МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

М.А. Шестакова, Ю.А. Егоров, Л.А. Ванюшина

ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Учебное пособие

Тверь 2014

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК 22.161.5я7

Рецензенты: доктор технических наук профессор кафедры физики ТвГТУ Болотов А.Н.; кандидат физико-математических наук доцент кафедры математических методов современного естествознания ТвГУ Чемарина Ю.В.

Шестакова, М.А. Приложения теории функций комплексного переменного / М.А. Шестакова, Ю.А. Егоров, Л.А. Ванюшина. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2014. 100 с.

Приведены основные понятия ТФКП, расчетные формулы и примеры решения задач.

Рассматриваются преобразование Лапласа и основные формы операционного исчисления: изображения простейших функций, свойства преобразования Лапласа и их применение при вычислении изображений.

Способствует формированию навыков решения прикладных задач по ТФКП.

Предназначено для использования в качестве дополнительной литературы при освоении дисциплин «Теория функций комплексного переменного» и «Операционное исчисление» студентами дневной формы обучения. Наличие вариантов заданий позволяет рекомендовать данное пособие также при самостоятельном изучении теории функций комплексного переменного.

ISBN

Мнимые числа – это прекрасное
и чудесное прибежище Божественного духа,
почти что сочетание бытия с небытием»

Г.В. Лейбниц

Глава 1. Комплексные числа

Комплексные числа широко применяются в современной математике и различных ее приложениях. Они используются в алгебре, с их помощью выражают решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, их применяют для вычисления интегралов, а в физике – для измерений напряжения, сопротивления в цепи переменного тока. Хотя комплексные числа и не выражают количества, как это имеет место у действительных чисел, применение их бывает полезно при решении ряда задач, составленных в терминах действительных чисел, например о прохождении тока через проводник, о профиле крыла самолета. Комплексные числа возникли в XVI веке в связи с задачей решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом. Вначале корни таких уравнений отбрасывались как невозможные или «мнимые». Но впоследствии было обнаружено, что хотя мнимые корни и не выражают величины, так как их невозможно сравнивать друг с другом, т. е. определять, какое мнимое число больше, а какое меньше, но над ними можно производить четыре алгебраических действия: сложение, вычитание, умножение и деление. Причем алгебраические действия над мнимыми корнями сохраняют свойства, присущие таковым над действительными числами, что и послужило основанием для именования их мнимыми числами («Алгебра» итальянского инженера Р. Бомбелли, 1572 г.). Символ «i» для мнимой единицы в 1777 г. предложил использовать Л. Эйлер, а термин «комплексное число» ввел в 1881 г. К. Вейерштрасс.

§ 1. Понятие комплексного числа
Арифметические операции над комплексными числами

Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x, y – действительные числа; i – мнимая единица (см. с. 5). Число x называется *действительной частью* числа z и обозначается $\mathrm{Re}(z)$ (от франц. reele – «действительный»), а число y – *мнимой частью* числа z и обозначается $\mathrm{Im}(z)$ (от франц. imaginaire – «мнимый»), т. е. $x = \mathrm{Re}(z)$, $y = \mathrm{Im}(z)$. Форма записи комплексного числа $z = x + iy$ является наиболее распространенной и называется *алгебраической*.

Действительное число является частным случаем комплексного числа $z = x + iy$ при $y = 0$. Это означает, что множество действительных чисел $\mathfrak{R}$ является подмножеством множества всех комплексных чисел.

Комплексные числа вида $z = x + iy$, не являющиеся действительными (т. е. при $y \neq 0$), называются *мнимыми*, а числа вида $z = iy$ (т. е. при $x = 0$, $y \neq 0$) – *чисто мнимыми.* Число 0 – единственное комплексное число, которое является одновременно и действительным, и чисто мнимым. Числа $z = 0 + i \cdot 0$, $z = 1 + i \cdot 0$ и $z = 0 + i \cdot 1$ называют нулем, единицей и мнимой единицей соответственно.

Множество всех комплексных чисел обозначается символом $\mathbb{C}$.

Комплексные числа называются *сопряженными,* если у них равны действительные части, а мнимые противоположны по знаку. Число, сопряженное комплексному числу $z = x + iy$, обозначается $\bar{z} = x - iy$.

При этом справедливы очевидные соотношения:

$$\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad \bar{\bar{z}} = z.$$

Из определения следует, что число, сопряженное действительному числу, совпадает с ним: $\bar{x} = x,\ x \in \mathfrak{R}$.

С помощью комплексного сопряжения вещественную и мнимую части комплексного числа можно представить в виде

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{i \cdot 2}.$$

Два комплексных числа, $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, называются *равными* при условии равенства их действительных и мнимых частей, т. е. $z_1 = z_2$, если $\mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Re}(z_2)$, $\mathrm{Im}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2)$. Например, $z = 0$, если $\mathrm{Re}(z) = 0$, $\mathrm{Im}(z) = 0$.

Отметим, что операция сравнения для комплексных чисел не определена.

Арифметические операции на множестве комплексных чисел определяются следующим образом.

1. *Суммой (разностью)* двух комплексных чисел, $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2). \tag{1}$$

Из определения вытекает правило сложения (вычитания) комплексных чисел: при сложении (вычитании) комплексных чисел складываются (вычитаются) действительные и мнимые части соответственно.

2. *Произведением* двух комплексных чисел, $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, называется комплексное число, определяемое равенством

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (2)$$

В частности:

a) $i^2 = (0+i)(0+i) = (0-1) + i(0+0) = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^3 \cdot i = -i \cdot i = 1\ldots$ Следовательно, *мнимая единица есть число, квадрат которого равен* -1, и этим объясняется название числа i.

b) $(x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2$, т. е. произведение двух сопряженных комплексных чисел есть действительное неотрицательное число.

Как несложно убедиться, умножение можно выполнить, непосредственно раскрывая скобки по обычным правилам и учитывая при этом, что $i^2 = -1$.

3. *Частным* двух комплексных чисел, $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, называется комплексное число, определяемое равенством

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0). \qquad (3)$$

При нахождении частного можно использовать приведенное выше свойство произведения сопряженных чисел. Для того чтобы разделить комплексное число z_1 на комплексное число z_2, следует домножить числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2}$ на число, сопряженное знаменателю, т. е. на $x_2 - iy_2$.

Заметим, что в результате выполнения арифметических действий над комплексными числами всегда получается комплексное число.

Как видно из приведенных правил, все арифметические операции над комплексными числами определяются естественным образом из правил сложения и умножения многочленов $x_1 + iy_1$ и $x_2 + iy_2$, поэтому громоздкие формулы для умножения и деления комплексных чисел можно не запоминать.

Операции вычитания и деления являются обратными к операциям сложения и умножения соответственно.

Непосредственной проверкой легко установить, что операции сложения и умножения на множестве комплексных чисел обладают свойствами:

коммутативности:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1, \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

ассоциативности:

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3), \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

дистрибутивности:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3.$$

При этом числа нуль и единица на множестве комплексных чисел обладают стандартными свойствами:

$z+0=z$, $z\cdot 1=z$ для всех чисел z.

Всякое комплексное число z имеет противоположное число по сложению, равное $-z$, и всякое комплексное число $z\neq 0$ имеет обратное число по умножению, равное $\frac{1}{z}$.

Поскольку действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами, то порядок их выполнения, правило раскрытия скобок, формулы сокращенного умножения и деления, формулы корней квадратного уравнения и их свойства и т. д. сохраняются и для комплексных чисел.

Примеры

Замечание. В задачах часто используется следующая запись комплексных чисел: $z=x+yi$.

1. Даны комплексные числа 6, $-2i$, $4+7i$. *Найдите числа, комплексно-сопряженные к ним.*

Решение.

