ГЛАВА 4
ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Понятие множества, способы задания множества

Экзамены – единственная возможность
знать хоть что-то хотя бы несколько дней.
Ж. Элгози

Основные идеи теории множеств были сформулированы впервые в конце XIX века немецким математиком Георгом Кантором (1845–1918). На рубеже XIX и XX веков выяснилось, что традиционная логика в теории бесконечных и даже конечных множеств приводит к противоречиям (парадоксам). Выходом из создавшейся ситуации стало создание аксиоматики теории множеств, где фиксировались не только свойства объектов, но и допустимые логические средства.

Понятие множества так же неопределимо, как понятие точки и прямой в геометрии. Обычно множество понимают как совокупность, собрание некоторых различаемых между собой объектов, мыслимое как единое целое.

Именно из-за того, что элементами множества могут быть объекты самой разной природы, понятия и теоремы теории множеств обладают очень большой общностью.

Множество обозначают прописными буквами латинского алфавита (A, B, C, …), для обозначения элементов множества используют строчные буквы (a, b, c, …).

Если объект a является элементом множества A, то говорят, что a принадлежит A: $a \in A$. В противном случае говорят, что a не принадлежит A: $a \notin A$.

Множества, состоящие из конечного числа элементов, называют *конечными*, из бесконечного числа элементов – *бесконечными* (в последнем случае имеют в виду, что после того как из множества изымается любое число элементов сколько угодно раз, в нем все равно будут оставаться элементы).

В математике хорошо известны бесконечные множества:
натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$;
целых чисел $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$;
рациональных чисел Q;
действительных чисел R;
комплексных чисел C.

Если каждый элемент множества A является элементом множества B, то множество A называют *подмножеством* множества B и обозначают $A \subseteq B$.

Если множество A является подмножеством B и B не является подмножеством A, то множество A является строгим (собственным) подмножеством B и обозначается $A \subset B$.

Например, $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Очевидными подмножествами множества A являются пустое множество $\varnothing$ и само множество A.

Множества A и B являются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е. $A = B$, в противном случае $A \neq B$.

Множества могут быть заданы следующими способами:

1. Перечислением элементов (списком): $A = \{a, b, c\}$.

Порядок элементов неважен, т. е. $\{a, b, c\}$ и $\{b, a, c\}$ – это одно и то же множество. В множестве все элементы различны: $\{1, 2, 1, 2, 4\}$ – это множество $\{1, 2, 4\}$, состоящее из трех элементов – 1, 2, 4.

Не любое конечное множество можно задать перечнем его элементов. Например, если рассматривать множество деревьев в лесу, то нужно четко определить, какие именно растения мы называем деревьями; идет ли речь обо всех деревьях, которые существовали и будут существовать в этом лесу или только за конкретный период времени (а как быть со спиленными за это время деревьями?).

2. Указанием некоторого характерного свойства (характеристического предиката), которым обладают только элементы этого множества:

$$A = \{x \mid P(x)\}.$$

Как правило, множество не является элементом самого себя: множество всех котов не есть кот, множество всех треугольников не есть треугольник.

§ 2. Теоретико-множественные операции, диаграммы Венна

Ученик никогда не превзойдет учителя,
если видит в нем образец, а не соперника.
В.Г. Белинский

Над множествами можно проводить определенные операции, получая при этом новые множества.

Основные операции, их смысл, обозначения, геометрическая интерпретация в виде диаграмм Венна, свойства приведены в табл. 2.

Множества, полученные применением рассмотренных операций, можно задать символически указанием свойств их элементов:

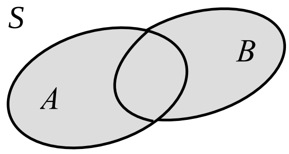
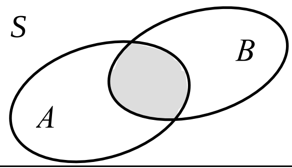
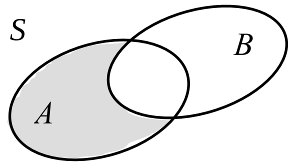
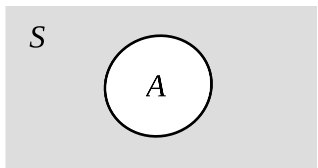
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$; $A \cap B = \{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$;

$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ и $x \notin B\}$; $\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

$S \setminus A = \bar{A}$ – абсолютное дополнение множества A.

Порядок выполнения операций: дополнение, пересечение, объединение, разность. Для изменения этого порядка в выражениях используют круглые скобки.

Таблица 2

Название операции	Обозначение	Определение	Диаграмма Венна
Объединение множеств A, B	$C = A \cup B$	Множество C, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A или B	
Пересечение множеств A, B	$C = A \cap B$	Множество C, состоящее из элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B	
Разность множеств A, B	$C = A \setminus B$	Множество C, состоящее из элементов множества A, не входящих в множество B	
Дополнение множества A	$C = \bar{A} = S \setminus A$	Множество C, состоящее из элементов универсального множества S, не входящих в множество A	

§ 3. Функции: основные понятия и определения

Великая наука жить счастливо состоит
в том, чтобы жить только в настоящем.
Пифагор

Переменная величина и функция – важнейшие понятия современной математики.

Пусть заданы два множества действительных чисел – X и Y. **Функцией называется** правило, по которому каждому числу x из множества X ставится в соответствие определенное единственное число y из множества Y. Переменная x называется независимой переменной или аргументом, переменную y называют зависимой переменной или функцией. Множество X называется *областью определения* данной функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x \in X$, называется *областью значений* данной функции и обозначается $E(f)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Для функций, области определения которых симметричны относительно начала координат (т. е. с числом x область определения содержит и число $(-x)$), вводятся понятия четности и нечетности.

Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси ординат (оси Oy).

Функция $y = f(x)$ называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для всех x из области определения функции справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Классификация функции одного аргумента:

1. *Целая рациональная функция или многочлен*

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где a_0, a_1, …, a_{n-1}, a_n – постоянные числа, называемые коэффициентами; n – целое неотрицательное число, называемое степенью многочлена.

2. *Дробная рациональная функция* представляется в виде частного от деления двух целых рациональных функций:

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

3. *Иррациональная функция* содержит возведение в степень с рациональным нецелым показателем. Например: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{3x+\sqrt[4]{x}}$.

Перечисленные виды алгебраических функций образуют класс явных алгебраических функций. В общем случае *алгебраической функцией* называется любая функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ – некоторые многочлены от x.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется *трансцендентной.*

Например, $shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ – гиперболический синус; $chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ – гиперболический косинус; $thx = \frac{shx}{chx}$ – гиперболический тангенс; $cthx = \frac{chx}{shx}$ – гиперболический котангенс.

