# ГЛАВА 5

# ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

## § 1. Производная первого порядка

Ум, несомненно, первое условие для счастья.
*Софокл*

Производная широко используется при решении целого ряда задач математики, физики, других наук, особенно при изучении скорости разных процессов.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором промежутке $X$.

**Производной функции** $f(x)$ в точке $x_0 \in X$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, если этот предел существует:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если функция $y = f(x)$ в точке $x_0$ имеет конечную производную, то функция называется дифференцируемой в этой точке.

*Геометрический смысл производной.* Для функции $y = f(x)$ ее производная $y' = f'(x)$ для каждого значения $x$ равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в соответствующей точке.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Если производная равна нулю, то касательная к графику функции в этой точке параллельна оси $Ox$.

*Физический смысл производной*. Для функции $y = f(t)$, описывающей какой-либо физический процесс, производная $y'_t$ есть скорость протекания этого процесса в данный момент $t$, т. е. мгновенная скорость.

Если функция дифференцируема в некоторой точке, то в этой точке функция непрерывна.

Если функция имеет разрыв в некоторой точке, то она не имеет производной в этой точке.

При решении задач нет необходимости находить производную по определению, можно воспользоваться правилами дифференцирования и формулами производных основных элементарных функций (1–16, левая часть) и производных сложных функций $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$ (1–16, правая часть).

### Правила вычисления производных

1) $(Cu)' = Cu'$;
2) $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$;
3) $(uv)' = u'v + v'u$;
4) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} u'v + v'u$; ($v \neq 0$).

### Таблица производных

1. $(C)' = 0$.
2. $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $\quad (u^\alpha)' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$.
3. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a > 0$, $\quad (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, $a > 0$.
   $(e^x)' = e^x$, $\quad (e^u)' = e^u \cdot u'$.
4. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$, $\quad (\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$, $a > 0, a \neq 1$.
   $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$.
5. $(\sin x)' = \cos x$, $\quad (\sin u)' = \cos u \cdot u'$.
6. $(\cos x)' = -\sin x$, $\quad (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$.
7. $(tg\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $\quad (tg\, u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.
8. $(ctg\, x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$, $\quad (ctg\, u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$.
9. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
10. $(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\quad (\arccos u)' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$.
11. $(arctg\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $\quad (arctg\, u)' = \frac{u'}{1+u^2}$.
12. $(arcctg\, x)' = \frac{-1}{1+x^2}$, $\quad (arcctg\, u)' = \frac{-u'}{1+u^2}$.
13. $(sh\, x)' = ch\, x$, $\quad (sh\, u)' = ch\, u \cdot u'$.
14. $(ch\, x)' = sh\, x$, $\quad (ch\, u)' = sh\, u \cdot u'$.
15. $(th\, x)' = \frac{1}{ch^2 x}$, $\quad (th\, u)' = \frac{u'}{ch^2 u}$.
16. $(cth\, x)' = \frac{-1}{sh^2 x}$, $\quad (cth\, u)' = \frac{-u'}{sh^2 u}$.

На практике часто приходится находить *производные от сложных функций.*

Пусть функция $t = u(x)$ дифференцируема в точке $x_0$, а функция $y = f(t)$ дифференцируема в точке $t_0 = u(x_0)$, тогда сложная функция

$y = f(u(x))$ дифференцируема в точке $x_0$, при этом $\left(f(u(x))\right)' =$
$= f'(u(x)) \cdot u'(x)$.

Используя последнее утверждение и формулы для нахождения производных основных элементарных функций, нетрудно получить:

1) $((u(x))^{\alpha})' = \alpha \cdot (u(x))^{\alpha-1} \cdot u'(x)$;

2) $(e^{u(x)})' = e^{u(x)} \cdot u'(x)$;

3) $(sin(\, u(x)))' = cos(\, u(x)) \cdot u'(x)$;

4) $(tg(\, u(x)))' = \frac{u'(x)}{cos^2 u(x)}$.

Остальные формулы приведены в таблице производных.

Зависимость между переменными $x$ и $y$ иногда задают, используя систему уравнений $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$, $t \in I$, где $I$ – некоторый промежуток.

Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные в точке $t_0$, причем $\varphi'(t_0) \neq 0$, то производная функции $y$ может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Пусть функция $y$ от аргумента $x$ задана *неявно*, т. е. она задана уравнением $F(x, y) = 0$. Для того чтобы найти производную $y$ по $x$, нужно продифференцировать $F(x, y)$ по $x$, рассматривая $y$ как функцию от $x$. Затем выразить производную $y'$ через $y$ и $x$.

Если приращение функции $y = f(x)$ от независимой переменной $x$ может быть представлено в виде $\Delta y = A(x)\Delta x + o(dx)$, где $dx = \Delta x$, то главная линейная часть этого приращения называется *дифференциалом* функции $y$: $dy = A(x)dx$. Для существования дифференциала функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = f'(x)$, причем $dy = y'dx$. Последняя формула будет верна и в том случае, если переменная $x$ является функцией от новой независимой переменной (свойство инвариантности первого дифференциала).

Производную $y' = f'(x)$ можно рассматривать как отношение дифференциала функции к дифференциалу независимой переменной, т. е. $f'(x) = \frac{dy}{dx}$.

*Геометрический смысл дифференциала*. Дифференциал функции $y = f(x)$ в данной точке $x$ равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда $x$ получает приращение $\Delta x$.

*Физический смысл дифференциала*. Дифференциал пути равен тому фиктивному приращению пути, которое получится, если предположить, что начиная с данного момента времени точка движется равномерно, сохраняя приобретенную скорость.