1) $z=6$, $\bar{z}=6$;

2) $z=-2i$, $\bar{z}=-(-2)i=2i$;

3) $z=4+7i$, $\bar{z}=4-7i$.

Ответ: 6, $2i$, $4-7i$.

2. Найдите действительную и мнимую части комплексного числа $(2-5i)^2$.

Решение.

Представим заданное число в виде $z=x+iy$. Для этого преобразуем искомое выражение, используя формулу квадрата суммы, $(2-5i)^2=4-20i+25i^2=-21-20i$. По определению действительной частью комплексного числа $z=x+iy$ является действительное число *x*, а мнимой – действительное число y, поэтому $\mathrm{Re}((2-5i)^2)=-21$, $\mathrm{Im}((2-5i)^2)=-20$.

Ответ: –21, –20.

3. Найдите сумму z_1+z_2 *и разность* z_1-z_2 *комплексных чисел* $z_1=-\frac{5}{2}-\frac{1}{2}i$ и $z_2=\frac{3}{2}+\frac{7}{2}i$.

Решение.

Для нахождения суммы и разности воспользуемся формулой (1):

$$z_1 + z_2 = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}\right)i = -\frac{2}{2} + \frac{6}{2}i = -1 + 3i;$$

$$z_1 - z_2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{7}{2}\right)i = -\frac{8}{2} - \frac{8}{2}i = -4 - 4i.$$

Ответ: $z_1 + z_2 = -1 + 3i$, $z_1 - z_2 = -4 - 4i$.

4. *Даны два комплексных числа,* $z_1 = 4 - 2i$ *и* $z_2 = 7 + 3i$. *Найдите их произведение.*

Решение.

Умножение комплексных чисел произведем как умножение многочленов с последующей заменой i^2 на –1:

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 2i)(7 + 3i) = 4 \cdot 7 + 4 \cdot 3i - 2i \cdot 7 - 2i \cdot 3i = 28 + 12i - 14i - 6i^2 =$$
$$= 28 - 2i - 6 \cdot (-1) = 28 - 2i + 6 = 34 - 2i.$$

Ответ: $34 - 2i$.

5. *Даны два комплексных числа,* $z_1 = -3 + 2i$ *и* $z_2 = 5 - 4i$. *Найдите частное* z_1/z_2.

Решение.

Домножим делимое и делитель на число, сопряженное с делителем, а умножение комплексных чисел произведем как умножение многочленов:

$$\frac{-3+2i}{5-4i} = \frac{(-3+2i)(5+4i)}{(5-4i)(5+4i)} = \frac{-15+10i-12i+8i^2}{25-16i^2} = \frac{-23-2i}{25+16} = -\frac{23}{41} - \frac{2}{41}i.$$

Ответ: $-\frac{23}{41} - \frac{2}{41}i$.

6. *Дано комплексное число* $z = 1 + \sqrt{3}i$. *Установите соответствие между операциями над данным числом и результатами их выполнения:*

1) $z \cdot \bar{z}$ 2) $\frac{z}{|\bar{z}|}$ 3) $z + \bar{z}$ 4) $z - \bar{z}$

A) $2\sqrt{3}$ B) 2 C) 4 D) $-2\sqrt{3}i$ E) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Решение.

Поскольку $z = 1 + \sqrt{3}i$, то $\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i$, $|\bar{z}| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, следовательно:

1) $z \cdot \bar{z} = (1 + \sqrt{3}i) \cdot (1 - \sqrt{3}i) = (1)^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 1 + 3 = 4$,

2) $\dfrac{z}{|\bar{z}|} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$,

3) $z + \bar{z} = 1 + \sqrt{3}i + (1 - \sqrt{3}i) = 2$,

4) $z - \bar{z} = 1 + \sqrt{3}i - (1 - \sqrt{3}i) = 2\sqrt{3}i$.

Ответ:

1	2	3	4
C	E	B	A

7. Решите систему линейных уравнений с комплексными коэффициентами:

a) $\begin{cases} 2i \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 1 - 5i, \\ i \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 = 1 + 3i; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2 \cdot x_1 + (-3+i) \cdot x_2 = 4, \\ (1+i) \cdot x_1 - i \cdot x_2 = 2 + 2i. \end{cases}$

Решение.

a) Решим данную систему матричным способом по формуле $X = A^{-1} \cdot B$, где $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – матрица неизвестных; A^{-1} – матрица, обратная к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 2i & -3 \\ i & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1-5i \\ 1+3i \end{pmatrix}$ – матрица свободных членов. Обратную матрицу A^{-1} найдем по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$, где A_{ij} – алгебраические дополнения элемента a_{ij}; Δ – определитель матрицы системы A. Для нашей матрицы $A_{11} = -2$, $A_{12} = -i$, $A_{21} = 3$, $A_{22} = 2i$, $\Delta = \begin{vmatrix} 2i & -3 \\ i & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 2i - (-3) \cdot i = -4i + 3i = -i$.

Следовательно, $A^{-1} = \dfrac{1}{-i} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -i & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{i} & \dfrac{-3}{i} \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 3i \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i & 3i \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1-5i \\ 1+3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2i \cdot (1-5i) + 3i \cdot (1+3i) \\ 1 \cdot (1-5i) - 2 \cdot (1+3i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19+i \\ -1-11i \end{pmatrix}.$$

b) Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3+i \\ 1+i & -i \end{vmatrix} = -2i - (1+i) \cdot (-3+i) = -2i + 3 + 3i - i + 1 = 4.$$

Определитель отличен от нуля, поэтому данную систему можно решить, используя метод Крамера: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$. Найдем определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -3+i \\ 2+2i & -i \end{vmatrix} = -4i - (2+2i)\cdot(-3+i) = -4i + 6 + 6i - 2i + 2 = 8;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1+i & 2+2i \end{vmatrix} = 2\cdot(2+2i) - 4\cdot(1+i) = 4 + 4i - 4 - 4i = 0.$$

Следовательно, по формулам Крамера получим:

$$x_1 = \frac{8}{4} = 2, \quad x_2 = \frac{0}{4} = 0.$$

Ответ: a) $(-19+i, -1-11i)$; b) $(2,0)$.

§ 2. Комплексная плоскость

Широкое признание и распространение комплексные числа получили лишь после их геометрической интерпретации как точек числовой плоскости, когда при помощи комплексных чисел удалось решить ряд практически важных задач, не разрешенных в области действительных чисел.

Геометрическое изображение комплексных чисел в виде точек или векторов на плоскости было введено в 1799 г. датским землемером К. Весселем и позже, в 1806 г., французским математиком Д. Арганом. Если комплексное число изображать вектором, то сложению и вычитанию комплексных чисел соответствуют эти же операции над векторами. Геометрическое истолкование комплексных чисел расширило область их применения. Например, они оказались полезными при изучении течения жидкости и решении задач теории упругости.

Подобно тому как для геометрического изображения действительных чисел используют точки числовой прямой, для изображения комплексных чисел используют *точки координатной плоскости Oxy*. Каждому комплексному числу $z = x + iy$ ставится в соответствие точка плоскости $M(x; y)$ (рис. 1.1). Это соответствие взаимнооднозначное, т. е. каждому комплексному числу соответствует единственная точка плоскости и каждой точке плоскости соответствует единственное комплексное число, причем действительным числам $z = x + i\cdot 0 = x$ соответствуют точки, расположенные на оси абсцисс Ox; чисто мнимым числам $z = 0 + iy = iy$ – точки, расположенные на оси ординат Oy. Поэтому ось Ox называется *действительной осью,* а ось Oy – *мнимой.*

Сопряженные комплексные числа изображаются точками плоскости, симметричными относительно действительной оси.

