрицы A на второй столбец $\begin{pmatrix}-2\\4\end{pmatrix}$ матрицы B^T: $c_{12} = 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 = 16$.

В итоге имеем:

$$C = \begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}17 & 16\end{pmatrix}.$$

Ответ: $C = \begin{pmatrix}17 & 16\end{pmatrix}$.

§ 4. Обратная матрица. Собственные значения матриц

Хитрость – образ мыслей очень ограниченных людей и очень отличается от ума, на который по внешности походит.

И. Кант

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю ($\det A \neq 0$).

Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю ($\det A = 0$).

Матрица A^{-1} называется *обратной* к невырожденной матрице A, если

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Матрица A^V, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A, называется *присоединенной* к матрице A.

Обратную матрицу можно найти с помощью присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{(A^V)^T}{det\, A}.$$

Число λ называется собственным значением (собственным числом), а ненулевой вектор $\vec{x}$ – соответствующим собственным вектором матрицы A порядка n, если выполняется равенство

$$A \cdot \vec{x} = \lambda\vec{x}.$$

Это равенство можно записать в виде $(A - \lambda E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, где E – единичная матрица порядка n.

Собственные значения матрицы A являются решениями уравнения

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Данное уравнение называют характеристическим уравнением матрицы A.

Для матрицы второго порядка характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Если из характеристического уравнения найдено собственное значение λ_1, то поиск соответствующих числу λ_1 собственных векторов $\vec{x} \neq \vec{0}$ матрицы A сводится к решению линейной системы:

$$(A-\lambda_1 E)\cdot\vec{x} = \vec{0}.$$

Задание 14. Найдите матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Квадратная матрица имеет обратную, если ее определитель отличен от нуля.

$$det\,A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 1\cdot 4 = 2.$$

Следовательно, матрица A имеет обратную. Найдем обратную матрицу A^{-1} для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Приведенная формула применима только для матриц второго порядка.

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & -0{,}5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 15. Определите, при каком значении k матрица $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ k & 5 \end{pmatrix}$ является вырожденной.

Решение. Квадратная матрица называется вырожденной (не имеет обратной), если ее определитель равен нулю.

Найдем определитель матрицы, приравняем его к нулю и из полученного уравнения вычислим k:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ k & 5 \end{vmatrix} = 10 - k,\ \ 10 - k = 0,\ \ k = 10.$$

Ответ: $k = 10$.

Задание 16. Найдите собственные числа и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем корни характеристического уравнения из уравнения $\det|A - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda) - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2,\ \ \lambda_2 = 5.$$

При решении квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ воспользовались формулой $x_{1,\,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Для собственного числа λ_1 найдем соответствующий собственный вектор, решив систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2-(-2) & 3 \\ 4 & 1-(-2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; 4x_1 + 3x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -\frac{3x_2}{4}.$$

Пусть $x_2 = 4\alpha_1$, тогда $x_1 = -3\alpha_1$, $\overrightarrow{e_1} = \alpha_1(-3;4)^T$.

Для собственного числа λ_2 найдем соответствующий собственный вектор, решив систему уравнений

$$\begin{pmatrix} 2-5 & 3 \\ 4 & 1-5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; -3x_1 + 3x_2 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = x_2.$$

Пусть $x_2 = \alpha_2$, тогда $x_2 = \alpha_2$, $\overrightarrow{e_2} = \alpha_2(1;1)^T$.

***Ответ*:** $\lambda_1 = -2, \overrightarrow{e_1} = \alpha_1(-3;4)^T$; $\lambda_2 = 5, \overrightarrow{e_2} = \alpha_2(1;1)^T$, $\alpha_1, \alpha_2 \in R$.

§ 5. Система линейных уравнений

Истинный ученый – это мечтатель, а кто им не является, тот называет себя практиком.

О. Бальзак

Систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

называют системой m линейных уравнений с n неизвестными. Коэффициенты a_{ij} этих уравнений записываются в виде матрицы (*матрица системы*):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, стоящие в правой части уравнений, обозначают столбцом B, который называют столбцом свободных членов.

Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется *расширенной матрицей системы*:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Систему уравнений можно записать в матричной форме $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется *совместной*, а не имеющая решений – *несовместной.*

Различают два типа переменных системы уравнений: базисные и свободные. Количество *базисных переменных* соответствует рангу матрицы системы, количество свободных переменных равно разности общего числа переменных и базисных.

Если все свободные члены равны нулю, то систему называют *однородной.*

Если определитель Δ однородной системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то эта система имеет только *тривиальное* (нулевое) решение.

Если однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, то ее определитель Δ равен нулю.

Решение двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

когда хотя бы один из миноров второго порядка отличен от нуля, удобно искать по формулам:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} k;$$

$$y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} k;$$

$$z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} k,$$

где k – произвольное число.

Теорема Крамера. Система из n уравнений с n неизвестными в случае, когда детерминант матрицы системы отличен от нуля, имеет единственное решение, которое находится по формуле $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – детерминант матрицы системы; Δ_i – детерминант матрицы (вспомогательный определитель), получаемой из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов. Например:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если детерминант матрицы системы равен нулю, а хотя бы один из вспомогательных определителей не равен нулю, то такая система не имеет решения (несовместна).

Если детерминант матрицы системы равен нулю и все вспомогательные определители равны нулю, т. е. $\Delta = \Delta_i = 0$, то такая система имеет бесчисленное множество решений.

Задание 17. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5, \\ 2x - y + z = 6, \\ x + 5y = -3. \end{cases}$$

Решение. Согласно теореме Крамера $x = \frac{\Delta_x}{\Delta},\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta},\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 10 - (-1 + 15 + 0) = -2 \neq 0.$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля. Следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители системы:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 30 - (3 + 25 + 0) = 24 - 28 = -4;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 - 6 - (6 - 9 + 0) = -1 + 3 = 2;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 12 + 50 - (-5 + 90 - 12) = 71 - 73 = -2,$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

***Ответ*:** $x = 2$, $y = -1$, $z = 1$.

Теорема Кронекера – Капелли. Неоднородная система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы системы A^*.

Следствие. Если ранг матрицы A^* не равен рангу матрицы A, то система не имеет решений (несовместна).

Задание 18. Определите, совместны ли системы:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$

Решение:

1) $det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ система совместна, так как $rang\, A$ = = $rang\, A*$;

2) $det\, A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow rang\, A$ = 1.

Найдем ранг расширенной матрицы. Вычтем из второй строки первую:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\, A* = 2.$$

Так как $rang\, A \neq rang\, A*$, то система несовместна.

Ответ: 1) система совместна; 2) система несовместна.

Система m линейных уравнений с n неизвестными решается **методом Жордана – Гаусса**. Метод основан на том, что с помощью элементарных преобразований строк расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду.

При решении данным методом системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными после приведения расширенной матрицы системы к треугольному виду получим:

1) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$, где $a_{33} \neq 0$ (система будет иметь единственное решение);

2) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$, где $b_3 \neq 0$ (система будет несовместной);

3) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (система будет иметь множество решений).

Задание 19. Решите систему уравнений методом Жордана – Гаусса:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 7, \\ 2x + y - z = 4, \\ 3x + 3y - 2z = 10. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы уравнений. Прибавим ко второй строке первую, умноженную на (–2). К третьей строке прибавим первую, умноженную на (–3):

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & -8 & -11 \end{array}\right).$$

Разделим вторую строку на 5, потом прибавим к третьей строке вторую, умноженную на (–9):

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 9 & -8 & -11\end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 2 & 7\\ 0 & 1 & -1 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 7\end{array}\right).$$

Из последней матрицы имеем $z = 7$; $y - z = -2$, $y = 5$; $x - 2y + 2z = 7$, $x = 3$.

Ответ: $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$.

Задание 20. Найдите $x_0 + y_0$, если (x_0, y_0) являются решением системы линейных уравнений $\begin{cases}x + 2y = -3,\\ 3x + 2y = 5.\end{cases}$

Решение

1-й способ

Сложим оба уравнения и разделим обе части полученного уравнения на четыре: $4x + 4y = 2$, $x + y = 0{,}5$ – это и есть искомое решение.

2-й способ (общий подход)

Найдем решение системы по формулам Крамера: $x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, где Δ – определитель матрицы системы; Δ_i – определитель матрицы системы, у которого i-й столбец заменен столбцом свободных членов расширенной матрицы системы.

В нашем случае

$$\Delta = \begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 2\end{vmatrix} = 2 - 6 = -4,\ -4 \neq 0;\ \ \Delta_1 = \begin{vmatrix}-3 & 2\\ 5 & 2\end{vmatrix} = -6 - 10 = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix}1 & -3\\ 3 & 5\end{vmatrix} = 5 + 9 = 14;\ \ x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{-4} = 4;\ \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{14}{-4} = -3{,}5;$$

$$x_0 + y_0 = x_1 + x_2 = 4 - 3{,}5 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Задание 21. Найдите количество свободных m и базисных r переменных системы уравнений $\begin{cases}x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0,\\ x_1 + 4x_2 - x_3 + 5x_4 = 0,\\ \quad 4x_2 + x_3 - 6x_4 = 0.\end{cases}$

Решение. Приведем матрицу системы однородных уравнений $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & -1 & 5\\ 0 & 4 & 1 & -6\end{pmatrix}$ к ступенчатому виду.

Умножим первую строку на (–1) и прибавим результат ко второй строке. Затем умножим вторую строку на (–2) и прибавим результат к третьей строке:

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 4 & -1 & 5\\ 0 & 4 & 1 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 4 & 1 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & -2 & 2\\ 0 & 0 & 5 & -10\end{pmatrix}.$$

Количество базисных переменных r равно рангу матрицы системы или количеству ненулевых строк матрицы, приведенных к ступенчатому виду, т. е. количество базисных переменных равно 3.

Система содержит 4 переменных (n = 4). Количество свободных переменных m равно разности общего числа переменных и базисных: $m = n - r = 4 - 3 = 1$.

Ответ: $m = 1$, $r = 3$.

Задание 22. Найдите значение α, при котором система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ \alpha x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$ будет иметь бесконечное число решений.

Решение. Однородная система из n уравнений с n неизвестными будет иметь бесконечное число решений, если ее определитель равен нулю.

Найдем определитель матрицы системы, приравняем его к нулю и из полученного уравнения определим α:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \alpha & 6 \end{vmatrix} = 6 - 2\alpha; \quad 6 - 2\alpha = 0; \quad \alpha = 3.$$

Ответ: $\alpha = 3$.

§ 6. Задания для самостоятельного решения

6.1. Базовые задания

1. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} x+1 & x \\ x & x-1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 2 & 7 & -9 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} x & 1 & x \\ -1 & x & 1 \\ x & -1 & x \end{vmatrix}$; 8) $\begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 & 30 \\ 0 & 2 & 7 & -8 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

2. Используя свойства определителя, покажите, что следующие определители равны нулю:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 6 & 3 & 12 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} sin^2\alpha & cos^2\alpha & cos\,2\alpha \\ sin^2\beta & cos^2\beta & cos\,2\beta \\ sin^2\gamma & cos^2\gamma & cos\,2\gamma \end{vmatrix}$.

3. Найдите определитель $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ после приведения к треугольному.

4. Решите уравнения:

1) $\begin{vmatrix} 3-x & x+2 \\ x+1 & x-1 \end{vmatrix} = -6$; 2) $\begin{vmatrix} 3 & x & -4 \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & x & -1 \\ x & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$.