**Задание 1.** Найдите производную функции $y = \frac{ln\,2x}{x}$.

***Решение.*** Используя формулу дифференцирования частного, получим

$$y' = \left(\frac{ln\,2\,x}{x}\right)' = \frac{(ln\,2\,x)' \cdot x - (x)' \cdot ln\,2\,x}{(x)^2} = \frac{\frac{2}{2x} \cdot x - 1 \cdot ln\,2\,x}{(x)^2} = \frac{1 - ln\,2\,x}{(x)^2}.$$

***Ответ***: $\frac{1 - ln\,2x}{(x)^2}$.

**Задание 2.** Найдите производную функции $y = \frac{cos\,x}{x^2}$.

***Решение.*** Используя формулу дифференцирования частного, получим

$$y' = \left(\frac{cos\,x}{x^2}\right)' = \frac{(cos\,x)' \cdot x^2 - (x^2)' \cdot cos\,x}{(x^2)^2} = \frac{-\,sin\,x \cdot x^2 - 2x \cdot cos\,x}{(x)^4} =$$

$$= -\frac{x^2\,sin\,x + 2x\,cos\,x}{(x)^4} = -\frac{x(x\,sin\,x + 2\,cos\,x)}{x^4} = -\frac{x\,sin\,x + 2\,cos\,x}{x^3}.$$

***Ответ***: $-\frac{x\,sin\,x + 2\,cos\,x}{x^3}$.

**Задание 3.** Найдите производную функции $y = \frac{x+3}{tgx}$.

***Решение.*** Используя формулу дифференцирования частного, получим

$$y' = \left(\frac{x+3}{tgx}\right)' = \frac{(x+3)' \cdot tgx - (tgx)' \cdot (x+3)}{(tgx)^2} =$$

$$= \frac{1 \cdot tgx - \left(\frac{1}{cos^2 x}\right) \cdot (x+3)}{(tgx)^2} =$$

$$= \frac{tgx \cdot cos^2 x - x - 3}{tg^2 x \cdot cos^2 x} = \frac{sin\,x \cdot cos\,x - x - 3}{sin^2 x}.$$

***Ответ***: $\frac{sin\,x \cdot cos\,x - x - 3}{sin^2 x}$.

**Задание 4.** Найдите производные функций $y = e^{5x}, y = cos(\,4x - 2)$, $y = arccos(\,x^3)$.

***Решение.*** Данные функции являются сложными, поэтому при нахождении производной воспользуемся правилом дифференцирования сложной функции: если $y = f(u(x))$, где $f(u)$ и $u(x)$ имеют производные, то $y' = f'(u) \cdot u'(x)$.

1. Функция $y = e^{5x}$ является композицией двух имеющих производные функций $u = 5x$ и $f(u) = e^u$. Так как $u' = (5x)' = 5 \cdot 1 = 5$, а $f'(u) = (e^u)' = e^u$, то, используя правило дифференцирования сложной функции, получим $y' = e^u \cdot u' = 5e^{5x}$.

2. Функция $y = cos(4x - 2)$ является композицией двух имеющих производные функций $u = 4x - 2$ и $f(u) = cos\, u$. Так как $u' = (4x - 2)' =$ $= 4 \cdot 1 - 0 = 4$, а $f'(u) = (cos\, u)' = -sin\, u$, то, используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = -sin\, u \cdot u' - 4\, sin(4x - 2).$$

3. Функция $y = arccos(x^3)$ является композицией двух имеющих производные функций $u = x^3$ и $f(u) = arccos\, u$. Так как $u' = (x^3)' = 3x^2$, а $f'(u) = (arccos\ \ u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, то, используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u' = -\frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}} \cdot 3x^2 = -\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

***Ответ***: $5e^{5x}$; $-4\, sin(4x - 2)$; $-\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}$.

**Задание 5.** Найдите производную функции $y = 6x^3 + \frac{1}{4x^4} + 10\sqrt[5]{x^2}$.

***Решение.*** Преобразуем данную функцию, введя дробные и отрицательные показатели:

$$y = 6x^3 + \frac{1}{4}x^{-4} + 10x^{\frac{2}{5}} - 15.$$

Используя правила дифференцирования: 1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$, 2) $(cu)' = cu'$, 3) $(c)' = 0$ и формулу $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, нетрудно получить:

$$y' = 6 \cdot 3x^{3-1} + \frac{1}{4} \cdot (-4)x^{-4-1} + 10 \cdot \frac{2}{5}x^{\frac{2}{5}-1} = 18x^2 - x^{-5} + 4x^{-\frac{3}{5}} =$$
$$= 18x^2 - \frac{1}{x^5} + \frac{4}{x^{\frac{3}{5}}} = 18x^2 - \frac{1}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}.$$

***Ответ***: $18x^2 - \frac{1}{x^5} + \frac{4}{\sqrt[5]{x^3}}$.

**Задание 6.** Найдите производную произведения $x^4\, sin\, 2\, x$.

***Решение.*** Воспользуемся формулой для нахождения производной произведения:

$$(x^4\, sin\, 2\, x)' = (x^4)' \cdot sin\, 2\, x + x^4 \cdot (sin\, 2\, x)' = 4x^3\, sin\, 2\, x + 2x^4\, cos\, 2\, x.$$

***Ответ***: $4x^3\, sin\, 2\, x + 2x^4\, cos\, 2\, x$.

**Задание 7.** Найдите производную произведения $x^5\, ln\, x$.

***Решение.*** Воспользуемся формулой для нахождения производной произведения:

$$(x^5\, ln\, x)' = (x^5)' \cdot ln\, x + x^5 \cdot (ln\, x)' = 5x^4\, ln\, x + x^5 \cdot \frac{1}{x} = 5x^4\, ln\, x + x^4.$$

***Ответ***: $5x^4\, ln\, x + x^4$.

**Задание 8.** Найдите производную функции $y = y(x)$, заданной в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = t^2 + ln\,6\,t, \\ y = 6t^5 + 5t^3. \end{cases}$$

***Решение.*** Воспользуемся формулой для нахождения производной функции, заданной параметрически:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(6t^5 + 5t^3)'}{(t^2 + ln\,6\,t)'} = \frac{6 \cdot 5t^4 + 5 \cdot 3t^2}{2t + \frac{6}{6t}} = \frac{15t^2(2t^2 + 1)}{2t + \frac{1}{t}} =$$

$$= \frac{15t^3(2t^2 + 1)}{2t^2 + 1} = 15t^3.$$

***Ответ***: $15t^3$.

**Задание 9.** Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = cos\,3\,x - \frac{6}{\pi}x^2$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

***Решение.*** Угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0$ равен значению производной этой функции в данной точке $x_0$. Найдем производную заданной функции $y = cos\,3\,x - \frac{6}{\pi}x^2$ и вычислим ее значение в точке $x_0$.

$$y' = -3\,sin\,3\,x - \frac{6}{\pi} \cdot 2x = -3\,sin\,3\,x - \frac{12}{\pi}x,$$

$$y'(\tfrac{\pi}{6}) = -3\,sin(\,3 \cdot \tfrac{\pi}{6}) - \frac{12}{\pi} \cdot \frac{\pi}{6} = -3\,sin\frac{\pi}{2} - 2 = -3 \cdot 1 - 2 = -5.$$

***Ответ***: –5.

**Задание 10.** Материальная точка движется по закону $s = 3\,cos^2\,t$. Найдите ее скорость в момент времени $t = \frac{\pi}{4}$.