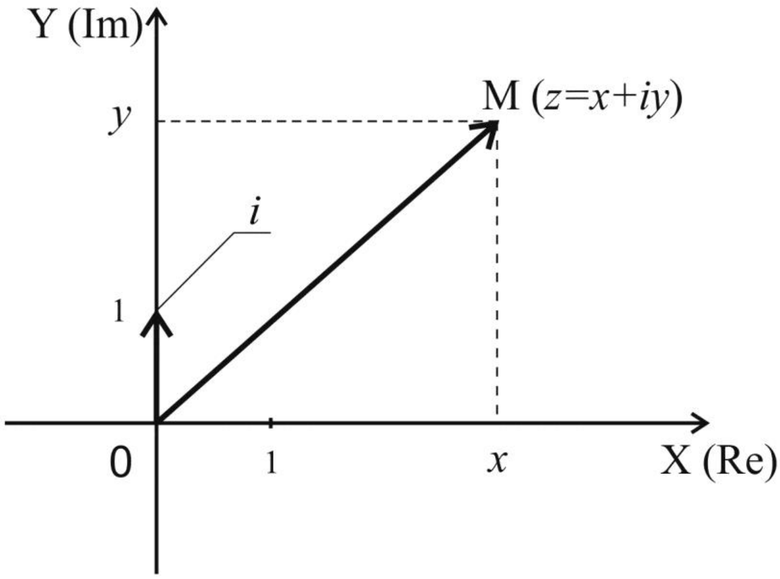

Рис. 1.1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется *комплексной*.

Примеры

1. Изобразите на комплексной плоскости комплексные числа: *a)* $z = -4$*;* *b)* $z = 3i$*;* *c)* $z = 2 - 3i$.

Решение.

а) Для числа $z = -4$ имеем: $x = -4$, $y = 0$. Отметим на комплексной плоскости точку $M(-4; 0)$ (рис. 1.2).

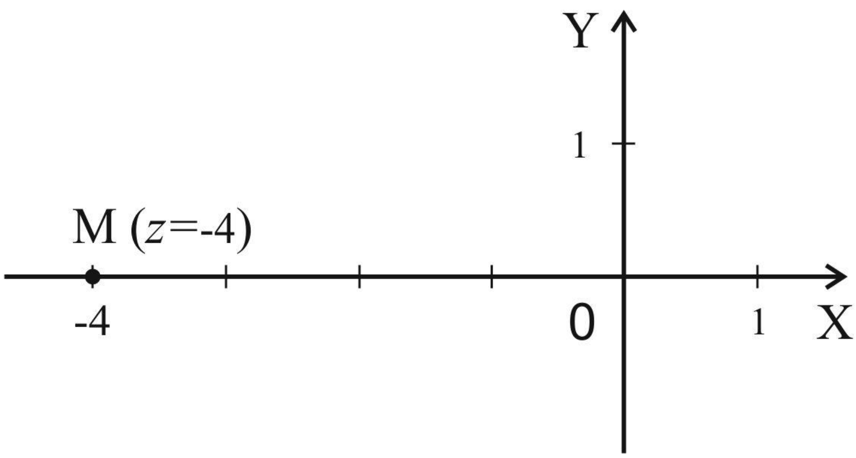

Рис. 1.2

b) Для числа $z = 3i$ имеем: $x = 0$, $y = 3$. Отметим на комплексной плоскости точку $M(0; 3)$ (рис. 1.3).

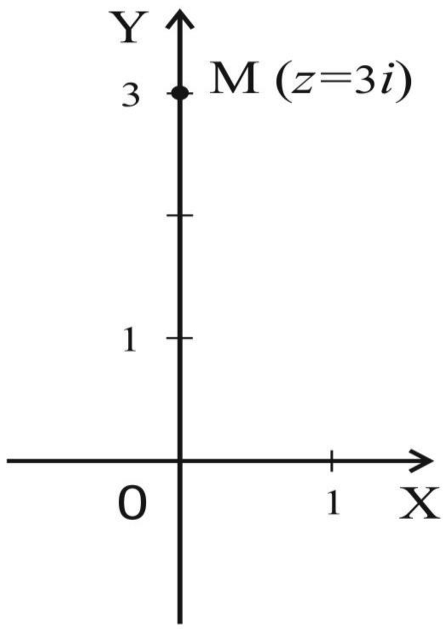

Рис. 1.3

c) Для числа $z = 2 - 3i$ имеем: $x = 2$, $y = -3$. Отметим на комплексной плоскости точку $M(2; -3)$ (рис. 1.4).

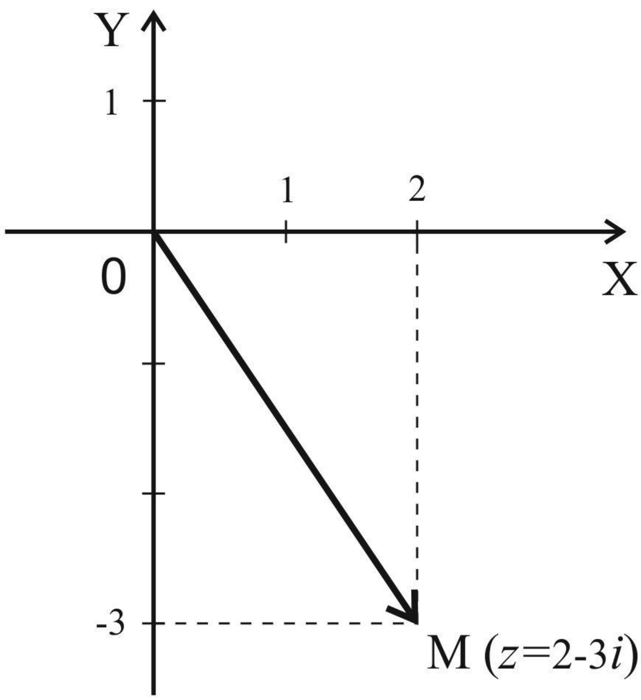

Рис. 1.4

2. Изобразите на комплексной плоскости множество D точек $z = x + iy$*, удовлетворяющих условию: a)* $\mathrm{Re}(z) \geq 1$*; b)* $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$, $0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$.

Решение.

а) Для комплексного числа $z = x + iy$ действительная часть – $x = \mathrm{Re}(z)$. Условие $\mathrm{Re}(z) \geq 1$, или $x \geq 1$, определяет множество всех точек, расположенных справа от прямой $x = 1$ и на самой прямой (рис. 1.5).

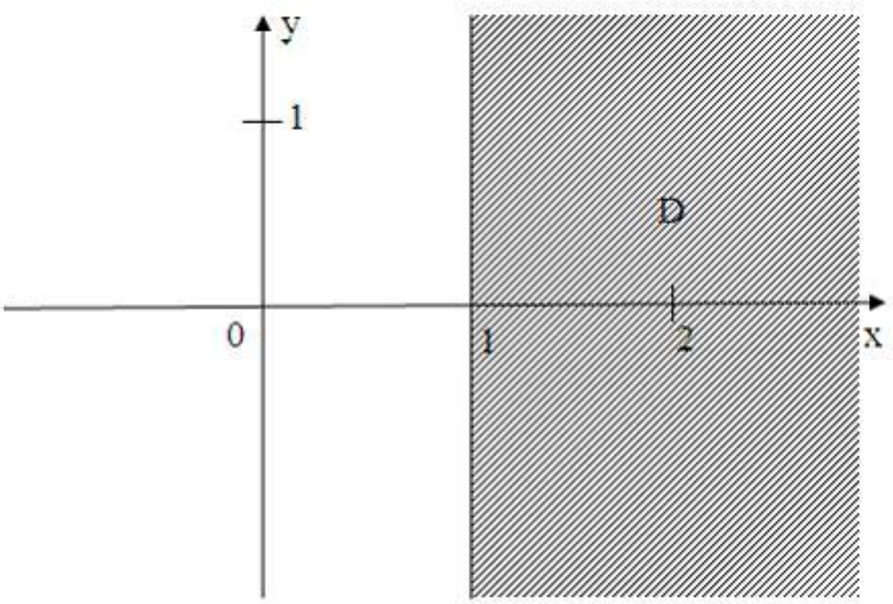

Рис. 1.5

b) Для комплексного числа $z = x + iy$ действительная часть – $x = \mathrm{Re}(z)$, мнимая часть – y = Im(z). Неравенства $0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$, $0 \leq \mathrm{Im}(z) \leq 1$ можно переписать в виде $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. Данные неравенства определяют на плоскости множество точек, расположенных внутри и на границах квадрата. Стороны квадрата расположены на прямых $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$ (рис. 1.6).