5. Решите неравенства:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$; 2) $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ -x & 0 & 2 \\ 0 & x & 6 \end{vmatrix} < 0$.

6. Найдите линейные комбинации заданных матриц:

1) $-5A + 2B$, где $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ -6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ -15 & 10 & 0 \end{pmatrix}$;

2) $A - \lambda E$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

3) $4A - 5B$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$. Решите уравнение $5A + 2X = B$.

8. Пусть квадратная матрица A такая, что $A + A^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Найдите сумму всех элементов матрицы A.

9. Для матриц $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 7 \\ -1 & -2 & -6 \\ 5 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ найдите матрицу $C = A^T - B$.

10. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 10 & -x^2 \end{pmatrix}$. Найдите x из матричного уравнения $5A + 4E = B$.

11. Какие операции с матрицами $A_{3\times3}$ и $B_{3\times4}$ определены?
1) $A+B$; 2) A^T+B; 3) $A+B^T$; 4) $A\cdot B$; 5) $B\cdot A$; 6) $A^T\cdot B$; 7) $A\cdot B^T$; 8) $A^T\cdot B^T$; 9) $B^T\cdot A^T$.

12. Найдите произведение матриц $A\cdot B$, где

1) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}, B=(4 \quad 5 \quad 6)$.

13. Приведите к ступенчатому виду матрицу B с помощью элементарных преобразований над строками:

1) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; 2) $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 3 & -2 & -1 & 0\\ -5 & 3 & 2 & -1\end{pmatrix}$.

14. С помощью элементарных преобразований вычислите ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 5 & 6\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 1 & -5 & 1 & -3\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix}$.

15. Найдите ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

1) $\begin{pmatrix}3 & -1 & 2\\ 4 & -3 & 3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 5\\ 4 & 8 & 11\end{pmatrix}$.

16. При каком значении λ система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x+2y=0\\ 2y-3z=0\\ x+\lambda y-6z=0\end{cases}$$

имеет бесконечное число решений?

17. При каком значении λ система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x+2y=0\\ 3x+\lambda y=0\end{cases}$$

имеет единственное решение?

18. Решите системы двумя способами: методом Жордана – Гаусса и по формулам Крамера:

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=6,\\ 2x_1-x_2+x_3=5,\\ -x_1+3x_2+2x_3=5;\end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x_1-4x_2+x_3=9,\\ 3x_1+x_2-x_3=8,\\ -2x_1-2x_2+3x_3=-9.\end{cases}$

6.2. Профильные задания

1. Вычислите определитель:

1) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 9 \\ 2 & 3 & 17 & 1 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

2. Используя свойства определителей, покажите, что следующие определители равны нулю:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 2x+3y+4 \\ 5 & 6 & 7 & 5x+6y+7 \\ 8 & 9 & 10 & 8x+9y+10 \\ 11 & 12 & 13 & 11x+12y+13 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x & 2 & 4 \\ 1+x & 1-x & 3 & 9 \\ 1+x & 1-x & 4 & 16 \\ 1+x & 1-x & 5 & 25 \end{vmatrix}$.

3. Найдите определитель $\begin{vmatrix} a^2 & b\sin\alpha & c\sin\alpha \\ b\sin\alpha & 1 & \cos\alpha \\ c\sin\alpha & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix}$, если a, b и c – стороны треугольника; α – величина угла, противолежащего стороне a.

4. Найдите $det(pA)$, если $p = \sqrt[4]{3}$, $det\, A_{4\times 4} = 5$.

5. Числа 182, 299 и 312 делятся на 13. Докажите, что определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & 9 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \end{vmatrix}$ делится на 13.

6. Числа 24026, 40262, 02624, 26240 и 62402 делятся на 41. Докажите, что определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 2 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 2 & 4 & 0 \\ 6 & 2 & 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ делится на 41.

7. Найдите произведение различных корней уравнения

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0.$$

8. Найдите сумму корней уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2013-x \end{vmatrix} = 0.$$

9. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 9 & x & x \end{vmatrix}$ и при этом $\Delta > 0$.
Найдите Δ.

10. Определитель третьего порядка составлен из чисел 1 и –1. Найдите все возможные значения таких определителей.

11. Пусть определитель сотого порядка, элементы которого определяются из соотношения $a_{ij} = |i-j|$, равен Δ. Найдите $\frac{\Delta}{2^{98}}$.

12. Найдите определитель -го порядка, элементы которого задаются соотношением $a_{ij} = min\{i,j\}$.

13. Найдите произведение матриц A и B:

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\\ -2 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

14. Найдите произведение матриц:

1) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -2\\ 3 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}3 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\\ 0 & 2\\ -3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\\ -1\end{pmatrix}$.

15. Найдите $\sqrt[5]{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 5\\ 6\end{pmatrix}}$.

16. Найдите A^n:

1) $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{pmatrix}$, $n=3$;

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$, $n=3$;

3) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$, $n=5$;

4) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $n=10$;

5) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^n$.

17. Найдите произведения AA^T и A^TA:

1) $A=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\\ 0\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -3 & 0\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

18. Вычислите:

1) $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}^2+\left(\begin{pmatrix}3 & 4 & 2\\ 1 & 1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\\ 0 & 5\end{pmatrix}\right)^T$;

2) $\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ 4 & 5 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\end{pmatrix}\right)^T + 2E.$

19. Докажите, что матрица Z удовлетворяет уравнению:

1) $Z^3 - 6Z^2 + 8Z - 9E = O,\ \ Z = \begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}$;

2) $Z^2 - (a+d)Z + (ad - bc)E = O,\ \ Z = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$;

3) $AZ^2 + BZ + C = O,$

где $Z = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 2\end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix}-2 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ O = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

20. Упростите выражение $(A - B)(A^2 + AB + B^2) - A(A + B)B + {}$ $+ BA(A + B)$, где A и B – квадратные матрицы одинаковой размерности.

21. Для матрицы B найдите такую матрицу C, что $BC = CB$:

1) $B = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

22. Завод производит три вида продукции, используя четыре вида ресурсов. Нормы затрат i-го ресурса на производство j-го вида продукции заданы матрицей затрат $\begin{pmatrix}2 & 5 & 3\\ 0 & 1 & 8\\ 1 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Количество продукции каждого вида, выпущенной заводом за определенный промежуток времени, задано матрицей $\begin{pmatrix}100\\ 80\\ 100\end{pmatrix}$. Определите, сколько единиц ресурса каждого вида было израсходовано за данный промежуток времени.

23. Затраты четырех видов сырья на выпуск четырех видов продукции характеризуются матрицей $\begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 6\\ 7 & 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 6 & 8\end{pmatrix}$. Найдите:

1) общие затраты на сырье для каждого вида продукции и его перевозку;

2) общие затраты на сырье и его транспортировку при условии заданного вектора-плана $(60, 50, 35, 40)$, если себестоимость каждого вида сырья и его доставка определяются соответственно векторами $(4, 6, 5, 8)$ и $(2, 1, 3, 2)$.

24. Приведите к ступенчатому виду матрицу B с помощью элементарных преобразований над строками:

1) $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$; 2) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; 4) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 8 \\ 2 & -1 & -4 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & -18 & 11 & -13 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 9 \end{pmatrix}$.

25. С помощью элементарных преобразований вычислите ранг матрицы:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 0 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -4 & -7 & 5 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

26. Найдите ранг матрицы методом окаймляющих миноров и укажите один из базисных миноров:

1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & -4 & 3 \\ 5 & -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

27. Найдите значение параметра α, при котором матрица имеет наименьший ранг:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha & 1 \\ 5 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

28. На предприятие с работниками четырех профессиональных категорий привезли заработную плату в купюрах следующего достоинства: по 100 руб. – 620 купюр, по 500 руб. – 470 купюр, по 1 000 руб. – 550 купюр, по 5 000 руб. – 2 690 купюр. Заработная плата работника первой категории составляет 42 700 руб., второй – 35 600 руб., третьей – 26 500 руб., четвертой – 17 800 руб. Определите, сколько сотрудников каждой профессиональной категории работает на предприятии, если каждому сотруднику выдали заработную плату минимальным числом купюр.

29. Имеются банки 1, 2 и 3, каждый из которых начисляет вкладчику определенный годовой процент (свой для каждого банка). В начале года 1/3 вклада размером 6 000 ден. ед. вложили в банк 1, 1/2 вклада – в банк 2 и оставшуюся часть – в банк 3, к концу года сумма этих вкладов возросла до 7 250 ден. ед. Если бы первоначально 1/6 вклада положили в банк 1, 2/3 – в банк 2 и 1/6 вклада – в банк 3, то к концу года сумма вкладов составила бы 7 200 ден. ед.; если бы 1/2 вклада положили в банк 1, 1/6 – в банк 2 и 1/3 вклада – в банк 3, то сумма вкладов к концу года составила бы те же 7 250 ден. ед. Какой процент выплачивает каждый банк?

30. Пусть параметр a такой, что система уравнений

$$\begin{cases} ax_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите значение выражения $6 - 4a$.

31. Известно, что система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 9 \\ -x_1 + 12x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ 8x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -6 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 12 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите значение x_5.

ГЛАВА 2

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Линейные операции над векторами

> Если теорему так и не смогли доказать,
> она становится аксиомой.
>
> *Евклид*

Вектором называется направленный отрезок. Вектор обозначается либо символом $\overrightarrow{AB}$ (A – точка начала, B – точка конца вектора), либо $\vec{a}$. *Длиной* (модулем или нормой) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Модуль вектора обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right| = |\vec{a}|$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарность векторов обозначается как $\vec{a}||\vec{b}$. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является существование такого числа λ, что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и направление.

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Для решения задач необходимо уметь выполнять линейные операции над вектором в геометрической форме (т. е. над вектором как над направленным отрезком): сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число.

Сложение двух векторов можно выполнить по правилу параллелограмма (рис. 2) или правилу треугольника (рис. 3).

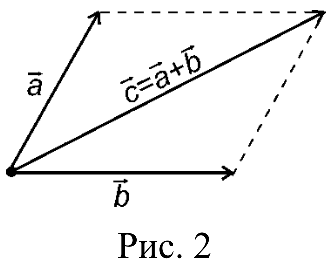


Рис. 2

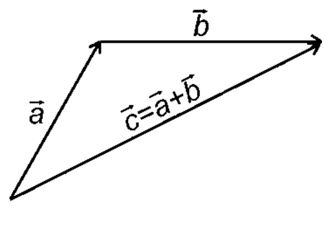


Рис. 3

Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, то $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, проведенный из конца вычитаемого в конец уменьшаемого. Заметим, что разностью является вектор, служащий второй диагональю параллелограмма (рис. 4).

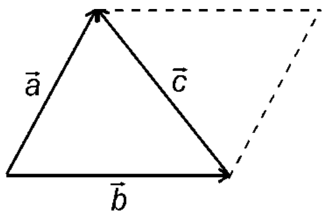


Рис. 4

Если $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, то $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, который имеет:

модуль, равный $|\vec{b}| = \lambda \cdot |\vec{a}|$;

направление, одинаковое с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ $\left(\lambda = 0;\ 0 \cdot \vec{a} = \vec{0}\right)$;

направление, противоположное $\vec{a}$, если $\lambda < 0$.

Векторной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (рис. 5). Проекция считается положительной, если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ направлен так же, как и ось l, и отрицательной, если направления оси и $\overrightarrow{A'B'}$ противоположны.