***Решение.*** Производная пути по времени $s'(t) = v'(t)$ есть скорость изменения точки в момент времени $t$. Найдем скорость $v$ в произвольный момент времени $t$:

$$v(t) = s'(t) = (3\,cos^2\,t)' = 3 \cdot 2\,cos\,t \cdot (cos\,t)' =$$
$$= 3 \cdot 2\,cos\,t \cdot (-\,sin\,t) = -3\,sin\,2\,t,$$

Скорость в момент времени $t = \frac{\pi}{4}$

$$v\left(\frac{\pi}{4}\right) = -3\,sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -3\,sin\frac{\pi}{2} = -3.$$

***Ответ***: –3.

**Задание 11.** Найдите $y'$ из уравнения $x^3 + y^2 + 3xy - 4 = 0$.

***Решение.*** Продифференцируем обе части уравнения по $x$, считая $y = y(x)$:

$$3x^2 + 2yy' + 3y + 3xy' = 0,\; y'(3x + 2y) = -3x^2 - 3y,\; y' = -\frac{3x^2+3y}{3x+2y}.$$

Производную от функции, заданной неявно, иногда удобнее находить по формуле

$$y'_x = -\frac{F'_x(x, y = const)}{F'_y(x = const, y)}.$$

В нашем случае

$$F(x, y) = x^3 + y^2 + 3xy - 4,\ F'_x(x, y = const) = 3x^2 + 3y,$$

$$F'_y(x = const, y) = 2y + 3x,\ y'_x = -\frac{3x^2+y}{3x+2y}.$$

***Ответ***: $-\frac{3x^2+y}{3x+2y}$.

## § 2. Производные высших порядков

В конце концов, человеку дана
всего одна жизнь – отчего же
не прожить ее как следует?

*Дж. Лондон*

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $y' = f'(x)$ во всех точках некоторой окрестности точки $x_0$. Это означает, что производная $f'(x)$ функции $f(x)$ сама является функцией аргумента $x$ в этой окрестности и называется производной первого порядка. По отношению к этой функции можно ставить вопрос о существовании производной.

Если функция $f'(x)$ имеет в точке $x_0$ производную, то она называется производной второго порядка функции $f$ в точке $x_0$ и обозначается $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$:

$$f''(x_0) = (f'(x_0))'.$$

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется производной третьего порядка и обозначается $f'''$:

$$f''' = (f'')'.$$

Аналогично определяются и производные более высоких порядков. Производной $n$-го порядка называется производная от производной порядка $n - 1$:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

Производные порядка выше первого называются производными высших порядков.

Для нахождения производной какого-либо высшего порядка от данной функции необходимо последовательно найти все ее производные низших порядков.

Пусть кривая задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, t \in I,$$

где $I$ – некоторый промежуток.

Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные второго порядка в точке $t_0$, причем $\varphi'(t_0) \neq 0$, то производная второго порядка функции $y$ по переменной $x$ может быть найдена по формуле

$$y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}.$$

**Задание 12.** Найдите производную второго порядка функции $y = ln10x$.

***Решение.*** Последовательно дифференцируя функцию, получим

$$y' = \frac{10}{10x} = \frac{1}{x} = x^{-1}; y'' = (x^{-1})' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

При нахождении производной первого порядка воспользуемся формулой

$$(ln( kx + b))' = \frac{k}{kx+b}.$$

***Ответ***: $-x^{-2}$.

**Задание 13.** Найдите производную третьего порядка функции $y = 7^{3x-4}$.

***Решение.*** Дифференцируя функцию $y$, получим

$$y' = (7^{3x-4})' = 7^{3x-4} \cdot ln\, 7 \cdot (3x - 4)' = 3\, ln\, 7 \cdot 7^{3x-4}.$$

Дифференцируя производную $y'$, получим

$$y'' = (y')' = (3\, ln\, 7 \cdot 7^{3x-4})' = 3\, ln\, 7\, (7^{3x-4})' = (3\, ln\, 7)^2 \cdot 7^{3x-4}.$$

Дифференцируя вторую производную $y''$, получим

$$y''' = (y'')' = ((3\, ln\, 7)^2 \cdot 7^{3x-4})' = (3\, ln\, 7)^2(7^{3x-4})' = (3\, ln\, 7)^3 \cdot 7^{3x-4}.$$

***Ответ***: $(3\, ln\, 7)^3 \cdot 7^{3x-4}$.

**Задание 14.** Найдите производную второго порядка функции $y = cos\, 3\, x + 6x$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

***Решение.*** Найдем первую производную:

$$y' = (cos\, 3\, x + 6x)' = -3\, sin\, 3\, x + 6.$$

Используя полученный результат, найдем вторую производную:

$$y'' = (y')' = (-3\, sin\, 3\, x + 6)' = -3 \cdot 3\, cos\, 3\, x + 0 = -9\, cos\, 3\, x.$$

Теперь вычислим значение производной в заданной точке:

$$y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -9\, cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = -9\, cos\frac{\pi}{2} = -9 \cdot 0 = 0.$$