Основные элементарные функции имеют области определения:

1) *степенная функция* $y = x^n$, или $y = \sqrt[2n+1]{x^m}$, определена при любых x; $y = \sqrt[2n]{x^m}$ определена в интервале $[0; +\infty)$ (n, m – натуральные числа);

2) *показательная функция* $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена при любых x;

3) *логарифмическая функция* $y = log_a\, x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена в интервале $(0; +\infty)$;

4) *тригонометрические функции* $y = sinx$, $y = cosx$ определены при любых x; $y = tgx$ определена при $x \neq (2k + 1)\pi/2$; $y = ctgx$ – при $x \neq k\pi$;

5) *обратные тригонометрические функции* $y = arcsinx$, $y = arccosx$ определены на отрезке $[-1; 1]$; $y = arctgx$, $y = arcctgx$ – при любых x.

Способы задания функции:

аналитический (с помощью формулы);

табличный (с помощью таблицы);

графический (с помощью графика).

Функция называется *явной*, если она задана формулой, правая часть которой не содержит зависимой переменной. Например, $y = x + 1$.

Функция y от аргумента x называется *неявной*, если она задана уравнением $F(x, y) = 0$, не разрешенным относительно зависимой переменной. Например, $x^2 + y^2 = 1$.

Под *окрестностью* точки x_0 понимают любой интервал, содержащий эту точку.

При сравнении значения функции f в некоторой фиксированной точке x_0 со значением этой функции в точке x, лежащей в окрестности точки x_0, используют понятия «приращение аргумента» и «приращение функции».

Пусть x – произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности точки x_0. Разность $x - x_0$ называется приращением независимой переменной (или аргумента) в точке x_0 и обозначается Δx ($\Delta x = x - x_0$).

Придадим аргументу x приращение Δx. Вследствие этого функция $y = f(x)$ изменится на величину $f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Эта разность называется приращением функции f в точке x_0, соответствующим приращению Δx, и обозначается Δf, т. е. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Задание 1. Найдите приращение Δy функции $y = -2x^3$ при изменении значения аргумента от -1 до 2.

Решение. Используя определение приращения функции $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$, имеем:

$$\Delta y = y(2) - y(-1) = -2 \cdot 2^3 - (-2(-1)^3) = -16 - 2 = -18.$$

Ответ: -18.

Задание 2. Найдите область значений функции $y = \sqrt{x^2-3x-4}+2$.

Решение. Областью значений функции $g(u)=\sqrt{u}$ является промежуток $[0;+\infty)$, если $u\in[0;+\infty)$. Поэтому найдем сначала область значений подкоренной функции $f(x)=x^2-3x-4$. Выделив из квадратного трехчлена полный квадрат, получим:

$$f(x)=x^2-3x-4=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2-4=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-6\frac{1}{4}.$$

Первое слагаемое при всех значениях x является неотрицательным числом, поэтому функция принимает значения, большие или равные $-6\frac{1}{4}$. Следовательно, областью значений функции *f*(*x*) является промежуток $\left[-6\frac{1}{4};\infty\right)$, который содержит промежуток $[0;+\infty)$. Поэтому при всех допустимых значениях переменной x $\sqrt{x^2-3x-4}\geq 0$, $\sqrt{x^2-3x-4}+2\geq 0+2$. Следовательно, область значений исходной функции – промежуток $[2;\ \infty)$.

Ответ: $y\in[2;\ \infty)$, или $y\geq 2$.

Задание 3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{x^2+x-6}-3.$$

Решение. Функция будет определена, если определено каждое слагаемое. Второе слагаемое не зависит от *x*, поэтому определено при всех значениях переменной *x*. Первое слагаемое $\sqrt{x^2+x-6}$ определено, если подкоренное выражение неотрицательно, т. е. $x^2+x-6\geq 0$. Для решения неравенства воспользуемся методом интервалов. Найдем нули функции $f(x)=x^2+x-6$:

$$f(x)=0,\ x^2+x-6=0;\ x_1=-3;\ x_2=2.$$

Используя школьные знания, получим $f(x)=(x+3)(x-2)$. Отметим на числовой прямой нули функции. Последние разбивают числовую прямую на промежутки, в каждом из которых функция сохраняет знак. Выясним знак функции $f(x)=x^2+x-6$ в «крайнем правом» промежутке $(2;+\infty)$. Для этого достаточно выяснить знак функции при каком-либо значении аргумента из этого промежутка, например при $x=5$: $f(5)=(5+3)\cdot(5-2)=8\cdot 3>0$. Теперь воспользуемся свойством чередования знаков функции (рис. 14).

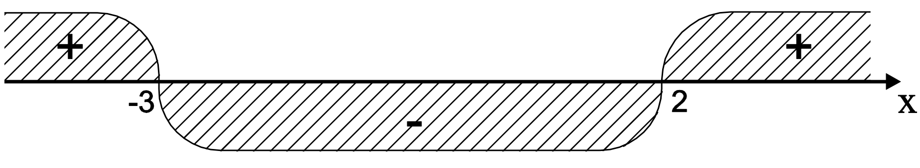


Рис. 14

Следовательно, область определения функции $y = \sqrt{x^2 + x - 6} - 3$ состоит из промежутков $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$.

§ 4. Интерполяция и экстраполяция

Надежда – хороший завтрак, но плохой ужин.
Ф. Бэкон

В инженерной практике получил распространение табличный способ задания функций, при котором для конечного множества значений аргумента $x = x_0, x_1, \ldots, x_n$ известны полученные экспериментально (в результате измерений или наблюдений) соответствующие значения функции $f(x)$: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, …, $f(x_n) = y_n$. Аналитическое выражение функции $f(x)$ или ее параметры неизвестны, что не позволяет вычислять ее значение в промежуточных точках $x \neq x_i$ $(i = \overline{0, n})$. Для отыскания этих значений строят аппроксимирующую (приближающую) функцию $F(x)$, совпадающую в точках x_i с экспериментально полученными значениями y_i, $F(x_i) = y_i$ $(i = \overline{0, n})$. Построение функции $F(x)$ называют интерполированием.

Интерполирование применяют и в тех случаях, когда аналитический вид функции $f(x)$ известен, но сложен и требует большого объема вычислений для определения отдельных значений функции. Замена $f(x)$ аппроксимирующей функцией $F(x)$ позволяет упростить вычисления; при этом $F(x)$ строится по небольшому числу значений $f(x)$.

Различают *интерполирование*, когда x находится между x_0 и x_n, и *экстраполирование*, когда x находится вне отрезка $[x_0, x_n]$. Если при этом $x < x_0$, то речь идет об экстраполировании назад, при $x > x_n$ используют экстраполирование вперед.

4.1. Линейная интерполяция с равноотстоящими узлами

В случае равностоящих узлов $x_0, x_1, \ldots, x_n$ с шагом интерполяции h в задачах *интерполирования* и *экстраполирования* используют интерполяционные полиномы Ньютона, Стирлинга, Бесселя.

Если промежуточное значение x попадает в интервал $\left(x_i + \frac{h}{4}; \, x_i + \frac{3h}{4}\right)$, то в качестве линейной интерполяции применяют уравнение прямой $y = k(x - x_i) + y_i$ с угловым коэффициентом $k = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$. Прямая проходит через два интерполяционных узла: $(x_i; \, y_i)$ и $(x_{i+1}; \, y_{i+1})$. В полиноме Бесселя линейная интерполяция имеет вид

$$f(x) \approx P_{1B}(x) = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right)\Delta y_i,$$

где $q = \frac{x - x_i}{h}$; $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$.