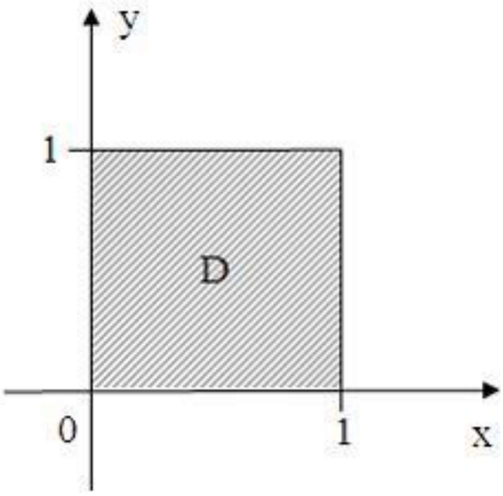

Рис. 1.6

Ответ: а) множество D – полуплоскость, ограниченная прямой $x=1$ (рис. 1.5); b) D – множество точек, расположенных внутри и на границе квадрата (рис. 1.6).

3. Укажите соответствие между областями и их геометрическими интерпретациями (рис. 1.7а–е):

1) $\mathrm{Re}(z) > 2$; 2) $\mathrm{Im}(z) > 2$; 3) $\mathrm{Re}(z) < 2$; 4) $-2 < \mathrm{Re}(z) < 2$.

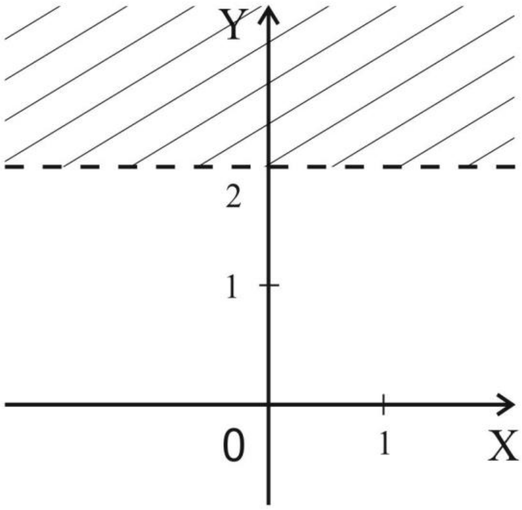

Рис. 1.7а

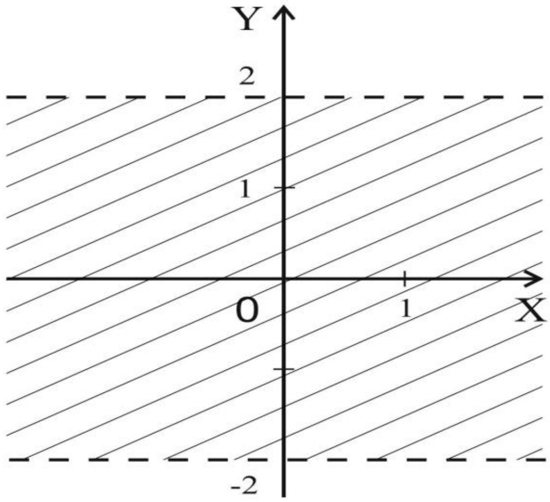

Рис. 1.7b

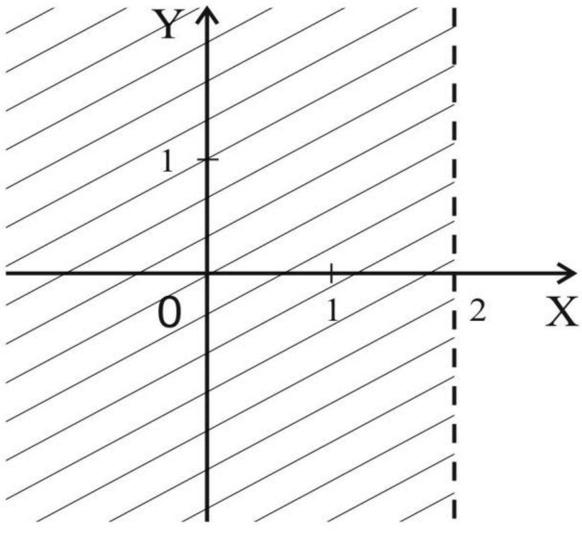

Рис. 1.7c

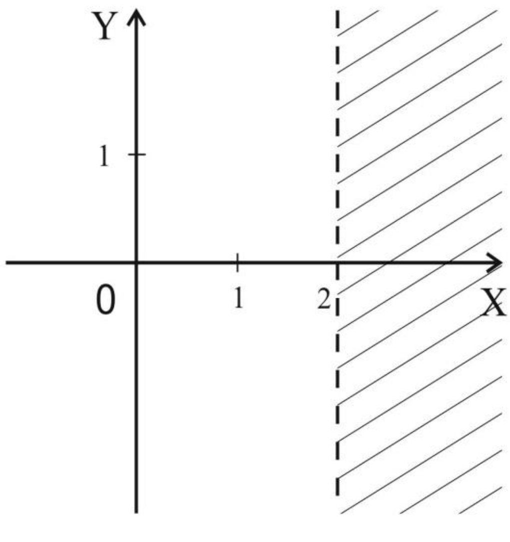

Рис. 1.7d

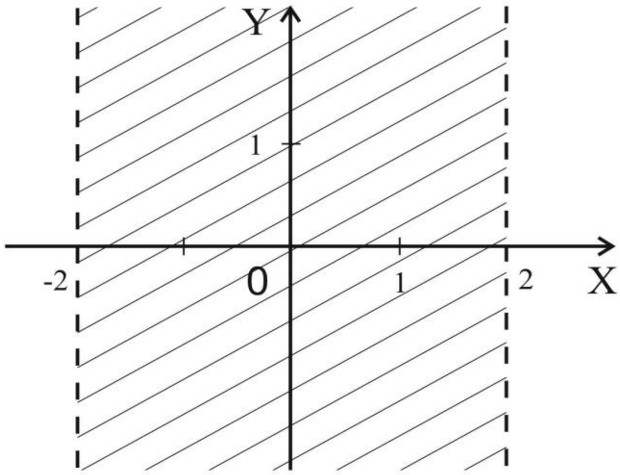

Рис. 1.7e

Решение:

1) условию $\operatorname{Re}(z) > 2$, или $x > 2$ соответствует множество всех точек комплексной плоскости, расположенных справа от прямой $x = 2$ (рис. 1.7d);

2) условию $\operatorname{Im}(z) > 2$, или $y > 2$ соответствует множество всех точек комплексной плоскости, расположенных выше прямой $y = 2$ (рис. 1.7a);

3) условию $\operatorname{Re}(z) < 2$, или $x < 2$ соответствует множество всех точек комплексной плоскости, расположенных слева от прямой $x = 2$ (рис. 1.7c);

4) условию $-2 < \operatorname{Re}(z) < 2$, или $-2 < x < 2$ соответствует множество всех точек комплексной плоскости, расположенных в полосе между прямыми $x = -2$ и $x = 2$ (рис. 1.7e).