***Ответ***: $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

**Задание 15.** Найдите производную второго порядка функции $s = t^3 e^{-2t}$.

***Решение.*** Последовательно дифференцируя функцию, получим:

$$s' = (t^3 e^{-2t})' = (t^3)' e^{-2t} + t^3 (e^{-2t})' = 3t^2 e^{-2t} - 2t^3 e^{-2t} =$$
$$= (3t^2 - 2t^3) e^{-2t};$$
$$s'' = (s')' = ((3t^2 - 2t^3) e^{-2t})' = (3t^2 - 2t^3)' e^{-2t} + (3t^2 - 2t^3)(e^{-2t})' =$$
$$= (3 \cdot 2t - 2 \cdot 3t^2) e^{-2t} + (3t^2 - 2t^3) \cdot (-2e^{-2t}) = (6t - 6t^2) e^{-2t} -$$
$$-2(3t^2 - 2t^3) e^{-2t} = (6t - 6t^2 - 6t^2 + 4t^3) e^{-2t} = (6t - 12t^2 + 4t^3) e^{-2t}.$$

***Ответ***: $s'' = (6t - 12t^2 + 4t^3) e^{-2t}$.

**Задание 16.** Найдите производную четвертого порядка функции $y = cos\, 5\, x$.

***Решение.*** Последовательно дифференцируя функцию, получим:

$$y' = (cos\, 5\, x)' = -5\, sin\, 5\, x,\ y'' = (-5\, sin\, 5\, x)' = -5 \cdot (5\, cos\, 5\, x) =$$
$$= -25\, cos\, 5\, x;\ y''' = (-25\, cos\, 5\, x)' = -25 \cdot (-5\, sin\, 5\, x) = 125\, sin\, 5\, x;$$
$$y^{IV} = (125\, sin\, 5\, x)' = 125 \cdot (5\, cos\, 5\, x) = 625\, cos\, 5\, x.$$

При нахождении производных воспользуемся формулами:

$$(sin(\,kx + b))' = k\, cos(\,kx + b); \quad (cos(\,kx + b))' = -k\, sin(\,kx + b).$$

***Ответ***: $y^{IV} = 625\, cos\, 5\, x$.

## § 3. Теоремы о среднем. Правило Лопиталя

Бояться надо не смерти,
а пустой жизни.

*Б. Брехт*

**Теорема Ферма.** Пусть функция определена в некоторой окрестности точки $x_0$ и принимает в этой точке наибольшее или наименьшее значение. Тогда, если при $x = x_0$ существует производная в широком смысле, то она равна нулю.

**Теорема Ролля**. Пусть функция $f$:

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) имеет в каждой точке интервала $(a, b)$ производную в широком смысле;

3) принимает равные значения на концах отрезка, т. е. $f(a) = f(b)$.

Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a, b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Между двумя последовательными корнями дифференцируемой функции всегда содержится по меньшей мере один корень ее производной.

*Следствие теоремы Ролля*. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ удовлетворяет теореме Ролля, причем $f(a) = f(b) = 0$, то существует по крайней мере одна точка $c \in (a,\ b)$, такая, что $f'(c) = 0$.

Между двумя нулями функции найдется хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

**Теорема Лагранжа**. Если функция $f$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и в каждой точке интервала $(a,\ b)$ имеет производную в широком смысле, то в этом интервале существует по крайней мере одна такая точка $c$, что

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Конечное приращение дифференцируемой функции равно соответствующему приращению аргумента, умноженному на значение ее производной в некоторой промежуточной точке.

**Теорема Коши**. Пусть функции $f$ и $g$:

1) непрерывны на отрезке $[a,\ b]$;

2) имеют производные в каждой точке интервала $(a,\ b)$;

3) $g' \neq 0$ во всех точках интервала $(a,\ b)$.

Тогда существует такая точка $c \in (a,\ b)$, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

**Теорема (правило Лопиталя)**. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций равен пределу отношения их производных (конечному или бесконечному), если последний существует.

**Задание 17.** Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arcsin\, 2x}{e^x - cos\, x}$.

***Решение.*** Воспользуемся эквивалентностью бесконечно малых $arcsin 2x \sim 2x$ при $x \to 0$ и правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{arcsin\, 2\, x}{e^x - cos\, x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\ \frac{(2x)'}{(e^x - cos\, x)'} = \lim_{x\to 0}\ \frac{2}{(e^x + sin\, x)} = 2.$$

***Ответ***: 2.

**Задание 18.** Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{ln\, x}{ctg\, x}$.

***Решение.*** Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\ \frac{ln\, x}{ctg\, x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\ \frac{(ln\, x)'}{(ctg\, x)'} = \underset{x\to 0}{Lim}\ \frac{-\, sin^2\, x}{x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0}\frac{sin\, x}{x} \cdot \lim_{x\to 0}\ sin\, x = 0.$$

***Ответ***: 0.

## § 4. Асимптоты графика функции

Говори с людьми в соответствии
с их разумом.

*Саади*

При исследовании функций особый интерес имеет вид графика этой функции при неограниченном удалении его текущей точки $M$ по графику от начала координат (т. е. при стремлении хотя бы одной из координат точки к бесконечности). Если при этом расстояние $d$ от точки $M$ графика функции до некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой графика функции*. График функции может пересекать асимптоту, причем бесчисленное множество раз. Различают вертикальные, наклонные и горизонтальные асимптоты.

Прямая $x = x_0$ является *вертикальной* асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $x_0$ – точка разрыва или граничная точка области определения и выполняется хотя бы одно из соотношений $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$. Вертикальные асимптоты обычно сопутствуют точкам разрыва второго рода.

Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) \ \text{или}$$
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, \ b = \lim_{x \to -\infty} (f(x) - kx).$$

Если соответствующие пределы при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$ равны, то наклонная асимптота одна; если разные, то две.

В частности, если $k = 0$, то асимптоту называют горизонтальной. Ее уравнение имеет вид $y = b$.

Наклонные асимптоты графика дробно-рациональной функции можно находить, разделив числитель на знаменатель. Например, так как $\frac{8x^2+10x-5}{2x+3} = 4x - 1 - \frac{2}{2x+3}$, то прямая $y = 4x - 1$ является наклонной асимптотой графика функции $y = \frac{8x^2+10x-5}{2x+3}$.

**Задание 19.** Найдите вертикальную асимптоту графика функции $y = \frac{x+5}{x^2+6x+5}$.

***Решение.*** Прямая $x = x_0$ может быть вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $x_0$ – точка разрыва или граничная точка области определения и $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty$.