Если промежуточное значение x попадает в интервал $\left(x_i - \frac{h}{4};\ x_i + \frac{h}{4}\right)$ и не попадает в интервалы $\left(x_0;\ x_0 + \frac{h}{4}\right)$ и $\left(x_n - \frac{h}{4};\ x_n\right)$, то в качестве линейной интерполяции используют уравнение прямой $y = k(x - x_i) + y_i$ с угловым коэффициентом $k = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$. Прямая проходит через один интерполяционный узел (x_i; y_i). В полиноме Стирлинга линейная интерполяция имеет вид

$$f(x) \approx P_{1S}(x) = y_i + q \cdot \frac{\Delta y_{i-1} + \Delta y_i}{2}.$$

Если промежуточное значение x попадает в интервал $\left(x_0;\ x_0 + \frac{h}{4}\right)$, применяют первую интерполяционную формулу Ньютона:

$$f(x) \approx P_{1N_1}(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

Если промежуточное значение x попадает в интервал $\left(x_n - \frac{h}{4};\ x_n\right)$, используют вторую интерполяционную формулу Ньютона:

$$f(x) \approx P_{1N_2}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1}.$$

Линейные интерполяционные формулы Ньютона и Бесселя совпадают.

Задание 4. Определите значение функции, заданной таблицей, в точках x = 0,1; x = 1,1; x = 1,4, используя линейную интерполяцию:

i	0	1	2	3
x_i	0	1	2	3
y_i	1	3	15	43

Решение. Точка x = 0,1 принадлежит первому интервалу. Воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона:

$$y(0{,}1) = y_0 + q\Delta y_0 = 1 + \frac{0{,}1 - 0}{1}(3 - 1) = 1{,}2.$$

Точка x = 1,1 находится вблизи узла x_1 = 1. Воспользуемся формулой

$$y = \frac{y_2 - y_0}{2h}(x - x_1) + y_1.$$

Подставив численные значения, получим

$$y(1{,}1) = \frac{15 - 1}{2 \cdot 1}(1{,}1 - 1) + 3 = 3{,}7.$$

Точка x = 1,4 находится вблизи середины интервала (1; 2). Найдем значение функции

$$y(1{,}4) = 3 + \frac{1{,}4 - 1}{1}(15 - 3) = 3 + 4{,}8 = 7{,}8.$$

Ответ: 1,2; 3,7; 7,8.

4.2. Интерполяция третьего порядка с равноотстоящими узлами

Первая интерполяционная формула Ньютона третьего порядка имеет вид

$$P_{3N_1}(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!}\Delta^3 y_0.$$

Эта формула используется для интерполирования функции вблизи справа от точки x_0 (интерполирование вперед).

Вторая интерполяционная формула Ньютона третьего порядка

$$P_{3N_2}(x) = y_n + q\Delta y_{n-1} + \frac{q(q+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{3!}\Delta^3 y_{n-3}$$

используется для интерполирования функции вблизи слева от точки x_n (интерполирование назад).

Как первая, так и вторая интерполяционные формулы Ньютона могут быть использованы для *экстраполяции* функции, т. е. для нахождения значений функции вне таблицы.

Если $x < x_0$ и близко к x_0, то применяют первую интерполяционную формулу Ньютона.

Если $x > x_n$ и близко к x_n, применяют вторую интерполяционную формулу Ньютона.

Если точка x находится в середине таблицы и вблизи узла x_i интерполяции (рис. 15), то используется *интерполяционная формула Стирлинга третьего порядка:*

$$P_{3S}(x) = y_i + q \cdot \frac{\Delta y_{i-1} + \Delta y_i}{2} + \frac{q^2}{2!} \cdot \Delta^2 y_{i-1} + \frac{q(q^2-1)}{3!} \cdot \frac{\Delta^3 y_{i-2} + \Delta^3 y_{i-1}}{2},$$
$$|q| < 0{,}25.$$

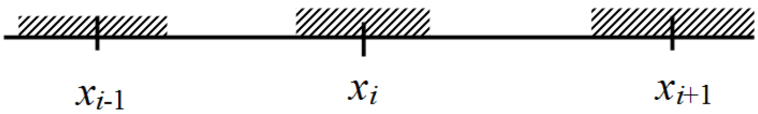


Рис. 15

Если точка x находится в середине таблицы и вблизи середины интервала $[x_i;\ x_{i+1}]$ (рис. 16), то применяется *интерполяционная формула Бесселя третьего порядка:*

$$P_{3B}(x) = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} + \left(q - \frac{1}{2}\right)\Delta y_i + \frac{q(q-1)}{2!} \cdot \frac{\Delta^2 y_{i-1} + \Delta^2 y_i}{2} +$$
$$+ \frac{\left(q - \frac{1}{2}\right)q(q-1)}{3!} \cdot \Delta^3 y_{i-1}, \quad \frac{1}{4} < q < \frac{3}{4}.$$

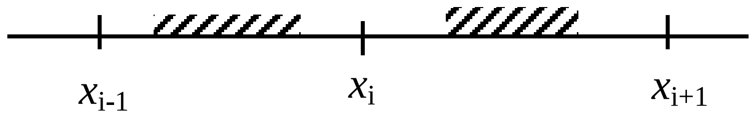


Рис. 16

Частный случай формулы Бесселя при $q = 0{,}5$:

$$P_{2B^*} = \frac{y_i + y_{i+1}}{2} - \frac{\Delta^2 y_{i-1} + \Delta^2 y_i}{16}.$$

Задание 5. Определите значение функции, заданной таблицей из задания 4 (см. с. 78), в точках x = 0,1; x = 1,1 и x = 1,4, используя интерполяцию до третьего порядка.

Решение. Составим таблицу конечных разностей:

$x_0 = 0$	$y_0 = 1$	$\Delta y_0 = 2$	$\Delta^2 y_0 = 10$	$\Delta^3 y_0 = 6$
$x_1 = 1$	$y_1 = 3$	$\Delta y_1 = 12$	$\Delta^2 y_1 = 16$	
$x_2 = 2$	$y_2 = 15$	$\Delta y_2 = 28$		
$x_3 = 3$	$y_3 = 43$			

Точка x = 0,1 принадлежит первому интервалу, q = 0,1. Воспользуемся первой интерполяционной формулой Ньютона третьего порядка:

$$y(0{,}1) = 1 + 0{,}1 \cdot 2 + \frac{0{,}1 \cdot (-0{,}9)}{2} \cdot 10 + \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 1{,}9}{6} \cdot 6 =$$
$$= 1 + 0{,}2 - 0{,}45 + 0{,}171 = 0{,}921.$$