Ответ:

1	2	3	4
7d	7a	7c	7e

§ 3. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа

С каждой точкой $M(x; y)$ комплексной плоскости связывают вектор $\overrightarrow{OM}$, исходящий из начала координат в точку, изображающую комплексное число z. Вектор $\overrightarrow{OM}$ называют *радиусом-вектором* точки M и также считают изображением комплексного числа.

Длина r радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$ называется *модулем комплексного числа* z и обозначается $|z|$, а угол φ, образованный радиусом-вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением действительной оси – *аргументом* *ком-плексного числа* z и обозначают $Argz$ (рис. 1.8). *Положительным направлением отсчета аргумента* комплексного числа принято считать направление против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке.

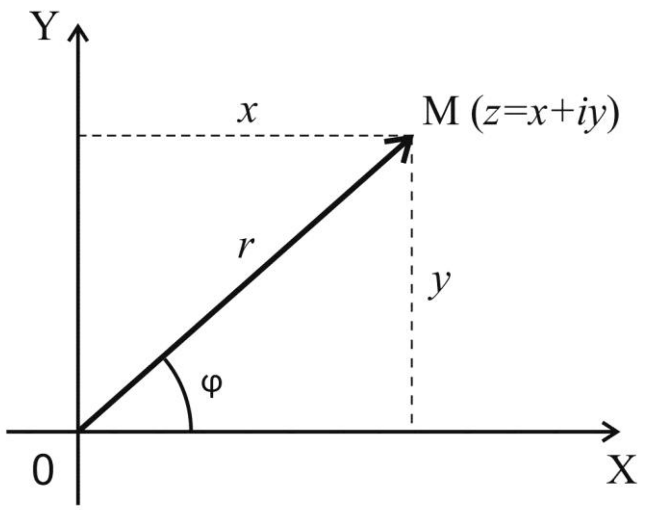

Рис. 1.8

Как видно из рис. 1.8, зависимость между действительной и мнимой частями комплексного числа $z = x + iy$, его модулем $r = |z|$ и аргументом φ выражается формулами:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}\,; \tag{4}$$

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi; \tag{5}$$

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \tag{6}$$

поэтому комплексное число $z = x + iy$ можно представить в виде

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{7}$$

Такое представление комплексного числа называется тригонометрической формой комплексного числа.

Модуль комплексного числа определен *однозначно* и всегда неотрицателен.

Заметим, что

$$|z| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = 0.$$

Поскольку $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |x|$ и $\sqrt{x^2 + y^2} \geq |y|$, то

$$|z| \geq |\mathrm{Re}(z)|, \quad |z| \geq |\mathrm{Im}(z)|.$$

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, то

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.$$

Геометрически данное равенство означает, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

Модули сопряженных комплексных чисел z и $\bar{z}$ одинаковы, а главные значения их аргументов отличаются только знаком:

$$|z| = |\bar{z}|, \ \arg z = -\arg \bar{z}.$$

Также справедливо равенство

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

Аргумент комплексного числа $z = x + iy$ можно найти, решив совместно систему уравнений (6). Эта система имеет множество решений, следовательно, аргумент комплексного числа определяется *неоднозначно.* Число $z = 0$ – единственное комплексное число, аргумент которого не определен.

Для угла φ, удовлетворяющего условию $-\pi < \varphi \le \pi$, используется обозначение $\varphi = \arg z$ (*главное значение аргумента*). Тогда $Arg\, z = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$. Главное значение аргумента комплексного числа определяется *однозначно,* либо из системы (6), либо по формуле $tg\varphi = \dfrac{y}{x}$ (при условии, что $x \ne 0$, $-\pi < \varphi \le \pi$):

$$\varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x > 0, \\ \pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x < 0, \quad y \ge 0, \\ -\pi + arctg\,\dfrac{y}{x}, & \text{если} \quad x < 0, \quad y < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

Если $x = 0$, то $\arg z = \dfrac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y$, где $\operatorname{sgn} x \overset{def}{=} \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x > 0, \\ 0, & \text{если} \quad x = 0, \\ -1, & \text{если} \quad x < 0. \end{cases}$

При нахождении главного значения аргумента комплексного числа z с помощью формулы (8) удобно пользоваться схемой, которая представлена на рис. 1.9, определив сначала, в какой четверти расположена точка $z = x + iy$.

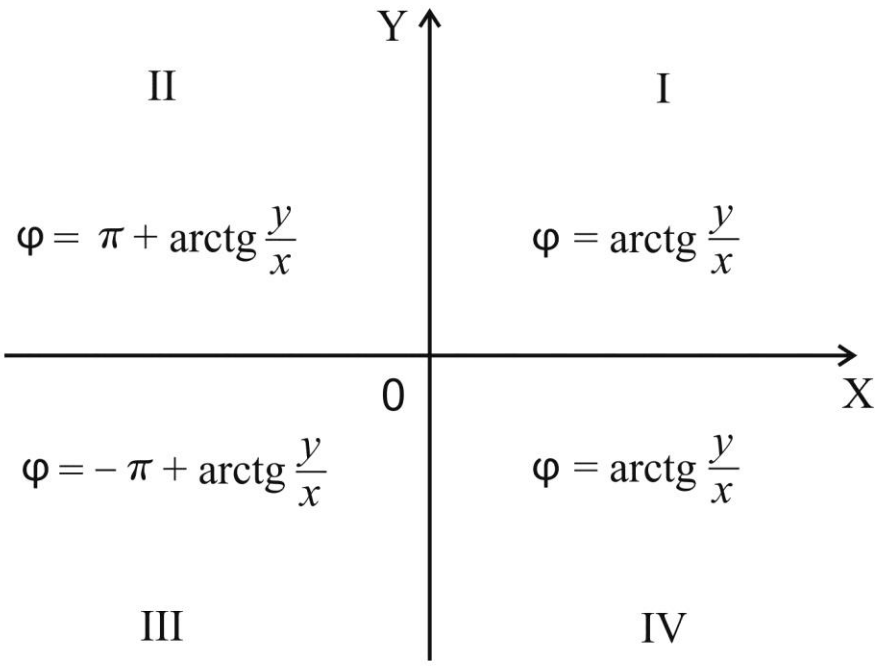

Рис. 1.9

Если точка z расположена на действительной оси ($z = x$), то главное значение равно нулю при $x > 0$ и π при $x < 0$; если точка z расположена на мнимой оси ($z = iy$), то главное значение аргумента равно $\frac{\pi}{2}$ при $y > 0$ и $-\frac{\pi}{2}$ при $y < 0$.

Два числа, записанные в тригонометрической форме, равны тогда и только тогда, когда равны их модули, а значения аргументов равны или отличаются на слагаемое $2\pi k$, $k \in Z$.

Тригонометрическая форма записи удобна при умножении и делении комплексных чисел.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)); \quad (9)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (10)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \; Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \; Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg\, z_1 - Arg\, z_2.$$

Особенно интересно умножение комплексного числа на i: $|i|=1$, $\arg i=\frac{\pi}{2}$, поэтому $|iz|=|z|$, $Arg(iz)=Argz+\frac{\pi}{2}$, значит, вектор, соответствующий числу iz, получается из вектора, соответствующего числу z, поворотом в положительном направлении на угол $\frac{\pi}{2}$.

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi \tag{11}$$

выражает показательную функцию через тригонометрические функции (см. гл. 2).

Заменив в этой формуле φ на $-\varphi$, получим:

$$e^{-i\varphi}=\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi)=\cos\varphi-i\sin\varphi.$$

Складывая и вычитая два последних равенства, легко выразить тригонометрические функции $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ через показательную:

$$\cos\varphi=\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2},\quad \sin\varphi=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}. \tag{12}$$

Эти формулы также называются формулами Эйлера.
Формула Эйлера (11) дает возможность записать комплексное число $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ в виде

$$z=re^{i\varphi}\ , \tag{13}$$

где $r=|z|$, $\varphi=Argz$.