Функция $y = \frac{x+5}{x^2+6x+5}$ определена только при тех значениях $x$, при которых выражение, стоящее в знаменателе, отлично от нуля, т. е. $x^2 + 6x + 5 \neq 0$. Следовательно, функция определена всюду, кроме точек $x_1 = -1$ и $x_2 = -5$.

Вычислим односторонние пределы функции $y = f(x)$ в точке $x_1 = -1$.

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x+5}{x^2+6x+5} = \lim_{x\to-1-0} \frac{x+5}{(x+1)(x+5)} = \lim_{x\to-1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x+5}{x^2+6x+5} = \lim_{x\to-1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty.$$

Последнее означает, что прямая $x$ = –1 является вертикальной асимптотой.

Вычислим односторонние пределы функции $y = f(x)$ в точке $x_2 = -5$:

$$\lim_{x\to-5-0} \frac{x+5}{x^2+6x+5} = \lim_{x\to-5-0} \frac{1}{x+1} = -\frac{1}{4}.$$

Аналогично и $\lim\limits_{x\to-5+0} \frac{x+5}{x^2+6x+5} = -\frac{1}{4}$. Следовательно, прямая $x = -5$ не является вертикальной асимптотой.

***Ответ***: $x$ = –1.

**Задание 20.** Найдите горизонтальную асимптоту графика функции $y = \frac{4x^2-5x+2}{5x^2+6x+1}$.

***Решение.*** Прямая $y = b$ является горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если существует один из пределов $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) =$ $= b$, или $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$, или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Вычислим предел:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2-5x+2}{5x^2+6x+1} = \begin{vmatrix} n = 2 \\ m = 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно, прямая $y = \frac{4}{5} = 0{,}8$ является горизонтальной асимптотой графика функции при $x \to \infty$.

***Ответ***: $y$ = 0,8.

**Задание 21.** Найдите наклонную асимптоту графика $y = 2x - e^{-3x}$.

***Решение.*** Прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), если существуют конечные пределы:

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - kx),$$

или

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ и } b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx).$$

Вычислим эти пределы:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x - e^{-3x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 - \frac{1}{xe^{3x}}\right) = 2;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty}(2x - e^{-3x} - 2x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^{3x}}\right) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 2x$ является наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to +\infty$.

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x - e^{-3x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$k = \lim_{x\to-\infty}\frac{(2x - e^{-3x})'}{x'} = \lim_{x\to-\infty}\frac{(2 + 3e^{-3x})}{1} = +\infty,$$

поэтому при $x \to -\infty$ наклонной асимптоты у графика данной функции нет.

***Ответ***: $y = 2x$ при $x \to +\infty$.

## § 5. Наибольшее и наименьшее значения функции. Экстремумы функции

Учись у прошлого, живи сегодня, надейся на завтра. Самое важное в жизни – это не переставать задавать вопросы.

*А. Эйнштейн*

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин. Практические задачи, связанные с поиском оптимальных решений, приводят к развитию и усовершенствованию методов нахождения наибольших и наименьших значений.

**Экстремумом функции** $y = f(x)$ называется ее наибольшее или наименьшее значение на некотором множестве значений аргумента $x$. Те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются точками экстремума функции. Экстремумы (максимумы и минимумы) бывают локальными и глобальными. Локальные максимумы (минимумы) достигаются в точке $x_0$, для которой существует такая окрестность (она может быть сколь угодно малой), что для всех точек из этой окрестности, кроме самой точки $x_0$, $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$. Точку $x_0$ в этом случае называют *точкой максимума* (*минимума*) функции $y = f(x)$. Глобальный максимум (минимум) – это наибольшее (наименьшее) значение функции на всем множестве. Функция может иметь только один глобальный максимум и только один глобальный минимум или же не иметь их совсем.

Точки, в которых производная равна нулю ($f'(x) = 0$) или не существует, называются *критическими.* Равенство $f'(x_0) = 0$ означает, что касательная к графику функции в точке $x_0$ параллельна оси $Ox$. Если в точке $x_0$ производной не существует, то либо касательная вертикальна, либо в этой точке нет определенной касательной.

Если непрерывная функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x_0$, то точка $x_0$ является критической точкой функции.

При решении задач можно пользоваться упрощенной формулировкой **первого достаточного условия экстремума** функции: если производная непрерывной в точке $x_0$ функции $f(x)$ при переходе через точку $x_0$ слева направо меняет знак с плюса на минус, то $x_0$ – точка максимума; если с минуса на плюс, то $x_0$ – точка минимума; если знак производной не меняется, то в данной точке экстремум отсутствует.

Иногда более удобным оказывается **второе достаточное условие** экстремума: пусть функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ производные первого и второго порядка. Если в точке $x_0$ производная $f'(x) = 0$, но $f'{}'$, то $x_0$ – точка максимума при $f''(x_0) < 0$ и точка минимума при $f''(x_0) > 0$.

Исследовать функцию на экстремум значит найти все ее экстремумы.

Для нахождения точек локального экстремума непрерывной функции можно использовать следующую схему:

1) находим производную $y' = f'(x)$;

2) находим критические точки функции и выбираем принадлежащие области исследования;

3) определяем знак производной слева и справа от каждой из выбранных критических точек либо находим вторую производную $f''(x)$ и определяем ее знак в каждой выбранной критической точке;

4) делаем выводы о наличии экстремумов функции, используя достаточное условие экстремума;

5) вычисляем экстремальные значения функции.

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции.

*Глобальные экстремумы* непрерывной на отрезке $[a;\ b]$ функции могут достигаться в точках локальных экстремумов или на границах отрезка, поэтому для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, можно использовать следующее правило:

1) находим критические точки, принадлежащие интервалу $(a;\ b)$, и вычисляем значение функции в этих точках;

2) находим значение функции на концах отрезка, т. е. $f(a)$ и $f(b)$;

3) сравниваем все найденные значения и выбираем наименьшее (наибольшее).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и не имеет на нем критических точек, то это означает, что на этом отрезке функция монотонно возрастает или убывает. Поэтому свое наибольшее значение функция принимает на одном конце отрезка, а наименьшее – на другом.