Точка x = 1,1 находится вблизи узла x_1 = 1. Мы можем воспользоваться либо интерполяционной формулой Стирлинга второго порядка:

$$y(1{,}1) = 3 + 0{,}1 \cdot \frac{2 + 12}{2} + \frac{0{,}01}{2} \cdot 10 =$$
$$= 3 + 0{,}7 + 0{,}05 = 3{,}75,$$

либо интерполяционной формулой Бесселя третьего порядка:

$$y(1{,}1) = \frac{3 + 15}{2} - 0{,}4 \cdot 12 + \frac{0{,}1 \cdot (-0{,}9)}{2} \cdot \frac{10 + 16}{2} + \frac{0{,}4 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}{6} \cdot 6 =$$
$$= 9 - 4{,}8 - 0{,}585 + 0{,}036 = 3{,}651.$$

Точка x = 1,4 находится вблизи середины интервала (1; 2), q = 0,4. Найдем значение функции с помощью интерполяционной формулы Бесселя третьего порядка:

$$y(1{,}4) = \frac{3+15}{2} - 0{,}1 \cdot 12 + \frac{0{,}4 \cdot (-0{,}6)}{2} \cdot \frac{10+16}{2} +$$
$$+ \frac{0{,}1 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}{6} \cdot 6 = 9 - 1{,}2 - 1{,}56 + 0{,}024 =$$
$$= 6{,}264.$$

Ответ: 0,921; 3,75 или 3,651; 6,264.

§ 5. Числовые последовательности

Чтоб удивиться, достаточно одной минуты; чтобы сделать удивительную вещь, нужны многие годы.

Вольтер, Гельвеций

Числовые последовательности представляют собой бесконечные множества чисел.

Под *числовой последовательностью* a_1, a_2, …, a_n, … понимается функция $a_n = f(n)$, заданная на множестве натуральных чисел $N = \{1, 2, \ldots\}$.

Числа a_1, a_2, …, a_n, … называются *членами* последовательности: a_1 – первым, a_2 – вторым, a_n – n-м (энным) или *общим членом* последовательности, а число n – его номером. Последовательности кратко обозначают $\{a_n\}$.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее элемента. Формула $a_n = f(n, a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k})$, позволяющая выразить n-й член последовательности через k предыдущих членов и номер члена последовательности, вместе с заданными первыми k членами, называется *рекуррентной* (k – порядок рекуррентного соотношения).

Для любого $\varepsilon > 0$ ε-окрестностью числа a называется интервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.

Число A называется *пределом последовательности* a_n, если для любого положительного числа ε существует положительное число $N(\varepsilon)$, такое, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|a_n - A| < \varepsilon$. Используя логические символы, определение можно записать в виде $\forall\varepsilon > 0\ \exists N > 0$ $\forall n > N\ |a_n - A| < \varepsilon$.

Предел последовательности обозначается

$$\lim_{n\to\infty} a_n = A.$$

Задание 6. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_n = 3a_{n-1} - 4$, $a_1 = 3$. Найдите четвертый член этой последовательности.

Решение. Из рекуррентной формулы при $n = 1; 2; 3$ находим:

$$a_2 = 3a_1 - 4 = 3 \cdot 3 - 4 = 5,\ a_3 = 3a_2 - 4 = 3 \cdot 5 - 4 = 11,$$
$$a_4 = 3a_3 - 4 = 3 \cdot 11 - 4 = 29.$$

Ответ: $a_4 = 29$.

Задание 7. Установите соответствие между числовой последовательностью

1) $4,\ \ 7,\ \ 12,\ \ 19, \ldots$ 2) $1,\ \ 10,\ \ 25,\ \ 46, \ldots$ 3) $3,\ \ 6,\ \ 11,\ \ 18, \ldots$

и формулой ее общего члена

$A)\ a_n = 3n^2 - 2;$ $B)\ a_n = n^2 + 3;$ $C)\ a_n = 3n^2 + 2;$

$D)\ a_n = 3n^2 - 1;$ $E)\ a_n = n^2 + 2.$

Решение. Члены a_1 заданных последовательностей различны, поэтому найдем первый член a_1 в каждом случае:

$A)\ a_1 = 3 \cdot 1^2 - 2 = 1;$ $B)\ a_1 = 1^2 + 3 = 4;$ $C)\ a_1 = 3 \cdot 1^2 + 2 = 5;$

$D)\ a_1 = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2;$ $E)\ a_1 = 1^2 + 2 = 3.$

Используя полученные результаты, устанавливаем соответствие:

$$1 - B;\ \ 2 - A;\ \ 3 - E.$$

Если общий член числовой последовательности содержит многочлен, то для его нахождения составляют таблицу конечных разностей:

1			2			3		
x_i	Δ	Δ^2	x_i	Δ	Δ^2	x_i	Δ	Δ^2
4	3	2	1	9	6	3	3	2
7	5	2	10	15	6	6	5	2
12	7		25	21		11	7	
19			46			18		

Для первого примера конечная разность второго порядка постоянна и равна двум. Поэтому общий член содержит слагаемое n^2. Для второго примера конечная разность второго порядка постоянна и равна шести. Поэтому общий член содержит слагаемое $3n^2$. Аналогично для третьего примера общий член содержит слагаемое n^2.

Ответ: $1 - B;\ \ 2 - A;\ \ 3 - E.$

Задание 8. Установите формулу общего члена числовой последовательности 4, 7, 14, 25, …

Решение. Составим таблицу конечных разностей:

x_i	4	7	14	25
Δ	3	7	11	
Δ^2	4	4		

Конечная разность второго порядка постоянна и равна четырем. Поэтому общий член содержит слагаемое $2n^2$.

При $n = 1$ $a_n - 2n^2 = 2$; при $n = 2$ $a_n - 2n^2 = -1$; при $n = 3$ $a_n - 2n^2 = -4$.

Последовательные разности уменьшаются на три. Поэтому общий член содержит линейное слагаемое $(-3n)$. При $n = 1$ $a_n - (2n^2 - 3n) = 5$.

Следовательно, общий член числовой последовательности

$$a_n = 2n^2 - 3n + 5.$$

Ответ: $a_n = 2n^2 - 3n + 5$.

Задание 9. Найдите общий член числовой последовательности

$$\frac{2}{3}, \frac{4}{8}, \frac{6}{13}, \dots$$

Решение. Числитель первого члена числовой последовательности равен двум, а числитель каждого последующего члена увеличивается на две единицы, т. е. равен $2n$.

Знаменатель первого члена числовой последовательности равен трем, а знаменатель каждого последующего члена увеличивается на пять единиц, т. е. равен $5n - 2$. Общий член числовой последовательности имеет вид

$$a_n = \frac{2n}{5n-2}.$$

Выполним проверку:

$$a_1 = \frac{2}{3}, \ a_2 = \frac{4}{8}, \ a_3 = \frac{6}{13} \dots$$

Ответ: $a_n = \frac{2n}{5n-2}$.

Задание 10. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_n = 5a_{n-1}$, $a_1 = 3$. Найдите общий член этой последовательности.

Решение. Каждый последующий член последовательности получается из предыдущего умножением его на пять единиц (геометрическая прогрессия):

$$a_n = 3 \cdot 5^{n-1}.$$

Ответ: $a_n = 3 \cdot 5^{n-1}$.