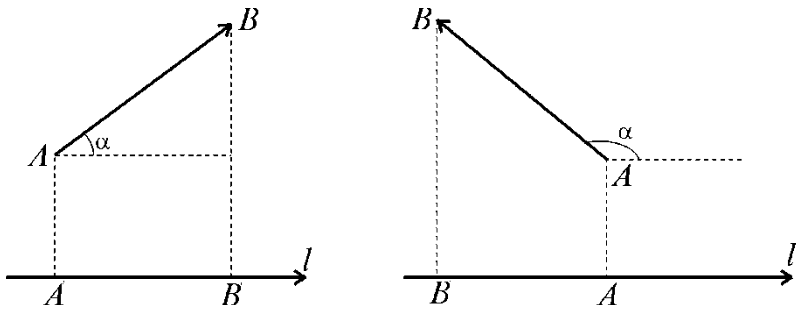


Рис. 5

$Пр_l\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| cos\,\alpha$, где α – угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l.

Если ось l заменить некоторым вектором $\vec{b}$, то можно говорить о проекции вектора на вектор $\vec{b}$: $Пр_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\,cos\,\alpha$, где α – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка называется началом координат или полюсом. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, называются осями координат: первая прямая – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, носят название координатных плоскостей.

Базисом на прямой называется любой ненулевой вектор прямой, базисом на плоскости – два неколлинеарных вектора на этой плоскости, базисом в пространстве – три некомпланарных вектора, взятых в определенном порядке.

Базис называется *ортонормированным*, если его векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и по длине равны единице.

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется *декартовой прямоугольной системой координат.*

Вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке *M*, называется *радиус-вектором* точки *M*.

Если задана тройка попарно перпендикулярных единичных векторов $\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$, то каждый вектор пространства можно единственным способом разложить по этим векторам: $\vec{a} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Числа ($x;\ y;\ z$) называют координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ и обозначают $\vec{a} = (x;\ y;\ z)$.

На рис. 6 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ – углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно; $\vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}$ – единичные векторы координатных осей, называемые *ортами*.

Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ (рис. 6) $\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

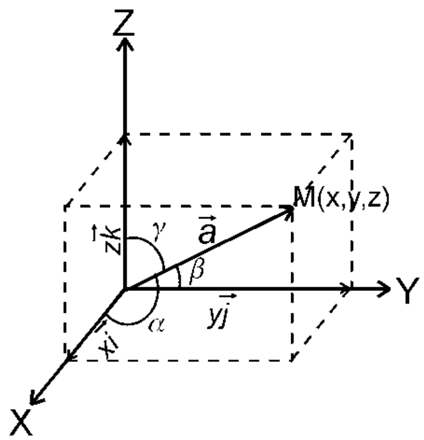


Рис. 6

Возведем в квадрат три равенства и, сложив их, получим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т. е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице.

Пусть даны векторы $\vec{a} = (x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\vec{b} = (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

Координаты алгебраической суммы векторов равны алгебраической сумме соответствующих координат слагаемых:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2).$$

Координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующей координаты на это число: $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$, где $\lambda \in R$.

Пусть даны точки $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$. Чтобы найти координаты (компоненты) вектора $\overrightarrow{AB}$, нужно из координат точки его конца вычесть координаты его начала: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Расстояние между двумя точками

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Если $\vec{a}||\vec{b}$, то $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, т. е. если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны.

Задание 1. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}$. Найдите линейную комбинацию $\vec{a} - 2\vec{b}$ этих векторов.

Решение. $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b} = \left(5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) - 2\left(2\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + \vec{k}\right) = 5\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} +$ $+3\vec{k} - 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath} - 2\vec{k} = (5 - 4)\vec{\imath} + (-2 + 8)\vec{\jmath} + (3 - 2)\vec{k} = \vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Ответ: $\vec{c} = \vec{\imath} + 6\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Задание 2. Определите, при каком значении k векторы $\vec{a} = (-4;\ 2)$ и $\vec{b} = (k;\ 8)$ не образуют базиса.

Решение. Два вектора на плоскости не образуют базиса, если они коллинеарны. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны. Следовательно, $\vec{a}||\vec{b}$, если $\frac{-4}{k} = \frac{2}{8}$. Решая пропорцию, находим: $-4 \cdot 8 = 2 \cdot k,\ k = -16$.

Ответ: $k = -16$.

Задание 3. Найдите длину разности векторов $\vec{a} = (6; -4;\ 3)$ и $\vec{b} = (1;\ 4; -5)$.

Решение. Найдем координаты разности векторов:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (6; -4;\ 3) - (1;\ 4; -5) = (5; -8;\ 8).$$

Определим длину вектора $\vec{c}$: $|\vec{c}| = \sqrt{5^2 + (-8)^2 + 8^2} = \sqrt{153}$.

Ответ: $\sqrt{153}$.

Задание 4. Упрощение выражения $\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{SH} - \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{HP}$ приводит его к виду…

1) $2\overrightarrow{MH}$; 2) $\overrightarrow{MH}$; 3) $\overrightarrow{MP}$; 4) $\overrightarrow{MO}$; 5) $\overrightarrow{SM}$.

Решение. Упростите заданное выражение, используя свойства линейных операций над векторами и правило многоугольника:

$$\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{SH} - \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{HP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP} - \left(\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OP}\right) + \overrightarrow{SH} =$$
$$= \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP} - \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{PS} + \overrightarrow{SH} = \overrightarrow{MH}.$$

Ответ: 2) $\overrightarrow{MH}$.

§ 2. Произведение векторов

Не тот велик, кто никогда не падал,
а тот велик – кто падал и вставал!
Конфуций

Возможны две операции умножения двух векторов. Одна дает в результате скаляр (число) и поэтому называется скалярным произведением, другая в результате дает вектор и называется векторным произведением.

2.1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 7) называется произведение их модулей на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot cos\,\alpha.$$

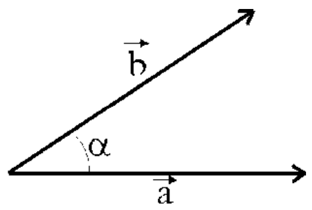


Рис. 7

Физический смысл скалярного произведения. Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению силы на вектор перемещения: $A=\vec{F}\cdot\vec{S}$.

Скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующих проекций:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Свойства скалярного произведения ортов:

$$\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{\imath}\cdot\vec{k}=\dots=\vec{k}\cdot\vec{\jmath}=0;\qquad \vec{\imath}\cdot\vec{\imath}=\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

Вычисление угла между векторами:

$$cos\,\alpha=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}.$$

Вычисление проекции одного вектора на другой:

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Вычисление работы силы $\vec{F}$ на прямолинейном перемещении $\vec{S}$:

$$\vec{A}=\vec{F}\cdot\vec{S}=F_xS_x+F_yS_y+F_zS_z,$$

где $\vec{F}=(F_x;\ F_y;\ F_z)$, $\vec{S}=(S_x;\ S_y;\ S_z)$.

Условие перпендикулярности двух векторов $\vec{a} \perp \vec{b}$:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

2.2. Векторное произведение векторов

Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется *правой* (*левой*), если выполнено условие: находясь внутри телесного угла, образованного приведением к общему началу векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от него к $\vec{c}$, совершающийся против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Декартова система координат называется правой (левой), если три базисных вектора образуют правую (левую) тройку.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$, при этом:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, причем $0 \le \varphi \le \pi$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является правой.

Геометрические свойства векторного произведения:

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

2. Длина (модуль) векторного произведения $[\vec{a}, \vec{b}]$ равняется площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$.
2. $[(\alpha\vec{a}), \vec{b}] = \alpha[\vec{a}, \vec{b}]$.
3. $[(\vec{a} + \vec{b}), \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$.
4. $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$.

Вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно точки:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

где $\vec{F} = (F_x;\ F_y;\ F_z)$, $\vec{r} = (r_x;\ r_y;\ r_z)$.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, то

$$[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Если два вектора $\vec{a} = \{x_1;\ y_1;\ z_1\}$ и $\vec{b} = \{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ коллинеарны, то координаты их пропорциональны, т. е. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$, а векторное произведение равно нулю.

Свойства векторного произведения ортов:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k};\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i};\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j};\quad \vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0.$$

2.3. Смешанное произведение векторов

Если вектор $\vec{a}$ векторно умножается на вектор $\vec{b}$, а получившийся при этом вектор $[\vec{a},\vec{b}]$ затем скалярно умножается на вектор $\vec{c}$, то в результате получается число $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}$, называемое **смешанным произведением векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Геометрическое свойство смешанного произведения

Смешанное произведение $[\vec{a},\vec{b}]\cdot\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и берется со знаком «+», если тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ правая, и со знаком «–», если тройка $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ левая.

Свойства смешанного произведения:

1. Знаки операций «крест» и «точка» можно менять местами:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{a}\vec{b}\vec{c}.$$

2. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.

3. Смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно нулю.

4. От перестановки двух сомножителей смешанное произведение меняет знак: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}=-(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$.

Вычисление момента силы $\vec{F}$ относительно оси l:

$$M_l=\vec{r}\times\vec{F}\cdot\vec{e_l},$$

где $\vec{F}=(F_x;\ F_y;\ F_z)$; $\vec{r}=(r_x;\ r_y;\ r_z)$; $\vec{e_l}$ – единичный вектор оси l.

Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определены декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$, $\vec{c}=\{x_3;\ y_3;\ z_3\}$, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т. е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a}=\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;\ y_2;\ z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_3;\ y_3;\ z_3\}$ является равенство определителя нулю:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Задание 5. Даны векторы $\vec{a} = (3;\ 5; -2)$, $\vec{b} = (1;\ 4; -3)$, $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$. Найдите скалярное произведение $\vec{c} \cdot \vec{a}$.

Решение. Найдем сначала координаты вектора $\vec{c}$:

$$\vec{c} = 2(3;\ 5;\ -2) - 3(1;\ 4;\ -3) = (6;\ 10;\ -4) - (3;\ 12;\ -9) =$$
$$= \big(6 - 3;\ 10 - 12;\ \ -4 - (-9)\big) = (3;\ -2;\ 5).$$
$$\vec{c} \cdot \vec{a} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) = 9 - 10 - 10 = -11.$$

Ответ: $\vec{c} \cdot \vec{a} = -11$.

Задание 6. Определите, при каком значении k векторы $\vec{a} = (-1;\ 2;\ 4)$ и $\vec{b} = (4;\ k; -2)$ перпендикулярны.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, если их скалярное произведение равно нулю. Вычислим скалярное произведение $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и приравняем его к нулю:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -1 \cdot 4 + 2 \cdot k + 4 \cdot (-2) = -4 + 2k - 8 = -12 + 2k,$$
$$-12 + 2k = 0, \quad k = 6.$$

Ответ: $k = 6$.

Задание 7. Найдите $(3\vec{a} - 5\vec{b})^2$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – взаимно перпендикулярные единичные векторы.

Решение. Преобразуем выражение, используя определение и алгебраические свойства скалярного произведения двух векторов:

$$(3\vec{a} - 5\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 - 30\vec{a}\vec{b} + 25\vec{b}^2 = 9 \cdot 1^2 - 30 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^0 +$$
$$+ 25 \cdot 1^2 = 9 - 0 + 25 = 34.$$

Ответ: 34.

Задание 8. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{k}$ и $\vec{b} = -4\vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$.