В задачах прикладного характера ищется, как правило, что-то одно – либо наибольшее значение, либо наименьшее, поэтому при решении задачи можно воспользоваться свойством: если непрерывная в некотором интервале (конечном или бесконечном) функция имеет только одну точку экстремума – точку максимума (минимума), то в этой точке достигается наибольшее (наименьшее) значение функции в данном интервале.

**Задание 22.** На прямой $y = 5$ найдите точку $A(x;\ 5)$, наименее удаленную от точек $B(0;\ 0)$ и $C(12;\ 4)$.

***Решение.*** Найдем сумму расстояний от точки $A(x;\ 5)$ до точек $B(0;\ 0)$ и $C(12;\ 4)$:

$$f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (5-0)^2} + \sqrt{(x-12)^2 + (5-4)^2},$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 25} + \sqrt{(x-12)^2 + 1}.$$

Заметим, что $f(x)$ непрерывна и дифференцируема. Найдем производную функции $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+25}} + \frac{x-12}{\sqrt{(x-12)^2+1}}.$$

Приравнивая производную нулю, находим стационарную точку $x =$ $= 10$. Поскольку $f'(0) < 0$, $f'(12) > 0$, то в точке $x = 10$ функция принимает наименьшее значение.

***Ответ*:** $A(10;\ 5)$.

**Задание 23.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, где $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x - 8$, $[a;\ b] = [-3;\ 6]$.

***Решение.*** Заметим, что $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на данном отрезке. Вычисления дают:

1. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 36 = 0 \Leftrightarrow x = -2$, $x = 3$ (обе точки лежат внутри данного промежутка).

2. Находим $f(-2) = 36$, $f(3) = -89$.

3. Вычисляем значения функции на концах промежутка:

$$f(-3) = 19, \quad f(6) = 100.$$

В итоге имеем:

$$\max_{[-3;6]} f(x) = max\{-89, 19, 36, 100\} = 100 = f(6),$$

$$\min_{[-3;6]} f(x) = min\{-89, 19, 36, 100\} = -89 = f(3).$$

***Ответ***: $\max_{[-3;6]} f(6) = 100$, $\min_{[-3;6]} f(3) = -89$.

## § 6. Вогнутость и выпуклость графика функции. Точки перегиба

Два человека бесплодно трудились и без пользы старались: тот, кто копил богатство и не пользовался им, и тот, кто учился наукам, но не применял их.

*Саади*

График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется вогнутым (выпуклым) на промежутке $(a; b)$, если соответствующая часть кривой $y = f(x)$ расположена выше (ниже) касательной, проведенной в любой ее точке.

**Достаточное условие** выпуклости и вогнутости графика функции: если во всех точках интервала $(a; b)$ вторая производная функции $f(x)$ отрицательна (положительна), то кривая $y = f(x)$ на этом интервале выпукла (вогнута).

Точка, отделяющая выпуклую часть непрерывной кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба* кривой.

Если для функции $y = f(x)$ вторая производная в точке $x_0$ равна нулю или не существует и при переходе через эту точку вторая производная меняет знак, то точка на кривой является точкой перегиба.

**Задание 24.** Найдите точки перегиба кривых:

1) $y = x^3 - 3x^2 + 2$; 2) $y = \frac{1}{x^3} + \frac{3x^2}{16}$.

***Решение.*** Находим точки, в которых $y'' = 0$ или не существует, а кривая непрерывна.

1. Производная второго порядка

$$y' = 3x^2 - 6x; \quad y'' = 6x - 6.$$

Здесь $y'' = 0$ в точке $x = 1$. При переходе через эту точку вторая производная меняет знак, а сама функция непрерывна в этой точке. Следовательно, точка (1; 0) является точкой перегиба кривой.

2. Производная второго порядка

$$y' = \frac{-3}{x^4} + \frac{6x}{16};\quad y'' = \frac{12}{x^5} + \frac{3}{8}.$$

Здесь $y'' = 0$ при $x$ = –2 и не существует при $x$ = 0. При переходе через точку $x$ = –2 вторая производная меняет знак, а сама функция непрерывна в этой точке. Следовательно, точка (–2; 0,625) является точкой перегиба кривой.

$x$ = 0 не может быть абсциссой точки перегиба, так как в этой точке кривая разрывна. Однако при переходе через точку $x$ = 0 кривая меняет направление выпуклости.

***Ответ*:** 1) (1; 0); 2) (–2; 0,625).

## § 7. Построение графиков функций

Говори с людьми в соответствии
с их разумом.

*Саади*

**Общая схема исследования функции и построения ее графика:**

1. Найти область определения функции ($Dom\, f$). Исследовать поведение $f(x)$ в граничных точках $Dom\, f$.

2. Установить, четной или нечетной является $f(x)$.

3. Установить, является ли $f(x)$ периодической.

4. Исследовать $f(x)$ на непрерывность. Найти точки разрыва и определить их характер. Указать вертикальные асимптоты.

5. Найти уравнения наклонных асимптот.

6. Найти нули $f(x)$. Найти интервалы знакопостоянства.

7. Вычислить $f'(x)$. Исследовать $f(x)$ на монотонность и экстремумы.

8. Вычислить $f''(x)$. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.

9. Свести результаты в таблицу, добавить значения функции в характерных точках (экстремума, перегиба и т. д.) и построить эскиз графика $f(x)$.

**Задание 25.** Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график:

I. $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$.

II. $f(x) = xe^{\frac{-x^2}{2}}$.

***Решение для варианта I***

1. Очевидно, что $Dom\, f = R \backslash \{-1\}$.

2. $f(-x) = \frac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2} = -\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. Заметим, что $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$. Следовательно, функция $f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция $x^2$ не является периодической, так как $\forall\ T \neq 0$ $(x+T)^2 =$ $= x^2 + 2xT + T^2 \neq x^2$.

Аналогично убеждаемся в том, что $x^3$ не является периодической функцией. Следовательно, $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ не является периодической функцией.