Такая форма записи комплексного числа называется показательной. Функция $e^{i\varphi}$ периодическая с наименьшим периодом 2π (см. гл. 2), и можно считать $\varphi=\arg z$.

В показательной форме, как и в тригонометрической, легко проводить операции умножения, деления, возведения в степень, извлечения корня из комплексных чисел.

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами:

$$e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}=e^{i\varphi_1}\cdot e^{i\varphi_2},$$

$$e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=\frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}},$$

поэтому

$$\left(r\cdot e^{i\varphi}\right)^n=r^n\cdot e^{in\varphi},\ n\in \mathrm{Z}$$

и, соответственно:

$$z^n=|z|^n\cdot e^{in\cdot\arg z},\ n\in \mathrm{Z}.$$

Примеры

1. Найдите модуль комплексного числа $6+8i$.

Решение.

Модуль комплексного числа $z=x+iy$ определяется по формуле (4). В нашем случае $x=6$, $y=8$, поэтому $|z|=\sqrt{6^2+8^2}=\sqrt{100}=10$.

Ответ: 10.

2. Найдите аргумент числа: a) $z=1-i$; *b)* $z=-1-i$.

Решение.

a) $x=\mathrm{Re}(z)=1$, $y=\mathrm{Im}(z)=-1$, поэтому $r=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Аргумент $\varphi=Arg(1-i)=\dfrac{7\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$ находим, решая систему равенств (6): $\cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$,.$\sin\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

b) точка $z=-1-i$ лежит в третьей четверти, так как $x=\mathrm{Re}(z)=-1$, $y=\mathrm{Im}(z)=-1$, поэтому нужно найти такое решение уравнения $tg\varphi=\dfrac{y}{x}$, которое является углом третьей четверти. Имеем: $tg\varphi=1$, $\varphi=Arg(-1-i)=\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

Ответ: a) $\dfrac{7\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$; b) $\dfrac{5\pi}{4}+2\pi k$, $k\in Z$.

3. Изобразите на комплексной плоскости множество D *точек* $z=x+iy$, *удовлетворяющих условию: a)* $|z|\le 1$, $0\le\arg z\le\dfrac{\pi}{2}$, *b)* $0\le\mathrm{Im}(z)\le 1$, $0\le\arg z\le\dfrac{\pi}{4}$.

Решение.

a) Условию $|z|\le 1$ соответствует множество точек комплексной плоскости, расположенных внутри и на границе круга радиуса 1 с центром в начале координат, заключенных между лучами $\varphi=0$ (луч, исходящий из центра в направлении действительной оси Ox) и $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$ (луч, исходящий из центра в направлении мнимой оси Oy) (рис. 1.10).

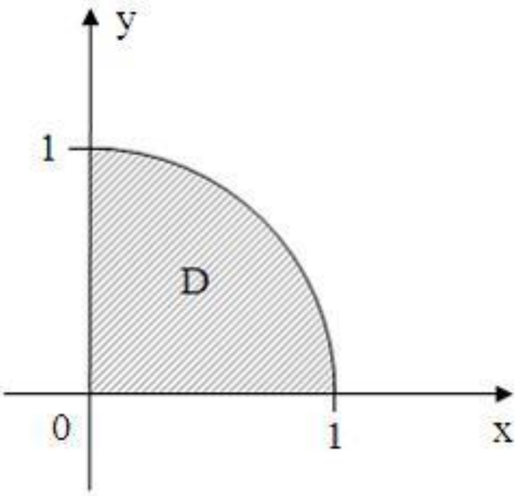

Рис. 1.10

b) Условию $0 \le \mathrm{Im}(z) \le 1$, или $0 \le y \le 1$, соответствует множество точек комплексной плоскости, расположенных внутри и на границе полосы, ограниченной прямыми $y = 0$ и $y = 1$. Условие $0 \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}$ задает множество точек, заключенных между лучами $\varphi = 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$, исходящими из начала координат. В пересечении получим множество *D*, изображенное на рис. 1.11.

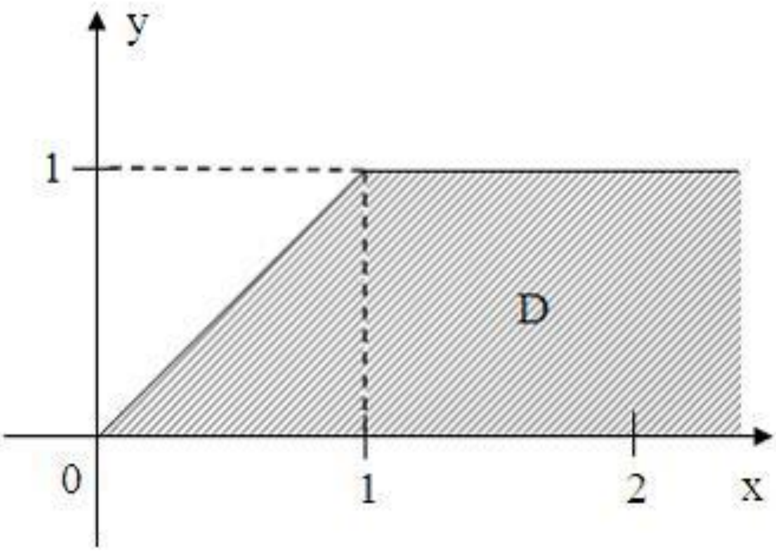

Рис. 1.11

Ответ: а) множество D – четверть единичного круга, лежащая в первой четверти (рис. 1.10); b) D – множество точек, изображенное на 1.11.

4. Представьте комплексные числа $z_1 = 1-\sqrt{3}i$, $z_2 = -2$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$, $z_5 = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$, $z_6 = i\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ *в тригонометрической и показательной формах.*

Решение.

Необходимо представить заданные числа в виде (7) – тригонометрическая форма записи и в виде (13) – показательная форма записи. Числа z_1, z_2, z_3 и z_4 записаны в алгебраической форме.

1) $z_1 = 1-\sqrt{3}i$, поэтому $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$. По формуле (4) найдем модуль комплексного числа $r = |z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$. Из формул (4) и (6) $\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{1}{2}$, $\sin\varphi = \frac{y}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получим аргумент комплексного числа z_1 (возьмем его главное значение): $\varphi = \arg z_1 = -\frac{\pi}{3}$. Подставив найденные значения r и φ в (7) и (13), получим: $z_1 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ – тригонометрическая форма записи; $z_1 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$ – показательная форма записи.

2) Если $z_2 = -2$, то $x = -2$, $y = 0$, $|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$, $\cos\varphi = \frac{-2}{2} = -1$, $\sin\varphi = \frac{0}{2} = 0$, $\varphi = \pi$. Подставив найденные значения r и φ в (7) и (13), получим: $z_2 = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$ – тригонометрическая форма записи; $z_2 = 2e^{\pi i}$ – показательная форма записи.

3) $z_3 = i$, поэтому $x = 0$, $y = 1$, $|z_3| = \sqrt{(0)^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$, $\sin\varphi = \frac{1}{1} = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Подставив найденные значения r и φ в (7) и (13), получим: $z_3 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ – тригонометрическая форма записи; $z_3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ – показательная форма записи.

4) Аналогично для $z_4 = -i$ получим: $z_4 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$ – тригонометрическая форма записи; $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$ – показательная форма записи.

5) Заданная запись числа $z_5 = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}$ не является тригонометрической формой записи. В нашем случае $x = \cos\frac{\pi}{7}$, $y = -\sin\frac{\pi}{7}$.

Найдем модуль числа по формуле (4): $|z_5| = \sqrt{\cos^2\frac{\pi}{7} + \left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2} = 1$.