Решение. Косинус угла φ между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданными координатами $\vec{a} = (a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\vec{b} = (b_1;\ b_2;\ b_3)$, определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}.$$

Получим:

$$\cos\varphi = \frac{4 \cdot (-4) + 0 \cdot (-5) + 3 \cdot 2}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \frac{-10}{\sqrt{25} \cdot \sqrt{45}} = \frac{-2}{3\sqrt{5}}.$$

Ответ: $\cos\varphi = \frac{-2}{3\sqrt{5}}$.

Задание 9. Сила $\vec{F} = (0;\ 2;\ 4)$ приложена к точке $A(1;\ 2;\ 1)$. Найдите работу силы при прямолинейном перемещении точки A в положение $B(2;\ -1;\ 3)$.

Решение. Найдем вектор перемещения

$$\vec{S} = \overrightarrow{AB} = (2-1;\ -1-2;\ 3-1) = (1;\ -3;\ 2).$$

Вычислим работу силы $\vec{F}$ при перемещении $\vec{S}$:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-3) + 4 \cdot 2 = 2.$$

Ответ: $A = 2$.

Задание 10. Найдите векторное произведение векторов $\vec{a} = 5\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 4\vec{k}$.

Решение. Запишем координаты векторов $\vec{a} = (5;\ -3;\ 2)$, $\vec{b} = (2;\ 3;\ -4)$.

Находим векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (12-6)\vec{\imath} - (-20-4)\vec{\jmath} + \big(15-(-6)\big)\vec{k} = 6\vec{\imath} + 24\vec{\jmath} + 21\vec{k}.$$

Ответ: $\vec{a} \times \vec{b} = 6\vec{\imath} + 24\vec{\jmath} + 21\vec{k}$.

Задание 11. Найдите площадь параллелограмма *ABCD*, если *A*(0; 1; 1), *B*(1; –1; 1), *C*(1; 1; 0), *D*(2; –1; 0).

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1-0;\ -1-1;\ 1-1) = (1;\ -2;\ 0);$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-0;\ 1-1;\ 0-1) = (1;\ 0; -1).$$

Найдем векторное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{\imath}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{\jmath}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{\imath}(2-0) - \vec{\jmath}(-1-0) + \vec{k}(0+2) = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}.$$

Вычислим площадь параллелограмма *ABCD:*

$$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 3$.

Задание 12. Найдите смешанное произведение векторов $\vec{a} = (5;\ 7;\ 2)$, $\vec{b} = (1;\ -1;\ 3)$ и $\vec{c} = (-4;\ 2;\ 1)$.

Решение. Смешанное произведение заданных векторов

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 5 & 7 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-1) \cdot 1 + 7 \cdot 3 \cdot (-4) +$$

$$+ 1 \cdot 2 \cdot 2 - (-4 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 7 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 5) =$$

$$= -5 - 84 + 4 - (8 + 7 + 30) = -85 - 45 = -130.$$

Ответ: $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = -130$.

Задание 13. Найдите объем пирамиды $ABCD$, если $A(0;\ 1;\ 1)$, $B(1; -1; 1)$, $C(1; 1; 0)$, $D(2; -1; 2)$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$:

$$\overrightarrow{AB} = (1-0;\ -1-1;\ 1-1) = (1;\ -2;\ 0);$$

$$\overrightarrow{AC} = (1-0;\ 1-1;\ 0-1) = (1;\ 0;-1);$$

$$\overrightarrow{AD} = (2-0;\ -1-1;\ 2-1) = (2;\ -2;\ 1).$$

Найдем смешанное произведение полученных векторов:

$$\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (0-2) + 2(1+2) = 4.$$

Вычислим объем пирамиды $ABCD$:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right| = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: $V_{ABCD} = \frac{2}{3}$.

Задание 14. Определите, при каком значении k векторы $\vec{a} = (-4;\ 3;\ 2)$, $\vec{b} = (-4;\ 1;\ 2)$ и $\vec{c} = (k;\ 3;\ 1)$ не образуют базиса.

Решение. Три вектора в пространстве R^3 не образуют базиса, если их смешанное произведение равно нулю.

Найдем смешанное произведение векторов и приравняем его нулю:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -4 & 1 & 2 \\ k & 3 & 1 \end{vmatrix} = (-4)\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 2\cdot k +$$

$$+ 2\cdot(-4)\cdot 3 - (2\cdot 1\cdot k + (-4)\cdot 2\cdot 3 + 3\cdot(-4)\cdot 1) =$$

$$= -4 + 6k - 24 - (2k - 24 - 12) = 4k + 8,\ 4k + 8 = 0,\ k = -2.$$

Ответ: $k = -2$.

Задание 15. Сила $\vec{F} = (0;\ 2;\ 4)$ приложена к точке $A(1;\ 2;\ 1)$. Определите момент этой силы относительно начала координат и оси Ox.

Решение. Определим момент силы $\vec{F}$ относительно точки O по формуле

$$\vec{M} = \overrightarrow{OA} \times \vec{F}.$$

$$\vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(8-2) - \vec{j}(4-0) + \vec{k}(2-0) = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Единичный вектор оси Ox $\vec{e_i} = \vec{i} = (1;\ 0;\ 0)$.

Момент силы $\vec{F}$ относительно оси Ox

$$M_x = \vec{M} \cdot \vec{i} = 6.$$

Ответ: $\vec{M} = (6; -4; 2)$; $M_x = 6$.

§ 3. Система координат

Так мало пройденных дорог,
Так много сделанных ошибок.
Сергей Есенин

3.1. Полярная система координат

Полярная система координат определена, если заданы точка O, называемая полюсом, и исходящий из полюса луч l, который называют полярной осью.

Положение точки M фиксируется двумя числами: полярным радиусом $|\vec{r}| = \rho = |\overrightarrow{OM}|$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 8). Угол φ называют полярным углом. Он измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Пара чисел $(\rho;\ \varphi)$ и $(\rho;\ \varphi + 2\pi)$ представляет собой полярные координаты одной и той же точки.

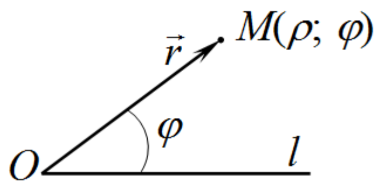


Рис. 8

Переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

В пространстве обобщением полярных координат являются цилиндрические и сферические системы координат.

3.2. Цилиндрическая система координат

Цилиндрические координаты точки M – это три числа $(\rho;\ \varphi;\ z)$, где ρ и φ – полярные координаты точки M_1, а z – компоненты вектора $\overrightarrow{M_1M}$ по вектору $\vec{n}$; p – плоскость, в которой расположена полярная система координат (рис. 9).

Переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

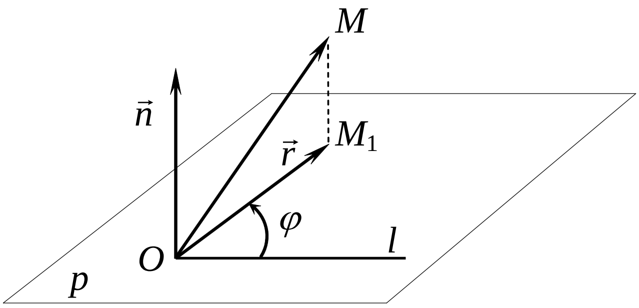


Рис. 9

3.3. Сферическая система координат

Сферические координаты точки M – это три числа (ρ; φ; θ), где ρ – радиус-вектор точки M; φ – полярные координаты точки M_1; θ – угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и нормалью $\vec{n}$ плоскости p (рис. 10).

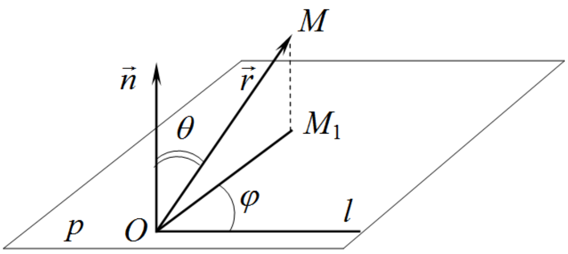


Рис. 10

Переход от декартовых координат к сферическим осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi, \\ z = \rho \cos\theta. \end{cases}$$

§ 4. Задания для самостоятельного решения

4.1. Базовые задания

1. Известны координаты точек $A(1;\ 2)$ и $C(–3;\ 3)$. Найдите координаты точки B, если $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB}$.

2. Дан вектор $\vec{a} = (4;\ 6;\ -12)$. Найдите модуль вектора.

3. Даны вектор $\overrightarrow{AB}(-2;\ 3;\ 1)$ и точка $A(–3;\ 2;\ 7)$. Найдите координаты точки B.

4. Найдите такое положительное значение λ, при котором норма вектора $\vec{a}(\lambda;\ 6;\ 8)$ в евклидовом пространстве R^3 равна 26.

5. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a} = 3\vec{\imath} + 4\vec{k}$ и $\vec{b} = 7\vec{\imath} - 24\vec{\jmath}$.

6. Сила $\vec{F} = (3;\ 2;\ 1)$ приложена к точке $A(1;\ 2;\ 4)$. Найдите работу силы при прямолинейном перемещении точки A в положение $B(0;\ 1;\ 10)$.

7. Найдите скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$, если векторы $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{2\pi}{3}$.

8. Найдите значение k, при котором векторы $\vec{a}(-2;\ 3;\ 5)$ и $\vec{b}(-1;\ k;\ 2)$ перпендикулярны.

9. Найдите площадь треугольника с вершинами $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(1;\ 4;\ 4)$ и $C(4;\ 0;\ 3)$.

10. В пространстве R^3 даны векторы $\vec{a} = -\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ и $\vec{c} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 6\vec{k}$. Найдите объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

11. Сила $\vec{F} = (0;\ 2;\ 1)$ приложена к точке $A(-1;\ 2;\ 1)$. Определите момент этой силы относительно начала точки $B(0;\ 3;\ 0)$.

12. Найдите произведения ортов $\vec{\imath} \cdot 2\vec{\jmath}$, $\vec{\imath} \times \vec{k}$, $\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}$, $\vec{k} \times \vec{k}$.

4.2. Профильные задания

1. Дан вектор $\vec{a} = (1;\ -1;\ 5;\ -3)$. Найдите норму вектора в евклидовом пространстве со стандартным произведением.

2. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 7$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = 4$, $\left|\overrightarrow{AC}\right| = 5$ и точки *A*, *B*, *C* являются вершинами треугольника.

3. Определите, какой является тройка векторов (правой, левой или компланарной), если $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 4\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath}$ и $\vec{c} = -\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$.

4. Односкатная крыша опирается на четыре столба с координатами *A*(0; 4; 3), *B*(0; 0; 3,5), *C*(5; 1; 4) и *D*(4; 8; 3). Найдите площадь крыши *ABCD*.

5. Докажите, что точки *A*(0; 4; 3), *B*(–2; 5; 1), *C*(3; 1; 4) и *D*(4; –1; 3) являются вершинами трапеции.

6. Определите, лежат ли точки *A*(3; –1; 5), *B*(–2; 2; 6), *C*(3; 0; 7) и *D*(–1; 1; 5) в одной плоскости.

7. Разложите вектор $\vec{d} = 7\vec{\imath} + 3\vec{k}$ по векторам $\vec{a} = 5\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ и $\vec{c} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

8. Вычислите косинус угла между диагоналями параллелограмма, три последовательные вершины которого находятся в точках *A*(3; 5; 0), *B*(0; 4; 2) и *C*(1; 1; 2).