Задание 11. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_n = a_{n-1} + 3$, $a_1 = 2$. Найдите общий член этой последовательности.

Решение. Каждый последующий член последовательности получается из предыдущего прибавлением трех единиц (арифметическая прогрессия):

$$a_n = 3n - 1.$$

Ответ: $a_n = 3n - 1$.

Задание 12. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_n = 5a_{n-1} + 2$, $a_1 = 3$. Найдите общий член этой последовательности.

Решение. Каждый последующий член последовательности получается из предыдущего умножением его на пять единиц, что дает слагаемое $3 \cdot 5^{n-1}$, и прибавлением двух единиц с последующим умножением на пять, что дает сумму геометрической прогрессии:

$$a_n = 3 \cdot 5^{n-1} + \frac{2 \cdot (5^{n-1} - 1)}{5 - 1} = \frac{7 \cdot 5^{n-1} - 1}{2}.$$

Ответ: $a_n = \frac{7 \cdot 5^{n-1} - 1}{2}$.

§ 6. Пределы функции

Ученый без трудов – дерево без плодов.
Саади

Предел – фундаментальное понятие, на котором базируются другие основные понятия математического анализа: непрерывность, производная, интеграл.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Определение предела по Коши. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Используя логические символы, определение можно записать в виде

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \neq x_0, |x - x_0| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Предел функции обозначается

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

Аналогично число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к ∞, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число $M(\varepsilon)$, что для всех $|x| > M(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется пределом слева функции $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число $\delta(\varepsilon)$, что для всех x, удовлетворяющих условию $x_0 - \delta < x < x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Функция $y = f(x)$ имеет предел в точке тогда и только тогда, когда в этой точке существуют пределы как справа, так и слева и они равны.

Непосредственное вычисление пределов опирается в основном не на определение предела, а на использование его свойств, вытекающих из определения.

Рассмотрим основные свойства пределов:

1. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x).$$

2. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0}(f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x).$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т. е.

$$\lim_{x \to x_0}(cf(x)) = c \lim_{x \to x_0} f(x).$$

4. Если существует предел функции $f(x)$ при $x \to x_0$, то

$$\lim_{x \to x_0}(f(x))^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n,$$

где n – натуральное число.

5. Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to x_0$, причем предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}.$$

Если функция является элементарной, а предельное значение аргумента x_0 принадлежит ее области определения, то вычисление предела сводится к простой подстановке предельного значения аргумента, т. е.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

При вычислении пределов часто используют **два замечательных предела:**

$$1) \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ или } \lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin x} = 1;$$

$$2) \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e, \text{ или } \lim_{x \to \pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

и их следствия:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a; \ \lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e = \frac{1}{\ln a}; \ \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a.$$

Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенностей вида (1^∞), а остальные – для неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Вычисление пределов значительно упрощается при использовании эквивалентности бесконечно малых.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to x_0$, если $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших функций:

1) если $f(x) \neq 0$ и $f(x) \to 0$ при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f(x)} \to \infty$ при $x \to x_0$;

2) если $f(x) \to \infty$ при $x \to x_0$, то $\frac{1}{f(x)} \to 0$ при $x \to x_0$;

3) если $f(x)$ бесконечно малая при $x \to x_0$, а $g(x)$ ограниченная в некоторой окрестности точки $x = x_0$, то $f(x) \cdot g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

Бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка, если предел их отношения $lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ равен некоторому числу C, отличному от нуля. Если же $C = 0$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка по сравнению с $\beta(x)$.

Две бесконечно малые функции называются *эквивалентными* (~), если предел их отношения равен 1. С помощью замечательных пределов можно доказать справедливость цепочки эквивалентных бесконечно малых:

$$x \sim sinx \sim tgx \sim arcsinx \sim arctgx \sim e^x - 1 \sim ln(1 + x) \text{ при } x \to 0.$$

При раскрытии неопределенностей вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ рекомендуется пользоваться указанными замечательными пределами либо пытаться сократить числитель и знаменатель на общие (критические) множители.

При вычислении пределов нередко пользуются **правилом Лопиталя:** пусть при вычислении предела $\lim\limits_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ возникает неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, но при этом существует $\lim\limits_{x \to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = B$. Тогда $\lim\limits_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = B$.

Использование правила Лопиталя в большинстве случаев значительно упрощает вычисление пределов, поэтому, прежде чем приступать к вычислению пределов, необходимо повторить правила вычисления производных.

Неопределенности бывают следующих видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right),\ \left(\frac{0}{0}\right),\ (0 \cdot \infty),\ (\infty - \infty),\ (1^\infty),\ (\infty^0),\ (0^0).$$

В каждом случае используется свой прием. Укажем некоторые из таких приемов.

1. Если необходимо вычислить предел отношения двух многочленов $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $x \to \infty$ (неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$), то числитель и знаменатель дроби следует разделить на x^k, где $k = max(n, m)$.

2. При вычислении пределов с неопределенностью вида $\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$ либо выполняем преобразования, чтобы сократить числитель и знаменатель дроби на множитель, стремящийся к нулю (раскладываем на множители и числитель, и знаменатель, домножаем и числитель, и знаменатель на одно и то же выражение, приводящее к формулам сокращенного умножения), либо используем первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

или следствия «замечательных пределов».

3. Неопределенности вида $(\mathbf{0}\cdot\infty)$ приводим путем преобразования функции к неопределенностям вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}\right)$.

4. В примерах с неопределенностью вида $[\infty-\infty]$ полезно преобразовать функцию к дроби, числитель и знаменатель которой одновременно стремятся либо к нулю, либо к бесконечности. Например, при вычислении пределов, содержащих выражение вида $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}-\sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$, его умножают и делят на сопряженное (с другим знаком) выражение, т. е. на $\sqrt{\boldsymbol{f(x)}}+\sqrt{\boldsymbol{g(x)}}$.

5. Для устранения неопределенности вида $(\mathbf{1}^{\infty})$ используют второй замечательный предел $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$ или свойства логарифма $\boldsymbol{\lim_{x\to 0}(f(x))^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}g(x)\ln f(x)}}$.

Задание 13. Установите соответствие между пределом

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+3}{3x^3+4x^2+6}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x+7}{2x^3-4x^2+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^5+4x^2+2}{x^4+3x^3+8x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^3+2x^2-3}{4x^3+6x-9}$

и его значением:

A) 2; *B*) 1; *C*) 0; *D*) 2/3; *E*) 1/3; *F*) ∞.

Решение

Выражения, стоящие в числителе и знаменателе дроби, неограниченно возрастают при $x\to\infty$. Следовательно, имеем неопределенность $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. Разделим числитель и знаменатель на x в наибольшей степени, т. е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+5x^2+3}{3x^3+4x^2+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{5x^2}{x^3}+\frac{3}{x^3}}{\frac{3x^3}{x^3}+\frac{4x^2}{x^3}+\frac{6}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{5}{x}+\frac{3}{x^3}}{3+\frac{4}{x}+\frac{6}{x^3}}=\frac{2}{3},$$

так как при $x\to\infty$ отношения $\frac{5}{x}$, $\frac{3}{x^3}$, $\frac{4}{x}$, $\frac{6}{x^3}$ стремятся к нулю.