Главное значение аргумента найдем по формуле $tg\varphi = \frac{y}{x}$.

$tg\varphi = \dfrac{-\sin\frac{\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}} = -tg\frac{\pi}{7} = tg\left(-\frac{\pi}{7}\right)$. Точка z_5 расположена в четвертой четверти $(\mathrm{Re}(z_5) > 0,\ \mathrm{Im}(z_5) < 0)$, поэтому $\varphi = -\frac{\pi}{7}$. $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Подставив найденные значения модуля и аргумента в формулы (7) и (13), получим: $z_5 = \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)$ – тригонометрическая форма записи; $z_5 = e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$ – показательная форма записи. Для данного числа z_5 тригонометрическую форму можно найти, используя свойства четности тригонометрических функций ($\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$):

$$z_5 = \cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right).$$

6) Число $z_6 = i\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right)$ – произведение двух комплексных чисел. Выполнив умножение, придем к алгебраической форме записи числа: $z_6 = i\left(\cos\frac{\pi}{7} - i\sin\frac{\pi}{7}\right) = i\cos\frac{\pi}{7} - i^2\sin\frac{\pi}{7} = \sin\frac{\pi}{7} + i\cos\frac{\pi}{7}$. Модуль числа найдем по формуле (4): $|z_6| = \sqrt{\sin^2\frac{\pi}{7} + \cos^2\frac{\pi}{7}} = 1$. Главное значение аргумента найдем, преобразовав тригонометрические выражения, используя формулы приведения: $\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)$, $\cos\frac{\pi}{7} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7}\right)$. Следовательно, $\arg z_6 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{7} = \frac{5\pi}{14}$. Подставив найденные значения модуля и аргумента в формулы (7) и (13), получим: $z_6 = \cos\frac{5\pi}{14} + i\sin\frac{5\pi}{14}$ – тригонометрическая форма записи; $z_5 = e^{i\frac{5\pi}{14}}$ – показательная форма записи.

Ответ:

1) $z = 2\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$, $z = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$;

2) $z = 2(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z = 2e^{\pi i}$;

3) $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$, $z = e^{i\cdot\frac{\pi}{2}}$;

4) $z = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$, $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$;

5) $z_5 = \cos\left(-\dfrac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$, $z_5 = e^{i\left(-\frac{\pi}{7}\right)}$;

6) $z_6 = \cos\dfrac{5\pi}{14} + i\sin\dfrac{5\pi}{14}$, $z_5 = e^{i\frac{5\pi}{14}}$.

5. Представьте в алгебраической форме комплексное число $z = 2\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$, *заданное в тригонометрической форме.*

Решение.

Алгебраическая форма комплексного числа имеет вид $z = x + iy$. Для нахождения x и y воспользуемся равенствами (5), а r и φ найдем, сравнив искомое число с тригонометрической формой комплексного числа (7). Имеем: $r = 2$, а $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, $x = 2\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}$, $y = 2\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. Значит, $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot i$.

Ответ: $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}\cdot i$.

6. Представьте в показательной форме комплексное число $z = \sqrt{2}\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)\right)$, *заданное в тригонометрической форме.*

Решение.

Показательная форма комплексного числа имеет вид (13). При сравнении искомого числа с тригонометрической формой комплексного числа (7) получим: $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. Следовательно, $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Ответ: $z = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

7. Выберите несколько вариантов ответа. Комплексное число $-2-2i$ *можно представить в виде:*

1) $-2e^{i\frac{5\pi}{4}}$; 2) $2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$; 3) $-2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$;

4) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 5) $2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

Решение.

Найдем модуль и аргумент заданного комплексного числа $z=-2-2i$. Для комплексного числа $z=x+iy$ модуль определяется по формуле (4): $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, а аргумент φ – из формул (6): $\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,|}$. В нашем случае $x=y=-2$, $r=|z|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, следовательно, $\cos\varphi=\sin\varphi=\frac{-2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Значит, $\varphi=\frac{5\pi}{4}$. Запишем число в тригонометрической и показательной формах: $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ и $z=|z|e^{i\varphi}$ соответственно. Имеем: $-2+2i=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=2\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

Ответ: 2) и 5).

8. Заданы два комплексных числа, z_1 *и* z_2 *(рис. 1.12). Найдите аргумент произведения* $\arg(z_1\cdot z_2)$ *и частного* $\arg\frac{z_1}{z_2}$ *(в градусах) данных чисел.*

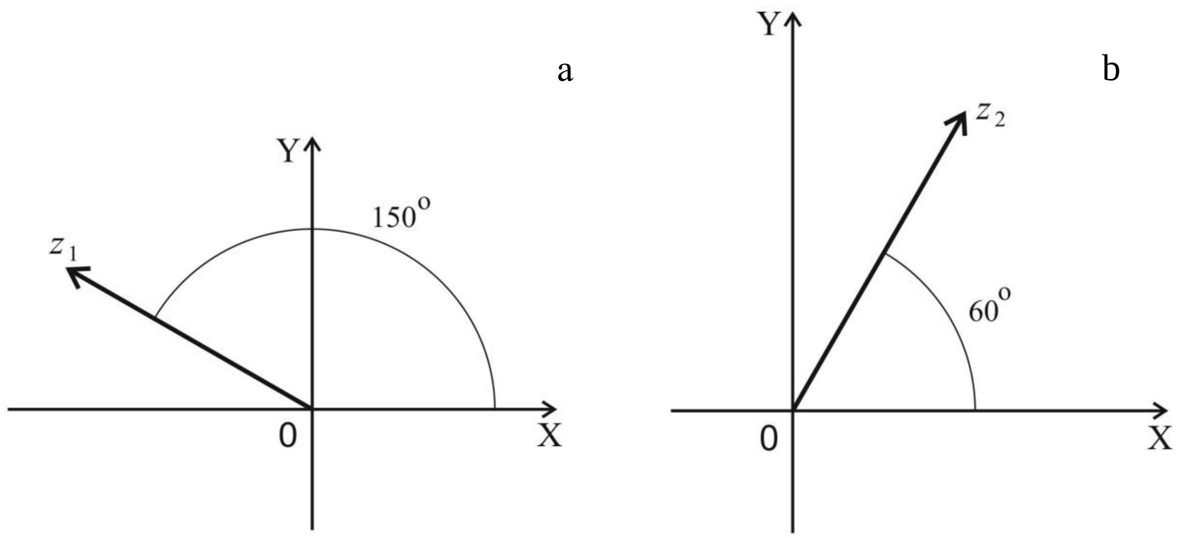

Рис. 1.12

Решение.

Как видно из рис. 1.12, $\arg z_1 = 150^0$, $\arg\cdot z_2 = 60^0$. Используя формулы (8) и (9), нетрудно получить: $\arg(z_1 \cdot z_2) = 150^0 + 60^0 = 210^0$, $\arg\frac{z_1}{z_2} = 150^0 - 60^0 = 90^0$.

Ответ: 210^0, 90^0.

§ 4. Формула Муавра. Корень из комплексного числа

Операция умножения комплексных чисел удовлетворяет ряду свойств, которые вытекают непосредственно из равенства (9).

Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению модулей этих чисел, а его аргумент – сумме аргументов этих чисел, причем эти свойства распространяются на любое конечное число множителей.

В соответствии с этими свойствами легко получить формулу *возведения* комплексного числа в *натуральную степень n (формула Муавра, 1707 г.):*

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + \sin n\varphi), \tag{14}$$

т. е. при возведении комплексного числа в целую степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Замечание. При возведении комплексного числа в целую степень рекомендуется сначала записать это число в тригонометрической форме.