9. Даны вершины треугольника *A*(1; 2; 3), *B*(3; 1; 2) и *C*(0; 1; 2). Определите его внешний угол при вершине A.

10. Найдите такое положительное значение α, при котором площадь треугольника с вершинами *A*(α; 2; 3), *B*(3; 1; 2) и *C*(–1; 1; 1) равна 4,5.

11. Точка A симметрична точке $B\left(2;\ \frac{\pi}{6}\right)$ относительно полярной оси ($r \geq 0$; $-\pi < \varphi \leq \pi$). Найдите прямоугольные координаты точки *A*(*x*; *y*) при условии, что начало координат прямоугольной системы совпадает с полюсом полярной системы, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью и обе системы координат правые.

12. Найдите расстояние от точки $M\left(8;\ \frac{\pi}{6}\right)$, заданной в полярной системе координат, до полярной оси.

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Основные задачи аналитической геометрии на плоскости

Величие человека – в его способности мыслить.
Б. Паскаль

Расстояние между двумя точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Пусть даны точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$. Координаты точки $M(x;\ y)$, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda = AM{:}MB$, находятся по формулам:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Если в точках $A_i(x_i;\ y_i)$ помещены массы m_i, то координаты центра масс этой системы определяются по формулам:

$$x = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \qquad y = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}.$$

Если в точках $A_i(x_i;\ y_i)$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ помещены одинаковые массы m, то координаты центра масс системы являются средним арифметическим координат этих точек:

$$x = \overline{x} = \frac{\sum x_i}{n}; \quad y = \overline{y} = \frac{\sum y_i}{n}.$$

Координаты центра масс однородной треугольной пластины совпадают со средним арифметическим координат его вершин:

$$x = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \qquad y = \overline{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Аналогично для однородной пластины в форме параллелограмма.

Площадь треугольника с вершинами $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$ и $A_3(x_3;\ y_3)$ вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|,$$

или

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Площадь четырехугольника с вершинами $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, $A_3(x_3;\ y_3)$ и $A_4(x_4;\ y_4)$ рассчитывается по формуле

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_4 & y_4 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}\right|,$$

или

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 \end{vmatrix}\right|.$$

Задание 1. Даны точки A(8; –11), B(1; 13) и C(–8; 1). Установите соответствие между отрезком и его длиной.

1) $|AB|$, 2) $|AC|$, 3) $|BC|$;

a) 5, *b*) 10, *c*) 15, *d*) 20, *e*) 25.

Решение. Длина отрезка AB – расстояние между точками A и B. Расстояние между точками $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$ вычисляется по формуле $|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

Найдем по указанной формуле длины отрезков AB, AC и BC:

$$|AB| = \sqrt{(1-8)^2 + (13-(-11))^2} = \sqrt{49+576} = 25;$$

$$|AC| = \sqrt{(-8-8)^2 + (1-(-11))^2} = \sqrt{256+144} = 20;$$

$$|BC| = \sqrt{(-8-1)^2 + (1-13)^2} = \sqrt{81+144} = 15.$$

Ответ: AB – *e*); AC – *d*); BC – *c*).

Задание 2. Даны вершины треугольника ABC: A(–8; –2), B(–2; 6), C(2; 20); CM – его медиана. Найдите координаты точки M.

Решение. По определению медианы точка M является серединой отрезка AB. Используя формулы для координат середины отрезка, найдем координаты точки M:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-8 + (-2)}{2} = -5; \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-2+6}{2} = 2.$$

Ответ: M(–5; 2).

Задание 3. Даны точки A(3; –1) и B(–1; 2). Ось Ox делит отрезок AB в отношении λ. Найдите λ.

Решение. Пусть ось Ox пересекает отрезок AB в точке $M(x;\ 0)$. Точка M делит отрезок AB в отношении $\lambda = AM{:}MB$. Найдем λ из формулы

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}.$$

С учетом данных имеем:

$$0 = \frac{-1 + 2\lambda}{1+\lambda}, \quad \lambda = 0{,}5.$$

Ответ: $\lambda = 0{,}5$.

Задание 4. Кадастровый инженер определил четыре последовательные вершины четырехугольного участка с координатами h_1(291 317,09; 2 282 374,16), h_2(291 309,93; 2 282 405,06), h_3(291 291,84; 2 282 395,34), h_4(291 299,13; 2 282 363,65). Вычислите площадь участка.

Решение. С целью упрощения вычислений переместим начало координат в точку h_1. В результате получим:

$h_1(0; 0)$, $h_2(-7,16; 30,9)$, $h_3(-25,25; 21,18)$, $h_4(-17,96; -10,51)$.

Найдем площадь участка:

$$S = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -7,16 & 30,9 \\ -25,25 & 21,18 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -25,25 & 21,18 \\ -17,96 & -10,51 \end{vmatrix}\right| =$$

$$= \frac{1}{2}|628,5762 + 645,7703| = 637,17325 \approx 637.$$

***Ответ*:** $S = 637$.

Задание 5. В точках $A(1; 3)$ и $B(-2; 1)$ помещены два однородных шара массой 4 и 6 кг соответственно. Найдите координаты центра масс данной системы.

Решение. Для определения координат центра масс воспользуемся формулами:

$$x = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i}; \quad y = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i}.$$

С учетом данных имеем:

$$x = \frac{1 \cdot 4 + (-2) \cdot 6}{4 + 6} = -0,8; \quad y = \frac{3 \cdot 4 + 1 \cdot 6}{4 + 6} = 1,8.$$

***Ответ*:** (–0,8; 1,8).

§ 2. Прямая на плоскости

Прямые существуют лишь в геометрии,
а не в природе и не в жизни.

Г. Гессе

1. Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ с произвольными коэффициентами A, B и C, такими, что A и B не равны одновременно нулю, называется *общим уравнением прямой*. A и B являются координатами нормального вектора прямой.

2. *Уравнение прямой «в отрезках» на осях* имеет вид $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, где a и b – это отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, называют направляющим вектором этой прямой.

3. *Уравнение прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}\{A;\ B\}$, имеет вид $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

4. *Уравнение прямой, проходящей через две точки –* $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, имеет вид $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

5. *Каноническим уравнением* прямой называют уравнение вида $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m}$, где $M_0(x_0;\ y_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой; $\vec{q}\{l;\ m\}$ – координаты направляющего (параллельного прямой) вектора.

6. Из канонического уравнения прямой можно получить параметрические уравнения прямой. Примем за параметр t величину, стоящую в левой и правой частях канонического уравнения прямой, тогда

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases} \text{ – \textit{параметрические уравнения прямой}.}$$

Параметрические уравнения прямой имеют наглядную физическую интерпретацию. Если считать, что параметр t – это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью

$$v = \sqrt{l^2 + m^2}.$$

7. *Уравнение прямой, проходящей через заданную точку* $M_0(x_0;\ y_0)$ *и имеющей угловой коэффициент* k, может быть записано в виде

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловым коэффициентом называют тангенс угла наклона прямой к оси OX.

8. Уравнение вида $y = kx + b$ называют *уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

9. Уравнение вида $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ называют *нормированным уравнением прямой*, где θ – угол между нормальным вектором прямой и осью OX; p – расстояние от начала координат до прямой.

Расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, заданной общим уравнением, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

10. *Уравнение пучка прямых* имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где α, β – любые числа, не равные одновременно нулю.

Угол φ между прямыми, отсчитанный против хода часовой стрелки от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2x + b_2$, определяется формулой

$$tg\ \varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}.$$

Для прямых, заданных в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, угол определяется формулой

$$tg\,\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Условие *параллельности*: $k_1 = k_2$ или $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$; условие *перпендикулярности:* $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Задание 6. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;\,1)$ параллельно (перпендикулярно) прямой $5x + 2y - 8 = 0$.

Решение. Разрешив уравнение прямой относительно y, найдем угловой коэффициент k_1:

$$2y = -5x + 8; \quad y = -\frac{5}{2}x + 4; \quad k_1 = -\frac{5}{2}.$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(5;\,1)$, с угловым коэффициентом k:

$$y - 1 = k(x - 5).$$

1. Поскольку угловые коэффициенты параллельных прямых равны, то $k_1 = k = -\frac{5}{2}$. Подставим найденное значение k в уравнение: $y - 1 = -\frac{5}{2}(x - 5)$. Выполнив необходимые преобразования, получим искомое уравнение прямой: $5x + 2y - 27 = 0$

2. Угловой коэффициент k_2 найдем из условия перпендикулярности двух прямых $k_2 \cdot k = -1$, следовательно, $k_2 = \frac{2}{5}$. Подставим в уравнение найденное значение k_2: $y - 1 = \frac{2}{5}(x - 5)$.

Выполнив необходимые преобразования, получим искомое уравнение прямой: $2x - 5y - 5 = 0$.

***Ответ*:** 1) $5x + 2y - 27 = 0$; 2) $2x - 5y - 5 = 0$.

Задание 7. Среди прямых l_1: $3x - y + 2 = 0$; l_2: $6x + 2y - 3 = 0$; l_3: $x + 3y - 2 = 0$; l_4: $-2x + 6y - 5 = 0$ найдите перпендикулярные прямые.

Решение. Приведем каждое из уравнений к уравнению прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$:

$$l_1\!: y = 3x + 2; \quad l_2\!: y = -3x + 1{,}5; \quad l_3\!: y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}; \quad l_4\!: y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}.$$

Из полученных уравнений видно, что $k_1 = 3$, $k_2 = -3$, $k_3 = -\frac{1}{3}$, $k_4 = \frac{1}{3}$. Условие перпендикулярности выполнено для прямых l_1 и l_3 $\left(k_1 \cdot k_3 = 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -1\right)$ и для прямых l_2 и l_4 $\left(k_2 \cdot k_4 = -3 \cdot \frac{1}{3} = -1\right)$.

Ответ: среди заданных прямых перпендикулярными будут l_1 и l_3, l_2 и l_4.

Задание 8. Найдите расстояние от точки $B(-3;\ 2)$ до прямой
$$y = \frac{3}{4}x + 3.$$

Решение. Расстояние от точки $M(x_0;\ y_0)$ до прямой, заданной общим уравнением $Ax + By + C = 0$, определяется по формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$. Преобразуем уравнение прямой $y = \frac{3}{4}x + 3$ к общему уравнению: $4y = 3x + 12$, $3x - 4y + 12 = 0$. Здесь $A = 3$, $B = -4$, $C = 12$, поэтому
$$d = \frac{|3 \cdot (-3) - 4 \cdot 2 + 12|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|-9 - 8 + 12|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1.$$

Ответ: 1.

Задание 9. Установите соответствие между уравнением прямой

1) $2x - 3y + 6 = 0$, 2) $4y + 5 = 0$, 3) $4x - 7 = 0$

и ее угловым коэффициентом

a) 2/3, *b*) 2, *c*) –2/3, *d*) не существует, *e*) 0.

Решение

1. Разрешим данное уравнение относительно y: $3y = 2x + 6$, $y = \frac{2}{3}x + 2$. Получим уравнение прямой с угловым коэффициентом, здесь $k = \frac{2}{3}$.

2. Уравнение $By + C = 0$ задает прямую, параллельную оси Ox, $k = 0$.

3. Уравнение $Ax + C = 0$ задает прямую, параллельную оси Oy. Такие прямые не имеют углового коэффициента.