4. $x = -1 \notin Dom\, f \Rightarrow x = -1$ – точка разрыва. Найдем $f(-1 \pm 0)$:

$$f(-1 \pm 0) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} = -\infty,$$

следовательно, прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота.

5. Найдем уравнения наклонных асимптот:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \pm\infty} \left( \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2} - x \right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{-5x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2} = -5.$$

Следовательно, $y = x - 5$ – наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

6. Заметим, что $f(0) = -1$ и $f(x) = 0$ при $x = 1$.

7. Найдем производную функции:

$$f'(x) = \frac{3(x-1)^2(x+1)^2 - 2(x-1)^3(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{(x-1)^2(3x+3-2x+2)}{(x+1)^3} = \frac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}.$$

Тогда, исследуя знаки $f'(x)$ методом интервалов, заключаем, что $f(x)$ возрастает на $(-\infty; -5)$, $(-1; +\infty)$ и убывает на $(-5; -1)$. Таким образом, в точке $x = -5$ $f(x)$ имеет экстремум: $f_{max} = f(-5) = -13{,}5$. В точке $x = 1$ экстремум не достигается. Однако указанные особенности поведения функции еще не позволяют нам однозначно судить о виде графика $f(x)$. Очевидно, что окончательный ответ на этот вопрос можно получить, только исследовав промежутки выпуклости $f(x)$.

8. Находим производную второго порядка: $f''(x) = \frac{24(x-1)}{(x+1)^4}$. Точка возможного перегиба $x$ = 1, интервалы выпуклости (–∞; –1), (–1; 1) и [1; +∞). Установим знаки $f''(x)$ на каждом из этих интервалов. Заключаем, что $f(x)$ выпукла на (–∞; –1] и (–1; 1] и вогнута на [1; +∞). Точка $x$ = 1 является точкой перегиба.

9. Сведем полученные данные в таблицу, добавим значение $f$(10) = 6,05:

| $x$ | $(-\infty;-5)$ | –5 | $(-5;-1)$ | –1 | $(-1;1)$ | 1 | $(1;\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | – | –13,5 | – | Точка разрыва второго рода | – | 0 | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | – | Не существует | + | 0 | + |
| | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |
| $f''(x)$ | – | | – | Не существует | – | 0 | + |
| | Функция выпукла | | Функция выпукла | | Функция выпукла | Точка перегиба | Функция вогнута |

Эскиз графика $f(x)$ представлен на рис. 19.

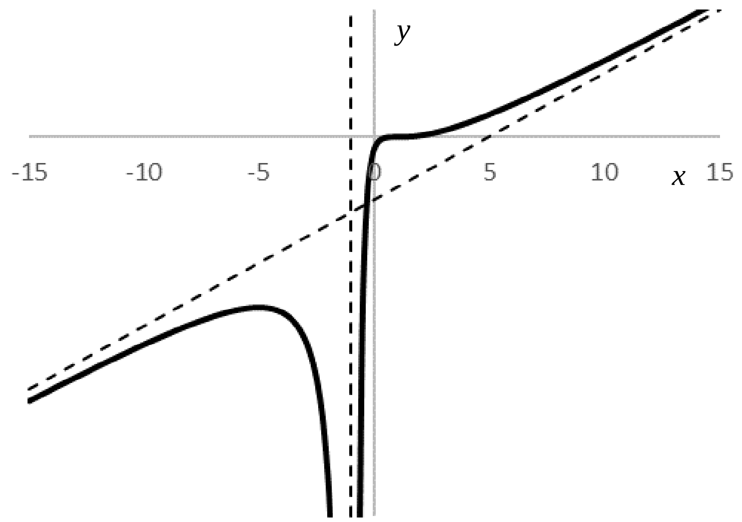


Рис. 19

***Решение для варианта II***

1. Функция определена и непрерывна на $\boldsymbol{R}$.

2. Функция нечетная: $f(-x) = -xe^{\frac{-(-x)^2}{2}} = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

3. Не периодическая.

4. Точек разрыва нет, следовательно, нет вертикальных асимптот.

5. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 0$$

(предел находится по правилу Лопиталя). Итак, наклонная асимптота имеет уравнение $y = 0$.

6. График проходит через начало координат и других общих точек с осями координат не имеет. На $(-\infty;\ 0)$ имеем $f(x) < 0$, следовательно, график расположен ниже оси абсцисс. На $(0;+\infty)$ имеем $f(x) > 0$, следовательно, график расположен выше оси абсцисс.

7. Исследуем функцию с помощью $f'(x)$. Имеем $f'(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}(1 - x^2)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 1$ – критические точки. На $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$ функция убывает, так как $f'(x) < 0$. На $(-1{,}1)$ функция возрастает, так как $f'(x) > 0$. Следовательно, $x = -1$ – точка минимума, $f(-1) = -e^{\frac{-1}{2}}$; $x = 1$ – точка максимума, $f(1) = e^{\frac{-1}{2}}$.

8. Исследуем функцию с помощью $f''(x)$. Имеем $f''(x) =$ $= e^{\frac{-x^2}{2}}(x^3 - 3x)$. Отсюда $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x_3 = -\sqrt{3},\ x_0 = 0,\ x_4 = \sqrt{3}$ – точки возможного перегиба. На интервалах $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)$ и $\left(0;\sqrt{3}\right)$ $f''(x) < 0$ – график выпуклый вверх. На интервалах $\left(-\sqrt{3};0\right)$ и $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ $f''(x) > 0$ – график выпуклый вниз. Точки перегиба $x_0,\ x_3,\ x_4$. Значения функции в этих точках $f\left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm\sqrt{3}e^{\frac{-3}{2}}$, $f(0) = 0$.

9. Сводим результаты исследования в таблицу, пользуясь нечетностью функции:

| $x$ | $(0;1)$ | $1$ | $\left(1;\sqrt{3}\right)$ | $\sqrt{3}$ | $\left(\sqrt{3};+\infty\right)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | + | $e^{\frac{-1}{2}}$ | + | $\sqrt{3}e^{\frac{-3}{2}}$ | + |
| $f'(x)$ | + | 0 | – | $-2e^{\frac{-3}{2}}$ | – |
| | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | | $\searrow$ |
| $f''(x)$ | – | $-2e^{\frac{-1}{2}}$ | – | 0 | + |
| | Функция выпукла | | Функция выпукла | Точка перегиба | Функция вогнута |

Строим эскиз графика (рис. 20).