При нахождении пределов от дробно-рациональных функций при $x\to\infty$ удобно пользоваться формулой

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\begin{cases}0, & \text{если } n<m;\\ \infty, & \text{если } n>m;\\ \frac{a_n}{a_m}, & \text{если } n=m,\end{cases}$$

где $P_n(x)$ – многочлен n-го порядка; $Q_m(x)$ – многочлен m-го порядка; a_n – коэффициент старшего члена x^n многочлена $P_n(x)$; a_m – коэффициент старшего члена x^m многочлена $Q_m(x)$.

С учетом этой формулы имеем:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5x^2+3}{3x^3+4x^2+6}=[n=3, m=3, n=m, a_n=2, a_m=3]=\dfrac{2}{3}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x+7}{2x^3-4x^2+3}=[n=2, m=3, n<m]=0$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+4x^2+2}{x^4+3x^3+8x}=[n=5, m=4, n>m]=\infty$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^3+2x^2-3}{4x^3+6x-9}=[n=3, m=3, n=m, a_n=8, a_m=4]=2$.

Ответ: 1 – *D*; 2 – *C*; 3 – *F*; 4 – *A*.

Задание 14. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2-x}$.

Решение. Имеем неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим многочлен, стоящий в числителе, на множители по формуле $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2-x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+2^2)}{-(x-2)}=-\lim_{x\to 2}(x^2+2x+2^2)=-12.$$

Ответ: –12.

Задание 15. Найдите $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Разложим многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, на множители по формуле

$$x^2+px+q=(x-x_1)(x-x_2),$$

где x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена.

С учетом этого $\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\frac{x-3}{x-10}$ при $x\neq 2$.

Следовательно,

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-10)}=\frac{1}{8}.$$

Данный предел можно вычислить и другим способом, а именно с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)'}{(x^2-12x+20)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-12}=\frac{1}{8}.$$

Ответ: 0,125.

Задание 16. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)=1-1=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, то имеется неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x^4}\right)^2-1^2}{x^2\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^4-1}{x^2\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2\left(\sqrt{1+x^4}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sqrt{1+x^4}+1}=\frac{0}{1+1}=0.$$

Ответ: 0.

Задание 17. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sin2x}{9x}$.

Решение. Данная функция не определена в предельной точке. При заданном значении аргумента (x = 0) она представляет отношение двух бесконечно малых величин, т. е. имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Преобразуем функцию, чтобы воспользоваться первым замечательным пределом $\lim\limits_{t\to 0}\frac{sint}{t}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{9x}=\lim_{x\to 0}\frac{2sin2x}{2\cdot 9x}=\frac{2}{9}\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}=|x\to 0, 2x\to 0|=\frac{2}{9}\cdot 1=\frac{2}{9}.$$

При вычислении предела можно было воспользоваться эквивалентностью бесконечно малых: $sin(ax)$ ~ ax при $x\to 0$. С учетом этого имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{9x}=|sin2x\sim 2x \text{ при } x\to 0|=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{9x}=\frac{2}{9}.$$

Ответ: 2/9.

Задание 18. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{9x}$.

Решение. Данная функция не определена в предельной точке. При заданном значении аргумента (x = 0) она представляет отношение двух бесконечно малых величин, т. е. имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Преобразуем функцию, чтобы воспользоваться первым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to 0}\frac{sint}{t}=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{9x}=\frac{1}{9}\lim_{x\to 0}\frac{2sin2x}{cos2x\cdot 2x}=\frac{2}{9}\lim_{x\to 0}\frac{1}{cos2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin2x}{2x}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{cos0}\cdot 1=\frac{2}{9}.$$

При вычислении предела можно было воспользоваться эквивалентностью бесконечно малых: $tg(ax)$ ~ ax при $x\to 0$. С учетом этого имеем:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg2x}{9x}=|tg2x\sim 2x \text{ при } x\to 0|=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{9x}=\frac{2}{9}.$$

Ответ: 2/9.

Задание 19. Найдите значение предела $\lim\limits_{x \to -5-0} 7^{\frac{3}{x+5}}$.

Решение. Найдем предел функции, стоящей в показателе степени. Если $x \to -5-0$, то $x+5 \to -0$. Следовательно,

$$\lim_{x \to -5-0} \frac{3}{x+5} = \left(\frac{3}{-0}\right) = -\infty.$$

Итак, $\lim\limits_{x \to -5-0} 7^{\frac{3}{x+5}} = (7^{-\infty}) = \left(\frac{1}{7^{\infty}}\right) = \left(\frac{3}{\infty}\right) = 0$.

Ответ: 0.

Задание 20. Найдите значение предела $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Воспользуемся модифицированным вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k$:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = e^2.$$

Ответ: e^2.

Задание 21. Найдите $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\,arcsin\,x}{3x}$.

Решение

1-й способ. С помощью замены:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,arcsin\,x}{3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \begin{vmatrix} arcsin\,x = y \\ x = sin\,y \\ y \to 0 \end{vmatrix} = \lim_{y \to 0} \frac{2y}{3\,sin\,y} = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

2-й способ. Используем эквивалентность бесконечно малых: $arcsinx \sim x$ при $x \to 0$, следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,arcsin\,x}{3x} = \lim_{x \to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Ответ: 2/3.

Задание 22. Найдите $\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinax}{sinbx}$, где $b \neq 0$.

Решение

1-й способ. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinax}{sinbx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{(sinax)'}{(inbx)'} = \lim_{x \to 0} \frac{acosax}{bcosbx} = \frac{a}{b}.$$

2-й способ. Используем эквивалентность бесконечно малых: $sinax \sim ax$ при $x \to 0$, $sinbx \sim bx$ при $x \to 0$, следовательно,

$$\lim_{x \to 0} \frac{sinax}{sinbx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{ax}{bx} = \frac{a}{b}.$$

Ответ: a/b.

Задание 23. Найдите $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

Решение

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{x^2}=(1^\infty)=$$

$$=\begin{pmatrix} y=\dfrac{2}{x^2-1}, y\to 0, \\ x^2=1+\dfrac{2}{y} \end{pmatrix}=\lim_{y\to 0}(1+y)^{1+\frac{2}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+y)\cdot\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{2}{y}}=e^2.$$

Ответ: e^2.

Задание 24. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}=\lim_{x\to 0}e^{ctgx\cdot ln(1+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}ctgx\cdot ln(1+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln(1+x^2)}{tgx}}$$

в силу непрерывности e^x.

Используем эквивалентность бесконечно малых: $tgx \sim x$ при $x\to 0$, $ln(1+x^2)\sim x^2$ при $x\to 0$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}}=e^0=1.$$

Ответ: 1.

Задание 25. Найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+2}{4-x^2+x^3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg^2 3x}{x\,sin\,5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +0}x^x$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.