Ответ: 1 – *a*); 2 – *e*); 3 – *d*).

Задание 10. Найдите абсциссу точки пересечения прямых $3x - 2y - 6 = 0$ и $2x + y - 4 = 0$.

Решение. Найдем абсциссу точки пересечения прямых, исключив из данных уравнений переменную *y:*
$$\begin{cases} 3x - 2y - 6 = 0, \\ 2x + y - 4 = 0. \end{cases}$$

Домножим второе уравнение на 2 и сложим почленно с первым уравнением: $3x - 2y - 6 + (4x + 2y - 8) = 0$, или $7x - 14 = 0$, откуда $x = 2$.

Ответ: 2.

Задание 11. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -5)$, параллельно прямой $-2x + 4y - 3 = 0$.

Решение. Уравнение прямой записано в общем виде. Нормальный вектор этой прямой $\vec{n} = \{-2;\ 4\}$. Найдем координаты направляющего вектора $\vec{q}\{\alpha;\ \beta\}$ из условия перпендикулярности векторов:

$$\vec{n} \cdot \vec{q} = 0;\ \ -2\alpha + 4\beta = 0.$$

Пусть $\alpha = 2$, тогда $\beta = 1$.

Каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

где $A(x_0;\ y_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой; $\vec{q}\{l;\ m\}$ – координаты направляющего (параллельного прямой) вектора.

Каноническое уравнение прямой имеет вид

$$\frac{x - 2}{2} = \frac{y + 5}{1}.$$

Ответ: $\frac{x-2}{2} = \frac{y+5}{1}$.

§ 3. Кривые второго порядка

Вдохновение нужно в геометрии
не меньше, чем в поэзии.
А.С. Пушкин

Кривой второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа; A, B и C одновременно не равны нулю.

Приведем еще одно определение кривой второго порядка.

Геометрическое место точек плоскости, для которых отношение их расстояний до заданной точки, называемой фокусом, и до заданной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная, равная ε, является кривой второго порядка с эксцентриситетом, равным ε. Если $\varepsilon < 1$, то кривая второго порядка – эллипс; $\varepsilon = 1$ – парабола; $\varepsilon > 1$ – гипербола.

Рассмотрим частные случаи кривых второго порядка: окружность, эллипс, гипербола и парабола.

Окружностью называется геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от заданной точки, называемой центром, на заданное расстояние, называемое ее радиусом.

Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A(x_0;\ y_0)$ записывается как

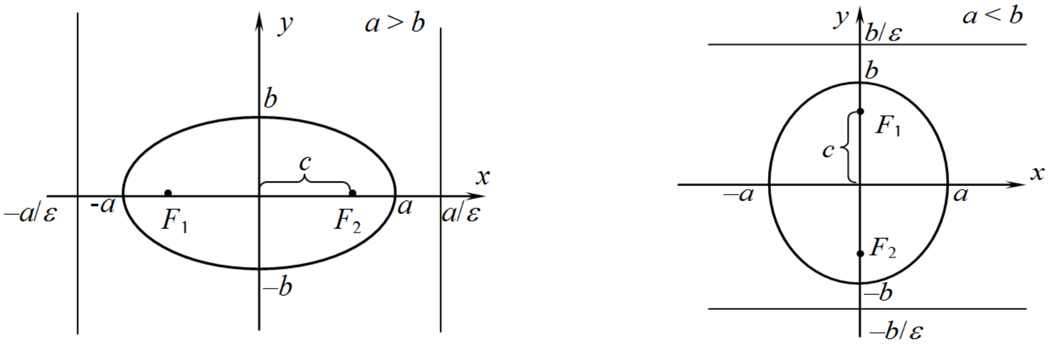
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $r_1 + r_2 = const = 2a$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Если $a > b$, то эллипс расположен вдоль оси Ox (рис. 11*а*); если $a < b$, то эллипс расположен вдоль оси Oy (рис. 11*б*).



а *б*

Рис. 11

Декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение эллипса имеет канонический вид, называется канонической.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются *вершинами эллипса*. Расстояния от начала координат до вершин a и b называются соответственно *большой и малой полуосями эллипса*.

Центр симметрии эллипса, совпадающий с началом координат, называется *центром эллипса*.

Если c – расстояние от начала координат канонической системы координат до фокусов, то $c^2 = a^2 - b^2$.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$, $\varepsilon < 1$ называется *эксцентриситетом эллипса.*

Расстояние от произвольной точки $M(x;\ y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов является линейной функцией от ее абсциссы:

$$r_{1,2} = a \pm \varepsilon x.$$

С эллипсом связаны две прямые, называемые его *директрисами.* Их уравнения в канонической системе имеют вид $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$.

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $|r_1 - r_2| = const = 2a$ (рис. 12).

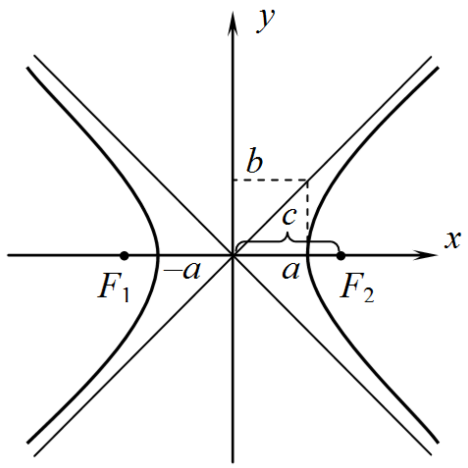


Рис. 12

Декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение гиперболы имеет канонический вид, называется канонической.

Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ось абсцисс канонической системы пересекает гиперболу в точках, называемых *вершинами гиперболы*. Ось ординат не пересекает гиперболу. a и b называются вещественной и мнимой полуосями гиперболы. Центр симметрии гиперболы, совпадающий с началом координат, называется *центром гиперболы*.

Если c – расстояние от начала координат канонической системы координат до фокусов гиперболы, то $c^2 = a^2 + b^2$.

Отношение $\varepsilon = \frac{c}{a}$ ($\varepsilon > 1$) называется *эксцентриситетом гиперболы*.

Расстояние r от произвольной точки $M(x; y)$, лежащей на гиперболе, до каждого из фокусов $r_{1,\,2} = |a \pm \varepsilon x|$.

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется равносторонней.

Прямые с уравнениями $y = \pm\frac{b}{a}x$ в канонической системе называются *асимптотами* гиперболы.

Прямые $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ называют *директрисами* гиперболы в канонической системе координат.

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости (рис. 13).

Указанная точка F называется фокусом параболы, а фиксированная прямая – директрисой параболы.

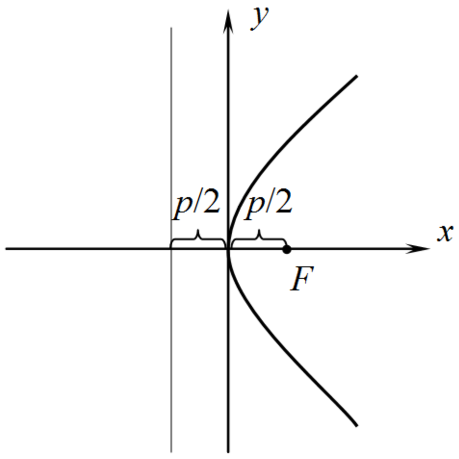


Рис. 13

Система координат, в которой парабола имеет канонический вид, называется *канонической*, а ось Ox – осью параболы.

Каноническое уравнение параболы

$$y^2 = 2px.$$

Парабола проходит через начало канонической системы координат. Эта точка называется *вершиной параболы*.

Фокус параболы F имеет координаты $(p/2;\ 0)$.

Директрисой параболы называется прямая $x = -\frac{p}{2}$ в канонической системе координат.

Расстояние от произвольной точки параболы до фокуса F вычисляется по формуле

$$r = x + \frac{p}{2}.$$

Как указано выше, линией второго порядка называется линия, определяемая уравнением второй степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Запишем дискриминант уравнения $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ и дискриминант старших членов $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$. Тогда:

1) если $\delta > 0$ и $\Delta \neq 0$, то кривая второго порядка – эллипс (действительный или мнимый);

2) если $\delta > 0$ и $\Delta = 0$ – точка;

3) если $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$ – гипербола;

4) если $\delta < 0$ и $\Delta = 0$ – пара пересекающихся прямых;

5) если $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$ – парабола;

6) если $\delta = 0$ и $\Delta = 0$ – пара параллельных прямых (действительных или мнимых).

Задание 12. Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = 0.$$

Решение. Уравнение окружности радиуса R с центром в точке $A(x_0;\ y_0)$ имеет вид $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Сгруппируем в исходном уравнении члены, содержащие x, и отдельно члены, содержащие y: $(x^2 + 6x) + (y^2 - 8y) = 24$.

Преобразуем двучлены, стоящие в скобках, в полные квадраты суммы и разности, прибавив к первому 9, ко второму 16.

Для того чтобы равенство при этом не нарушилось, увеличим и правую часть его на сумму 9 + 16. После этого преобразования уравнение запишется в виде

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 24 + 9 + 16$$

или

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 7^2.$$

Это равенство является уравнением окружности с центром в точке $A(-3;\ 4)$ и радиусом, равным 7.

***Ответ*:** $A(-3;\ 4)$; $R = 7$.

Задание 13. Укажите соответствие между кривыми второго порядка:

a) гиперболой, b) параболой, c) окружностью, d) эллипсом

и их уравнениями:

1) $(x - 3)^2 - (y + 4)^2 = 36$; 2) $x^2 - 8y = 16$;

3) $9x^2 + 16y^2 = 144$; 4) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Решение. Преобразуем уравнения к одному из следующих видов:

a) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ – уравнение окружности;

b) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – уравнение эллипса;

c) $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ – уравнение гиперболы;

d) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$ – уравнение параболы.

1. Разделив обе части уравнения на 36, нетрудно получить

$$\frac{(x-3)^2}{6^2} - \frac{(y-(-4))^2}{6^2} = 1 \text{ – уравнение } \textit{гиперболы,}$$

где $x_0 = 3$, $y_0 = -4$, $a = b = 6$.

2. Уединив x^2, получим

$$x^2 = 8y + 16,$$

или

$$(x - 0)^2 = 2 \cdot 4(y - (-2)) \text{ – уравнение } \textit{параболы,}$$

где $x_0 = 0$, $y_0 = -2$, $p = 4$.

3. Разделив обе части уравнения на 144, имеем

$$\frac{9x^2}{144} + \frac{16y^2}{144} = 1.$$

Отсюда получим уравнение *эллипса*:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1, \text{ или } \frac{(x-0)^2}{4^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1,$$

где $x_0 = y_0 = 0$, $a = 4$, $b = 3$.

4. Домножив обе части на 16, получим уравнение *окружности*:

$$x^2 + y^2 = 16, \text{ или } (x-0)^2 + (y-0)^2 = 4^2,$$

где $x_0 = y_0 = 0$, $R = 4$.

Ответ: a – 1; b – 2; c – 4; d – 3.

Задание 14. Найдите эксцентриситет и расстояние между фокусами эллипса $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Решение. Искомое уравнение – каноническое уравнение эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

где $a^2 = 36$, $b^2 = 9$, т. е. $a = 6$, $b = 3$.

Расстояние между фокусами эллипса определяется из соотношения $d = 2c = 2\sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{36 - 9} = 6\sqrt{3}$.

Эксцентриситет эллипса находим по формуле $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{3\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\varepsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $d = 6\sqrt{3}$.