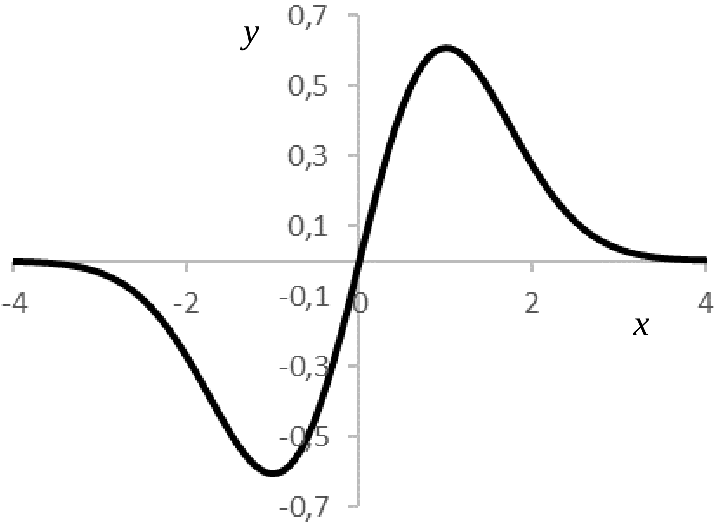


Рис. 20

## § 8. Задания для самостоятельного решения

### *8.1. Базовые задания*

1. Найдите производные функций:
1) $y = \frac{x^2}{3x+1}$ при $x = -1$;  2) $y = cos(7 + 3x^2)$;  3) $y = x^2 e^{-3x}$.

2. Найдите производную третьего порядка функции $y = sin\,(3x - 2)$.

3. Найдите производную второго порядка функции $y = x^3 + 2\sqrt{x}$.

4. Найдите дифференциал функции $y = \ln\,(1 + cos^2 x)$.

5. Найдите наклонные асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2 - 5x}{3 - x}$.

6. Найдите асимптоты графика функции $y = \frac{x+2}{4x^2 - 1}$.

7. Найдите минимум функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 2$.

8. Материальная точка движется по закону $s = 5t + 3\cos 2\,t$. Найдите ее скорость и ускорение в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$.

9. Из 62 целых спичек составьте прямоугольник наибольшей площади.

10. Имеется декоративное ограждение длиной 8 м для того, чтобы огородить клумбу в форме кругового сектора. Какой необходимо взять радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

11. Если источником тока служит электрический элемент, то эффект $P$ (Вт), получающийся при включении в цепь сопротивление $R$ (Ом), выражается формулой

$$P = \frac{E^2R}{(R+r)^2},$$

где $E$ = 12 – электродвижущая сила (В); $r$ = 0,1 – внутреннее сопротивление (Ом).

Найдите наибольший эффект при различных значениях $R$.

### *8.2. Профильные задания*

1. Найдите производную функции:

1) $y = \frac{x^2 sin3x}{3x+1}$ при $x = \frac{\pi}{3}$; 2) $y = e^{2x}\cos^3 x^2$;

3) $y = (x^2+1)^{3x}$ при $x = 1$; 4) $xln(2y) - yln(3x) = 5$;

5) $x = cos^3 2t, y = sin^2 2t$.

2. Исследуйте методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, постройте ее график:

1) $y = \frac{x^2-x}{x+1}$; 2) $y = (x-2)e^{-3x}$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = xarctgx - 0{,}5\ln\left(x^2+1\right)$$

на отрезке $[-1; 1]$.

4. Расстояние *AB* от поселка *A* до автомагистрали составляет 80 км. Расстояние от города *C* по прямолинейному участку автомагистрали до *B* равно 130 км. Необходимо построить прямолинейный участок дороги *AD* до автомагистрали, чтобы время на перевозку по маршруту *ADC* было минимальным. Максимальная скорость на участке *AD* составляет 100 км/ч, а на участке *AB* – 60 км/ч.

5. К городу *A* проведена прямолинейная железная дорога. Расстояние от населенного пункта *B* до железной дороги равно 60 км, а расстояние до

города $A$ равно 100 км. Из пункта $B$ к железной дороге необходимо провести прямолинейный участок автомобильной дороги и оборудовать пункт $C$ для перегрузки товара. Стоимость перевозки груза по участку $BC$ составляет $x$ руб/км, а по железной дороге – $y$ руб/км. Определите соотношение $\delta$ стоимости перевозки груза по участкам $BC$ и $AC$, при котором невыгодно оборудовать пункт перегрузки $C$.

6. Болванку цилиндрической формы $x^2 + y^2 = 4$ разрезали двумя плоскостями $z = 0$ и $6x + 8y + z = 10$. Найдите наибольшую высоту цилиндрической заготовки.

7. Сумма кубов двух положительных чисел равна 250. Определите наибольшую сумму этих чисел.

8. Даны три положительных числа. Произведение первого и второго равно 40, а произведение первого и третьего равно 24. Определите наименьшую сумму этих чисел.

9. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 и 50 км/ч. Улицы пересекаются под углом 60°. В начальный момент времени машины находятся на расстоянии 5 и 4 км от перекрестка соответственно. Через сколько минут расстояние между ними станет наименьшим?

10. При конструировании трансформатора переменного тока важно заполнить внутренность катушки железным крестообразным сердечником возможно большей площади. Каковы должны быть размеры сечения сердечника, если радиус катушки равен 10 см?

11. Два коридора шириной 6,4 и 2,7 м пересекаются под прямым углом. Определить наибольшую длину лестницы, которую можно перенести в горизонтальном положении из одного коридора в другой.

12. Бочка высотой 2 м стоит на горизонтальной плоскости. Определите положение отверстия, при котором дальность струи будет наибольшей, если скорость вытекающей жидкости $v = 0{,}6\sqrt{2gx}$, где $x$ – глубина расположения отверстия.

13. Найдите наименьшее расстояние от точки $A(0;\ 1{,}25)$ до параболы $y = x^2$.