Решение

1. Разделим числитель и знаменатель на большую степень x^3:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+2}{4-x^2+x^3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=[n=m]=2.$$

2. Используем эквивалентность бесконечно малых: $tg3x \sim 3x$, $sin5x\sim 5x$ при $x\to 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg^2\,3\,x}{x\,sin\,5\,x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{x\cdot 5x}=\frac{9}{5}.$$

3. Воспользуемся свойством логарифма:

$$\lim_{x\to +0}x^x=(0^0)=\lim_{x\to +0}e^{x\,ln\,x}=e^{\lim\limits_{x\to +0}x\,ln\,x}.$$

Найдем предел

$$\lim_{x\to +0}x\,ln\,x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to +0}\frac{ln\,x}{1/x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to +0}\frac{(ln\,x)'}{(1/x)'}=\lim_{x\to +0}(-x)=0.$$

В итоге имеем

$$\lim_{x\to+0} x^x = (0^0) = e^0 = 1.$$

4. Выполним замену переменных и воспользуемся вторым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}} = (1^\infty) = \begin{vmatrix} 2x-1 = 1+t, \\ x\to1, \quad t\to0 \end{vmatrix} = \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{4+2t}{t}} =$$

$$= \lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{4}{t}}(1+t)^2 = e^4.$$

Ответ: 1) 2; 2) 9/5; 3) 1; 4) e^4.

Задание 26. Функция $\alpha(x) = 2^{-x}$ является бесконечно малой при …

1) $x\to-\infty$; 2) $x\to+\infty$; 3) $x\to+0$; 4) $x\to-0$.

Решение. Вычислим для функции $\alpha(x) = 2^{-x}$ пределы:

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} 2^{-x} = (2^{+\infty}) = +\infty$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x} = (2^{-\infty}) = \left(\frac{1}{2^{+\infty}}\right) = 0$;

3) $\lim\limits_{x\to+0} 2^{-x} = 2^{-0} = 1$; 4) $\lim\limits_{x\to-0} 2^{-x} = 2^0 = 1$.

Ответ: 2.

§ 7. Непрерывность функции. Точки разрыва

Три вещи никогда не возвращаются обратно – время, слово, возможность. Поэтому: не теряй времени, выбирай слова, не упускай возможность.

Конфуций

Понятие *непрерывности функции* является фундаментальным в математическом анализе.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел этой функции в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0 справа (слева), если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)$ ($\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0)$).

Функция называется непрерывной на данном промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то каждая из функций $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (последняя при $g(x) \neq 0$) также непрерывна в точке x_0.

Основные элементарные функции x^{α}, a^{x}, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ непрерывны во всех точках, где они определены.

Точка x_0 называется **точкой разрыва** функции $y = f(x)$, если эта функция либо не определена в точке x_0, либо определена, но не является непрерывной в этой точке.

Различают три типа точек разрыва: устранимый разрыв, разрывы I и II рода.

1. x_0 – *точка устранимого разрыва*, если

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = a < \infty,$$

при этом значение $f(x_0)$ либо не определено, либо не равно a.

Если функция $y = f(x)$ имеет устранимый разрыв в точке x_0, то доопределив (или переопределив) функцию в этой точке согласно формуле $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, получим функцию, непрерывную в x_0. Тем самым разрыв устраняется.

2. x_0 – *точка разрыва I рода*, если существуют конечные односторонние пределы функции в точке x_0, но они не равны. В этом случае разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называют *скачком* функции в точке x_0.

3. x_0 – *точка разрыва II рода*, если хотя бы один из односторонних пределов функции в точке x_0 не существует или равен ∞.

Теорема 1. Если в точке x_0 функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то в этой же точке непрерывными являются и функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, а также $\frac{f(x)}{g(x)}$, если только $g(x_0) \neq 0$.

Теорема 2. Если функция $y = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(y)$ непрерывна в точке $y_0 = \varphi(x_0)$, тогда сложная функция $f[\varphi(x)]$ непрерывна в точке x_0.

Теорема Вейерштрасса. Всякая непрерывная на отрезке функция ограничена и достигает на нем своей верхней и нижней грани.

Теорема Больцано – Коши. Если функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого C, заключенного между A и B, существует такая точка $\varepsilon \in [a,\ b]$, что $f(\varepsilon) = C$.

Следствие. Если функция непрерывна на отрезке и на его концах принимает значения разного знака, то на этом отрезке существует хотя бы одна точка, в которой функция обращается в нуль.

Задача 27. Найдите точки разрыва дробно-рациональной функции $y = \frac{x(2x+5)}{x^2+x-2}$.

Решение. Дробно-рациональная функция может иметь разрыв только в тех точках, где она не определена. Искомая функция определена при всех значениях x, кроме x, удовлетворяющих условию $x^2 + x - 2 = 0$ (делить на нуль нельзя). Решение данного уравнения дает $x = 1$ и $x = -2$.

Следовательно, $x = 1$ и $x = –2$ являются точками разрыва заданной функции.

Ответ: $x = 1$ и $x = – 2$.

Задача 28. Точка $x = 3$ для функции $f(x) = \frac{9-x^2}{x-3}$ является точкой …

1) непрерывности; 2) разрыва I рода (неустранимого);
3) разрыва II рода; 4) разрыва I рода (устранимого рода).

Решение. Вычислим для функции $f(x) = \frac{9-x^2}{x-3}$ односторонние пределы в точке $x = 3$:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{9-x^2}{x-3} = \lim_{x\to 3-0}\frac{(3-x)(3+x)}{x-3} = -\lim_{x\to 3-0}(3+x) = -6;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{9-x^2}{x-3} = \lim_{x\to 3+0}\frac{(3-x)(3+x)}{x-3} = -\lim_{x\to 3+0}(3+x) = -6.$$

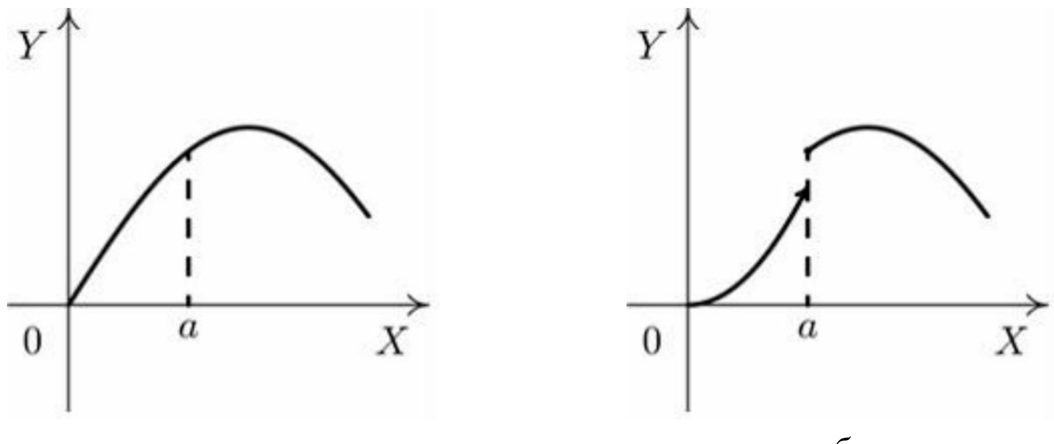
Левый и правый пределы функции конечны и равны между собой, но сама функция не определена в точке $x = 3$. Следовательно, $x = 3$ – точка устранимого разрыва.