Задание 15. Найдите длину мнимой полуоси гиперболы, заданной уравнением $x^2 - 8x - 4y^2 - 20 = 0$.

Решение. Выделим в уравнении $x^2 - 8x - 4y^2 - 20 = 0$ полный квадрат по переменной x: $(x^2 - 8x + 16) - 16 - 4y^2 - 20 = 0$ или $(x-4)^2 - 4y^2 = 36$. Разделив обе части этого уравнения на 36, получим уравнение гиперболы в виде $\frac{(x-4)^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Отсюда $b^2 = 9$, поэтому мнимая полуось $b = 3$.

Ответ: 3.

Задание 16. Выясните геометрический смысл уравнения

$$x^2 - 4xy - 4y^2 + 2x - 6y - 20 = 0.$$

Решение. Составим из коэффициентов уравнения $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ определители δ, Δ и вычислим их.

$$A = 1, B = -2, C = -4, D = 1, E = -3, F = -20;$$

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 - 4 = -8;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \\ 1 & -3 & -20 \end{vmatrix} =$$
$$= 80 + 6 + 6 - (-4 + 9 - 80) = 167.$$

Определитель $\delta < 0$, $\Delta > 0$, следовательно, уравнение определяет гиперболу.

***Ответ*:** гипербола.

§ 4. Прямая и плоскость в пространстве

Я ищу в людях только хорошее.
Плохое они сами покажут.
Владимир Высоцкий

4.1. Плоскость в пространстве

1. *Уравнением плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\vec{n}\{A;\ B;\ C\}$, называют уравнение вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. *Общее уравнение плоскости* в прямоугольной системе координат имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$.

Общее уравнение называют полным, если все его коэффициенты – A, B, C и D – отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется неполным.

3. Полное уравнение плоскости может быть приведено к *уравнению плоскости «в отрезках» на осях:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях OX, OY, OZ соответственно.

4. *Уравнение плоскости, проходящей через три точки:* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение представляет собой условие компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, где $M(x;\ y;\ z)$ – произвольная точка на искомой плоскости.

5. *Нормированное уравнение плоскости* имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где $\vec{n}\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$ – единичный нормальный вектор искомой плоскости; p – расстояние от плоскости до начала координат.

Если плоскость задана в общем виде, то расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую L, называется пучком плоскостей с центром L.

6. *Уравнение пучка всех плоскостей*, проходящих через линию L, имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где α, β – любые числа, не равные одновременно нулю.

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, называется *связкой плоскостей* с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

7. *Уравнение связки плоскостей* с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0,$$

где α, β, γ – любые числа, не равные одновременно нулю.

Если даны две плоскости, заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

то определение угла между указанными плоскостями сводится к определению угла φ между их нормальными векторами $\vec{n}_1\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$. Из определения скалярного произведения следует:

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Тогда *условие параллельности двух плоскостей* эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов этих плоскостей. По определению два вектора коллинеарны, если их компоненты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условием перпендикулярности двух плоскостей является равенство нулю скалярного произведения нормальных векторов:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

4.2. Прямая в пространстве

1. *Канонические уравнения прямой* имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой; $\vec{q}\{l;\ m;\ n\}$ – направляющий вектор прямой.

2. Из канонических уравнений можно легко получить *уравнения прямой в проекциях:*

$$\begin{cases} \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m}, \\ \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}. \end{cases}$$

3. *Уравнения прямой, проходящей через две различные точки –* $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

4. *Параметрические уравнения прямой* получаются из канонических, если принять за t каждое из соотношений

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

5. *Общие уравнения прямой* (пересечение двух плоскостей) имеют вид

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Определение угла между прямыми в пространстве сводится к определению угла между направляющими векторами этих прямых. Если $\vec{q}_1\{l_1;\ m_1;\ n_1\}$, $\vec{q}_2\{l_2;\ m_2;\ n_2\}$ – направляющие векторы, то

$$cos\,\varphi = \frac{(\vec{q}_1\vec{q}_2)}{|\vec{q}_1| \cdot |\vec{q}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Тогда *условие параллельности прямых* сводится к условию параллельности направляющих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности: $l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0$.

Определение угла между прямой и плоскостью сводится к определению угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости. Если $\vec{q}\{l;\ m;\ n\}$ – направляющий вектор прямой, $\vec{n}\{A;\ B;\ C\}$ – нормальный вектор плоскости, то

$$sin\,\varphi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Задание 17. Вектор $\vec{s}\,(8; \lambda; -4)$ параллелен прямой $\frac{x+3}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z+2}{-2}$. Найдите значение λ.

Решение. Вектор параллелен прямой, если он коллинеарен направляющему вектору прямой. Прямая задана каноническими уравнениями, из которых находим ее направляющий вектор $\vec{p}(4;\ 3; -2)$. Так как $\vec{s} \parallel \vec{p}$, то $\frac{8}{4} = \frac{\lambda}{3} = \frac{-4}{-2}$. Решая пропорцию, находим

$$8 \cdot 3 = 4 \cdot \lambda;\ \ 4\lambda = 24;\ \ \lambda = 6.$$

Ответ: $\lambda = 6$.

Задание 18. Найдите нормальный вектор плоскости $3x + 2y - 6z - 12 = 0$.

Решение. $\vec{n} = (A;\ B;\ C)$ – нормальный вектор плоскости, заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Искомая плоскость задана общим уравнением, где $A = 3$, $B = 2$, $C = -6$. Следовательно, $\vec{n} = (3;\ 2;\ -6)$ – ее нормальный вектор.

Ответ: $\vec{n} = (3;\ 2;\ -6)$.

Задание 19. Найдите z_0, если плоскость $x + 4y + 7z + 16 = 0$ проходит через точку $T(3; 4; z_0)$.

Решение. Плоскость проходит через точку, если при подстановке координат точки в уравнение плоскости получаем верное равенство.

Подставим координаты точки T в уравнение искомой плоскости:

$$3 + 4 \cdot 4 + 7z_0 + 16 = 0;\ \ 7z_0 = -35;\ \ z_0 = -5.$$

Ответ: –5.

Задание 20. Найдите уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку $M(4;\ -3;\ -1)$.

Решение. Уравнение плоскости, проходящей через ось Ox, имеет вид $By + Cz = 0$. Так как плоскость проходит через точку M, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставим их в уравнение $By + Cz = 0$. Получаем уравнение $-3B - C = 0$ с двумя неизвестными B и C. Выразим неизвестный коэффициент C через B: $C = -3B$. Подставив найденное значение C в уравнение $By + Cz = 0$, получим $By - 3Bz = 0$. После сокращения на B уравнение искомой плоскости принимает вид $y - 3z = 0$.

Ответ: $y - 3z = 0$.

§ 5. Поверхности второго порядка

Умный человек не обижается,
а делает выводы.
Агата Кристи

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению второй степени

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + a_{22}y^2 + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0,$$

где a_{ij}, a_i – действительные числа и a_{ij} одновременно не равны нулю.

Это уравнение называют общим уравнением второй степени.

Если не существует ни одной действительной точки, координаты которой удовлетворяют данному уравнению, то говорят, что это уравнение определяет мнимую поверхность.

Приведем канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Уравнение сферы с центром $C(x_0; y_0; z_0)$ и радиусом R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

Каноническое уравнение **эллипсоида**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Каноническое уравнение **гиперболоида**:
однопо́лостного:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1;$$

двупо́лостного:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1.$$

Каноническое уравнение **конуса второго порядка**:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Каноническое уравнение **параболоида**:
эллиптического:

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{при } p, q > 0;$$

гиперболического:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad \text{при } p, q > 0.$$

Каноническое уравнение **цилиндра второго порядка**:
эллиптического:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$$

гиперболического:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$$

параболического

$$y^2=2px.$$

Частными случаями поверхности второго порядка являются:
две пересекающиеся плоскости:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0;$$

две параллельные плоскости:

$$\frac{x^2}{a^2}=1;$$

две совпадающие плоскости:

$$\frac{x^2}{a^2}=0;$$

ось Oz:

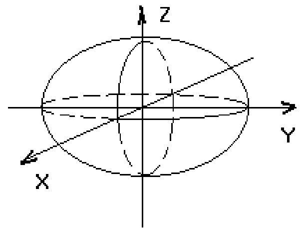
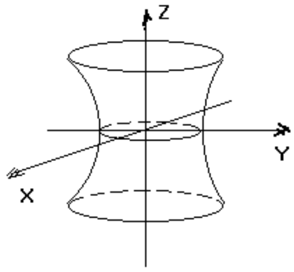
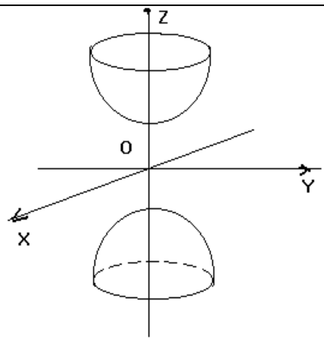
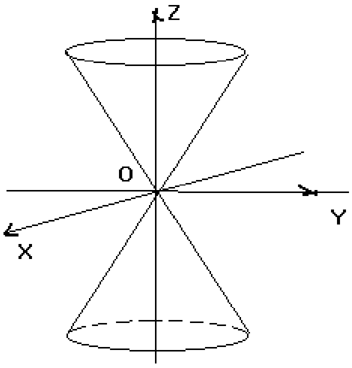
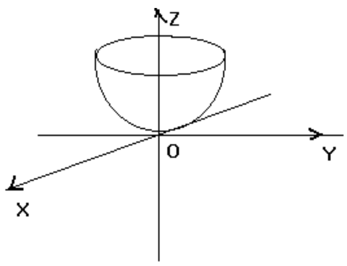
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0;$$

точка:

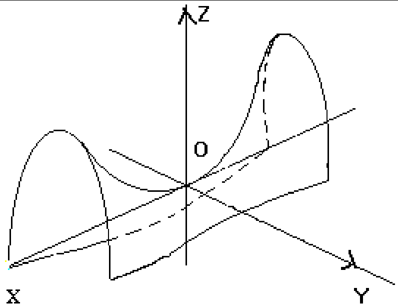
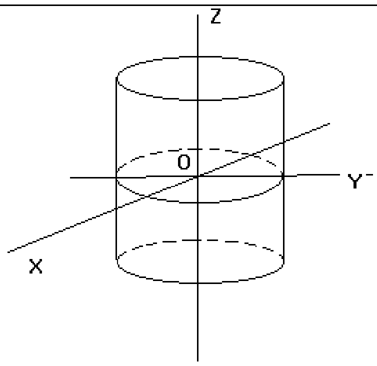
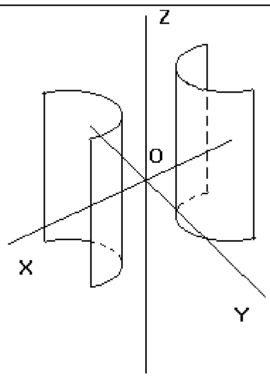
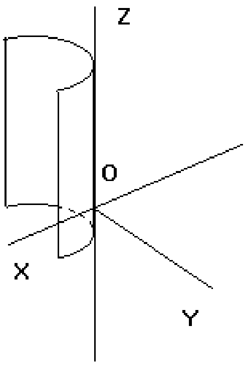
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0.$$

При построении поверхности второго порядка, заданной общим уравнением, его приводят к каноническому виду. Аналитически это происходит путем выделения полного квадрата по каждой переменной и заменой переменной. Геометрически выделение полного квадрата сводится к параллельному переносу системы координат вдоль соответствующей оси. Таким образом избавляются от слагаемых с коэффициентами a_1, a_2, a_3. Для избавления от слагаемых с коэффициентами a_{12}, a_{13}, a_{23} производят замену переменных. Геометрически производят поворот системы координат на определенный угол с целью перехода к канонической системе координат. В канонической системе в масштабе строят одну из поверхностей, представленных в табл. 1.