Ответ: 4).

Задача 29. Установите соответствие между графиком функции и характером точки $x = a$ (рис. 17).

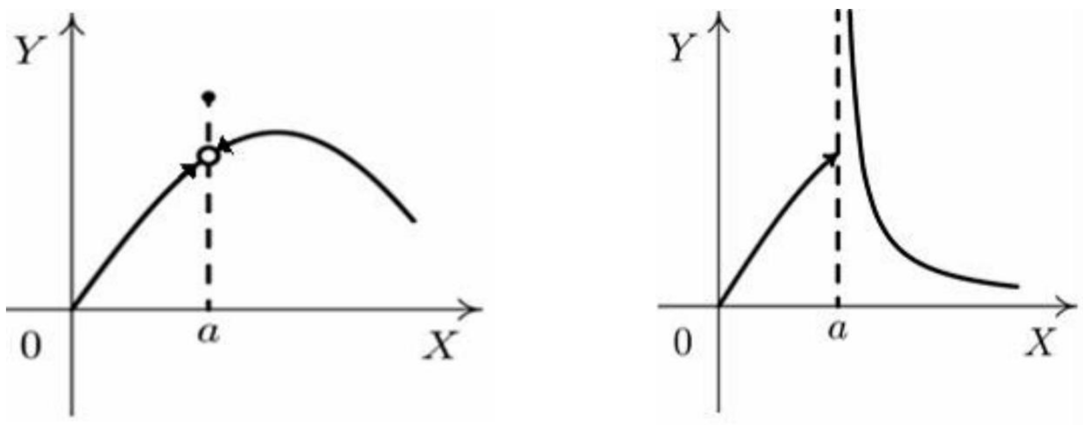
Варианты ответов:

1) точка разрыва I рода; 2) точка устранимого разрыва;
3) точка непрерывности; 4) точка разрыва II рода;
5) точка перегиба.



а *б*

Рис. 17



в *г*

Рис. 17. Продолжение

Решение

1. На рис. 17*а* в точке $x = a$ функция определена и непрерывна, следовательно, $x = a$ – точка непрерывности.

2. На рис. 17*б* в точке $x = a$ функция определена. Правый и левый пределы конечны, но не равны между собой, следовательно, $x = a$ – точка разрыва первого рода.

3. На рис. 17*в* в точке $x = a$ функция определена. Левый и правый пределы функции конечны, равны между собой, но не равны значению функции в точке $x = a$, поэтому $x = a$ – точка устранимого разрыва.

4. На рис. 17*г* в точке $x = a$ функция не определена. Так как односторонний предел бесконечен $\left(\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +\infty\right)$, то $x = a$ – точка разрыва функции второго рода.

Ответ: *а* – 3; *б* – 1; *в* – 2; *г* – 4.

§ 8. Задания для самостоятельного решения

8.1. Базовые задания

1. Даны множества $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ и $C = \{1, 2, 3\}$. Задайте списками множества:

1) $A \cup B \cup C$; 2) $A \cap B \cup C$; 3) $A \backslash B \backslash C$.

2. С помощью диаграммы Эйлера – Венна докажите тождество

$$(A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right) = A.$$

3. Найдите область определения функции $f(x) = \log_{x-2}(7 - 2x)$.

4. Найдите область значения функции $f(x) = \sqrt{4x^2 - 12x + 25}$.

5. В таблице приведена температура охлаждения заготовки:

t, мин	0	10	20
T, °C	100	77	60

С помощью интерполяционного многочлена первого порядка найдите температуру заготовки через 12 мин после начала охлаждения.

6. Последовательность задана рекуррентным соотношением $a_n = 2a_{n-1} - 3$, $a_1 = 2$. Найдите пятый член этой последовательности.

7. Найдите общий член числовой последовательности

$$\frac{2}{5}, -\frac{4}{7}, \frac{6}{11}, -\frac{8}{19}, \dots$$

8. Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x\cdot sin4x}{2x^2}$; 2) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-5x+4}{x^2-6x+8}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+5}{x^2-3x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{2x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2^x-x^2}{4x-8}$.

9. Определите промежутки непрерывности функции $f(x) = \frac{ln(2x-5)}{x^2-7x+6}$.

10. Определите тип точек разрыва функции $f(x) = \frac{x+3}{x^2-9}$.

8.2. Профильные задания

1. Из 20 студентов 12 сдали зачет по математике, 12 – по физике, 15 – по философии. Зачет по математике и физике сдали 8 студентов, по математике и философии – 10 студентов, по физике и философии – 9 студентов, зачет по трем предметам сдали 6 студентов. Сколько студентов не сдали зачета ни по одному предмету?

2. В магазине проводится дегустация 10 видов сыра. Артем попробовал 7 видов, Дмитрий – 8. Оказалось, что один вид сыра оба не продегустировали. Сколько видов сыра попробовали Артем и Дмитрий?

3. Представьте заштрихованные области рис. 18 диаграммы Эйлера – Венна аналитическим выражением, в котором используется минимальное количество операций и букв.

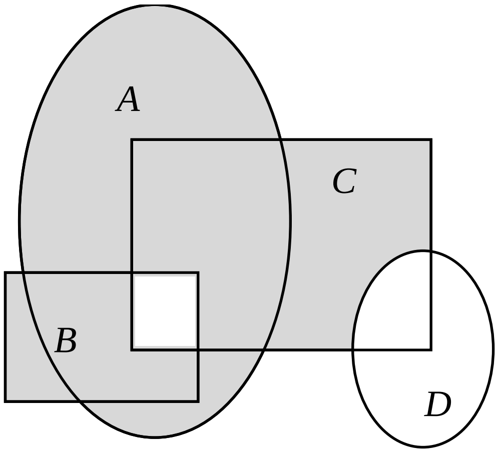


Рис. 18

4. Изучается зависимость между электродвижущей силой E и температурой нагревания T термопары. Данные измерений приведены в таблице:

T, °С	500	600	700	800	900	1000
E, мВ	3,53	3,43	3,41	4,10	4,84	6,04

С помощью интерполяционного многочлена второго порядка найдите величину ЭДС при температуре 720 и 400 °С.

5. Найдите общий член числовой последовательности 1, 4, 9, 18, 35, 68, …

6. Найдите пределы функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-x+2}{\sin x-2x^3}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\sin 3x}{1-\cos 2x}$;

3) $\lim\limits_{x\to +0} \left(x+\frac{1}{x^2}\right)^x$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x}{2x-1}\right)^{4x}$.

7. Исследуйте функцию $y=\frac{x^3-x}{1-|x|}$ на непрерывность. Определите характер разрывов функции, если они существуют. Сделайте чертеж.