Таблица 1

Название поверхности	Каноническое уравнение	График	Частный случай
Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		$a = b = c$ – сфера; $a = b$ – эллипсоид вращения
Гиперболоиды однополостный	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		–
двуполостный	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		–
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		–
Параболоиды эллиптический	$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$ $p>0, \quad q>0$		$p = q$ – параболоид вращения

Окончание табл. 1

Название поверхности	Каноническое уравнение	График	Частный случай
гиперболический	$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$, $p > 0, \quad q > 0$		–
Цилиндры второго порядка эллиптический	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		–
гиперболический	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		–
параболический	$y^2 = 2px$		–

Задание 21. Приведите к каноническому виду уравнение
$$x^2+4y^2+z^2+2x-16y-6z=10.$$
Выясните, какую поверхность оно определяет.

Решение. Из условий a_{12}, a_{13}, $a_{23}=0$, a_{11}, a_{22}, $a_{33}>0$ следует, что перед нами эллипсоид или его частный случай.

Выделим в исходном уравнении $x^2+4y^2+z^2+2x-16y-6z=$ $=10$ полные квадраты:

1) сгруппируем отдельно члены, содержащие x, y, z:
$$(x^2+2x)+4(y^2-4y)+(z^2-6z)=10;$$
2) преобразуем двучлены, стоящие в скобках, в полные квадраты, прибавив к первому 1, ко второму 4, к третьему 9, а для того чтобы равенство при этом не нарушилось, увеличим и правую его часть на сумму $1+4\cdot4+9$:
$$(x^2+2x+1)+4(y^2-4y+4)+(z^2-6z+9)=10+1+16+9;$$
3) после применения формул квадрата суммы и квадрата разности получим
$$(x+1)^2+4(y-2)^2+(z-3)^2=36.$$
Разделим обе части на 36:
$$\frac{(x+1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{9}+\frac{(z-3)^2}{36}=1.$$
Получено уравнение эллипсоида вращения с центром в точке $A(-1;2;3)$ и полуосями $a=6$, $b=3$ и $c=6$.

Ответ: эллипсоид вращения с центром в точке $A(-1;\ 2;-3)$ и полуосями $a=6$, $b=3$ и $c=6$.

Задание 22. Определите вид поверхности, заданной уравнением
$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{4}=1.$$
Решение. Уравнение поверхности является каноническим уравнением однополостного гиперболоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, где $a=5$, $b=3$, $c=2$.

Ответ: однополостный гиперболоид.

Задание 23. Найдите радиус и координаты центра сферы
$$x^2+y^2+z^2-10x+4y-2z-19=0.$$
Решение

1-й способ

Уравнение сферы радиуса R с центром в точке $A(x_0;\ y_0;\ z_0)$ имеет вид
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2.$$
Выделим в исходном уравнении $x^2+y^2+z^2-10x+4y-2z-$ $-19=0$ полные квадраты:

1) сгруппируем отдельно члены, содержащие x, y, z:

$$(x^2 - 10x) + (y^2 + 4y) + (z^2 - 2z) = 19;$$

2) преобразуем двучлены, стоящие в скобках, в полные квадраты, прибавив к первому 25, ко второму 4, к третьему 1, а чтобы равенство при этом не нарушилось, увеличим и правую его часть на сумму 25 + 4 + 1:

$$(x^2 - 10x + 25) + (y^2 + 4y + 4) + (z^2 - 2z + 1) = 19 + 25 + 4 + 1;$$

3) после применения формул квадрата суммы и квадрата разности уравнение запишется так:

$$(x - 5)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 7^2.$$

Это равенство является уравнением сферы с центром в точке $A(5; -2;\ 1)$ и радиусом, равным 7.

2-й способ

Для уравнения вида $x^2 + y^2 + z^2 + mx + ny + pz + q = 0$ координаты центра сферы A и ее радиус R найдем по формулам:

$$A\left(-\frac{m}{2}; -\frac{n}{2}; -\frac{p}{2}\right); \quad R^2 = -q + \frac{m^2}{4} + \frac{n^2}{4} + \frac{p^2}{4}.$$

Для уравнения $x^2 + y^2 + z^2 - 10x + 4y - 2z - 19 = 0$ имеем:

$$A\left(-\frac{-10}{2}; -\frac{4}{2}; -\frac{-2}{2}\right) = (5;\ -2;\ 1); \quad R^2 = -(-19) + \frac{(-10)^2}{4} + \frac{4^2}{4} + \frac{(-2)^2}{4} =$$

$$= 19 + 25 + 4 + 1 = 49, \quad R = 7.$$

Ответ: $R = 7$, $A(5; –2; 1)$.

Задание 24. Прямофокусная спутниковая антенна имеет диаметр D = 180 см и глубину h = 29,7 см. Определите, на каком расстоянии от дна антенны (вершины параболоида вращения) необходимо установить конвертер.

Решение. Конвертер устанавливают в фокусе параболоида вращения.

Каноническое уравнение параболоида вращения имеет вид

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{p} = 2z.$$

В частности, точка $A\left(\frac{D}{2};\ 0;\ h\right)$ принадлежит параболоиду. Подставив в уравнение параболоида координаты точки A, найдем p:

$$p = \frac{D^2}{8h}.$$

Фокус параболоида вращения имеет координаты $F\left(0;\ 0;\ \frac{p}{2}\right)$ или $F\left(0;\ 0;\ \frac{D^2}{16h}\right)$.

Следовательно, конвертер необходимо установить на расстоянии

$$f = \frac{D^2}{16h} = \frac{180^2}{16 \cdot 29{,}7} \approx 68{,}2\ .$$

Ответ: 68,2 см.

§ 6. Задания для самостоятельного решения

6.1. Базовые задания

1. Даны точки $A(3; -1)$ и $B(2; 1)$. Найдите координаты точки C, симметричной точке A относительно точки B.

2. Даны точки $A(3; -1)$ и $B(-1; 2)$. Ось Ox делит отрезок AB в отношении λ. Найдите λ.

3. Точка $M(3; -4)$ является серединой отрезка AB. Найдите координаты точки B, если $A(-2; 2)$.

4. Даны четыре последовательные вершины четырехугольника $A(1{,}8; 4{,}1)$, $B(9{,}8; 5{,}1)$, $C(9; 1{,}3)$, $D(0{,}3; 2{,}6)$. Определите площадь четырехугольника.

5. Найдите каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; -5)$ параллельно прямой $-2x + y - 3 = 0$.

6. Найдите угол между прямыми $3x - 4y + 10 = 0$ и $8x + 6y - 1 = 0$.

7. С помощью преобразования параллельного переноса осей координат приведите уравнение кривой $x^2 - 2y^2 - 6x - 8y - 3 = 0$ к каноническому виду.

8. Определите тип кривой второго порядка $6x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x + 2y = 0$.

9. Найдите положительное значение x, при котором расстояние от точки $M(x; 1; 0)$ до плоскости $6x - 2y + 3z + 10 = 0$ равно 2.

10. Найдите расстояние от точки $M(2; 1; 1)$ до плоскости $4x - 3z - 15 = 0$.

11. Определите значения m и n, при которых прямая $\frac{x-2}{m} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-7}{-3}$ и плоскость $3x - 2y + nz + 5 = 0$ перпендикулярны.

12. Определите тип уравнения поверхности второго порядка $6x^2 + 3y^2 + 4z^2 - 36x + 6y - 16z + 73 = 0$.

13. Постройте тело, ограниченное поверхностями $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$, $z = 0$.

6.2. Профильные задания

1. Используя рулетку и веревку, постройте прямоугольник 4×6 м. *При решении воспользуйтесь пифагоровой тройкой*.

2. В ясный день, используя рулетку, определите высоту опоры ЛЭП. *При решении воспользуйтесь подобием треугольников*.

3. Луч света, пройдя через точку $A(2;\ 3)$ под углом α к оси Ox, отразился от нее и прошел через точку $B(-10;\ 6)$. Найти угол α.

4. Используя линейку и веревку, нарисуйте эллипс с полуосями 5 и 3 см. *Воспользуйтесь определением эллипса.*

5. Стержень длиной 30 см, шарнирно закрепленный своими концами на перпендикулярных прямых, скользит по этим прямым. На стержне на расстоянии 10 см от одного из концов закреплен карандаш. Определите тип кривой, которая описывается карандашом, и ее параметры.

6. Трос, подвешенный за два конца на одинаковой высоте, в первом приближении имеет форму дуги параболы. Расстояние между точками крепления 10 м. Глубина прогиба троса на расстоянии 1 м от точки крепления равна 9 см. Определите глубину прогиба троса посередине между креплениями.

7. Материальная точка движется равномерно и прямолинейно со скоростью 14 м/с в направлении $\vec{n}\{2;\ 3;\ 6\}$. В начальный момент времени точка находится в начале координат. Найдите абсциссу материальной точки через 3 с.

8. Материальная точка движется равномерно и прямолинейно со скоростью 13 м/с перпендикулярно плоскости $3x + 4y + 12z + 26 = 0$. В начальный момент времени точка находится в начале координат. Найдите ординату материальной точки через 2 с.

9. Односкатная крыша опирается на четыре столба с координатами $A(3;\ 0;\ 3)$, $B(0;\ -1;\ 4)$, $C(0;\ 4;\ 3{,}5)$, $D(4;\ 5;\ h)$. Найдите высоту четвертого столба.

10. Односкатная крыша опирается на четыре столба с координатами $A(4;\ 0;\ 3)$, $B(0;\ 0;\ 4)$, $C(0;\ 5;\ 5)$, $D(x;\ y;\ h)$. В точке $E(0;\ 1;\ 0)$ помещен источник света. Найдите сумму координат наиболее освещенной точки крыши.

11. Рефлектор офсетной спутниковой антенны имеет размеры 84x91 см с фокусным расстоянием $f = 54$ см. Рефлектор получается при пересечении параболоида вращения и цилиндра, оси симметрии которых параллельны. Определите расстояние между осями симметрии параболоида вращения и цилиндра при изготовлении таким способом заготовки рефлектора офсетной спутниковой антенны.

12. Рефлектор офсетной спутниковой антенны получается при пересечении параболоида вращения $16z = x^2 + y^2$ плоскостью $2x + y + 4z - 11 = 0$. Найдите наименьший диаметр рефлектора. Сделайте чертеж.

13. Болванку цилиндрической формы $x^2 + y^2 = 4$ разрезали двумя плоскостями $z = 0$ и $4x + 3y + z = 15$. Найдите наибольшую высоту цилиндрической заготовки. Сделайте чертеж.

14. Плоскость $x + 4y + 8z = 27$ отсекает от шара радиуса 5 с центром в начале координат шаровой сегмент. Найдите радиус основания шарового сегмента. Сделайте чертеж.

15. Плоскость $2x + 3y + 6z = 21$ отсекает от конуса второго порядка $z^2 = x^2 + y^2$ наклонный конус. Найдите высоту наклонного конуса. Сделайте чертеж.