Формула А. Муавра на рубеже XVII и XVIII веков была положена в основу общей теории корней *n*-й степени из любых комплексных чисел. Комплексное число $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$ называется *корнем n-й степени из комплексного числа* z, $n \in \mathbb{N}$, если $w^n = z$..

Приведем алгоритм извлечения корня из комплексного числа.

Пусть $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$. Используя определение корня и формулу Муавра, получим $z = \left[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right]^n = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$, или $r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi)$. Отсюда следует, что $\rho^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in Z$, поэтому $\rho = \sqrt[n]{r}$ и $\psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}$, $k \in Z$.

Окончательно получим формулу для нахождения корней n-й степени из комплексного числа z:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\mathrm{r}(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (15)$$

где $k = 0, 1, 2, n - 1$.

Если числу k придавать другие целые значения, то будут повторяться значения корня, полученные при $k = 0, 1, 2, n - 1$.

Таким образом, *корень n-й степени из комплексного числа (не равного нулю) существует и имеет n различных значений.*

В частности, при $n = 2$ получим два корня:

$$z_1 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right), \quad z_2 = \sqrt{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{2} + \pi\right)\right). \qquad (16)$$

Это означает, что на множестве комплексных чисел можно решить любое квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$), так как его решение сводится к извлечению квадратного корня из комплексного числа $D = b^2 - 4ac$ (дискриминант). В частности, квадратное уравнение с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом имеет два корня, являющихся комплексно-сопряженными числами. Эти корни определяются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|D|}}{2a}. \qquad (17)$$

Неполное квадратное уравнение $x^2 + c = 0$, где c – положительное действительное число, имеет корни

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{c}\,. \qquad (18)$$

В заключение отметим: формула (14) показывает, что модули всех значений корня одинаковы, а их аргументы отличаются на слагаемое, кратное $\frac{2\pi}{n}$. Отсюда следует, что все n значений корня геометрически изображаются точками, лежащими в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (рис. 1.13).

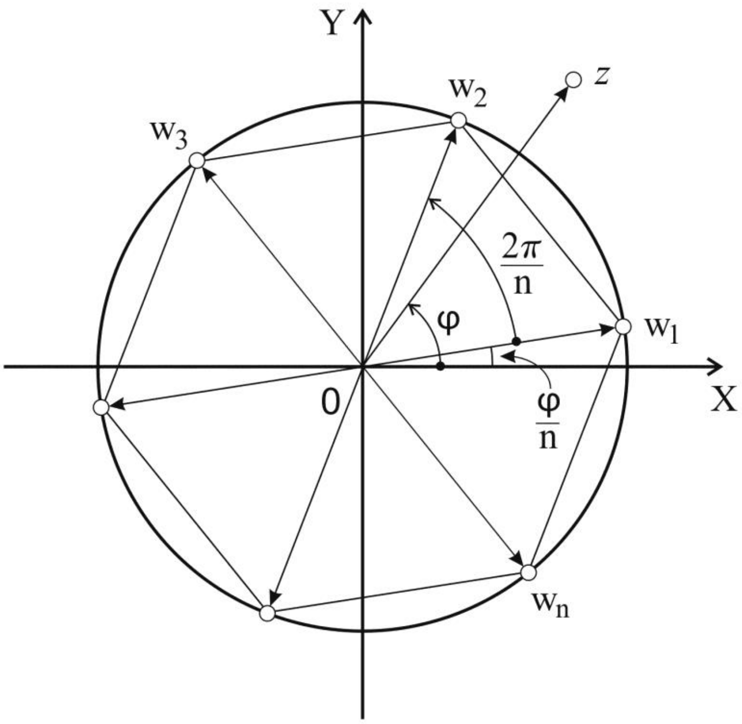

Рис. 1.13

Примеры

1. Найдите $z = (1-i)^{16}$.

Решение. Найдем тригонометрическую форму данного комплексного числа:

$$r = |z| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sin\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$ и $z = \sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4}) + i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$,

поэтому по формуле Муавра

$$(1-i)^{16} = \left[\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))\right]^{16} = (\sqrt{2})^{16}\left[\cos(16\cdot(-\frac{\pi}{4}) + i\sin 16\cdot(-\frac{\pi}{4}))\right] =$$

$$= 256(\cos(-4\pi) + i\sin(-4\pi)) = 256(1+0i) = 256$$

Ответ: 256.

2. Дано комплексное число $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$. *Найдите* z^8.

Решение.

Если комплексное число z задано в тригонометрической форме $z = |z|\cdot(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то по формуле (14) $z^n = |z|^n\cdot(\cos n\varphi + i\cdot\sin n\varphi)$, где n – натуральное число.

Запишем число $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$ в тригонометрической форме:

1) находим модуль числа $|z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$;

2) аргумент φ определяем из условий $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

3) находим главное значение аргумента комплексного числа $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$:

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{4},$$

тогда $z = 2 \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Следовательно, по формуле Муавра (14)

$$z^6 = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^8 = (2)^8\left(\cos\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(8 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = 256(\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi) = 256$$

Ответ: 256.

3. Найдите $\sqrt[3]{-1+i}$.

Решение.

Запишем число в тригонометрической форме:

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2};$$

$$z = -1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})).$$

По формуле (15)

$$\sqrt[3]{-1+i} = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{3\pi/4 + 2\pi k}{3}\right),\ k = 0,\ 1,\ 2,$$

откуда получаем три значения корня:

$$z_1 = \left(\sqrt[3]{-1+i}\right)_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4});$$

$$z_2 = \left(\sqrt[3]{-1+i}\right)_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{11\pi}{12});$$

$$z_3 = \left(\sqrt[3]{-1+i}\right)_3 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + \sin\frac{19\pi}{12}).$$

На комплексной плоскости найденные значения корня представляют равноотстоящие друг от друга точки z_1, z_2, z_3, расположенные на окружности радиуса $\sqrt[6]{2}$.

Ответ: $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4})$; $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{11\pi}{12})$, $\sqrt[6]{2}(\cos\frac{19\pi}{12} + \sin\frac{19\pi}{12})$.

4. Решите уравнения.

a) $x^2+16=0$; b) $x^2-2x+5=0$; c) $x^2=-6+8i$.

Решение.

a) Воспользуемся формулой (17):

$$x_{1,2}=\pm i\sqrt{16}=\pm 4i.$$

b) Данное уравнение – квадратное с действительными коэффициентами, $D=(-2)^2-4\cdot 1\cdot 5=4-20=-16$. По формуле корней квадратного уравнения (16)

$$x_{1,2}=\frac{2\pm i\sqrt{16}}{2}=\frac{2\pm 4i}{2}=1\pm 2i.$$

c) *Первый способ*. Приведем комплексное число $-6+8i$ к тригонометрическому виду. По формуле (4) найдем модуль $r=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$, а из соотношений (6) $\cos\varphi=-\frac{6}{10}=-\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$. Следовательно, $x^2=10(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. По формулам (16)

$$x_1=\sqrt{10}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$x_2=\sqrt{10}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{2}+i\sin\frac{\varphi+2\pi}{2}\right)=\sqrt{10}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\pi\right)\right)=$$

$$=\sqrt{10}\left(-\cos\frac{\varphi}{2}-i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

Найдем $\cos\frac{\varphi}{2}$ и $\sin\frac{\varphi}{2}$, используя формулы понижения степени:

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{2}{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\sqrt{\frac{8}{10}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Окончательно получим:

$$x_1=\sqrt{10}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)=\sqrt{2}+2\sqrt{2}i;$$

$$x_2=\sqrt{10}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{5}}i\right)=-\sqrt{2}-2\sqrt{2}i.$$

Второй способ.

Пусть решением уравнения является комплексное число $x = a + ib$, где a и b – действительные числа. Тогда $(a+ib)^2 = -6+8i$ или $(a^2 - b^2) + 2abi = -6 + 8i$.

Из определения равенства комплексных чисел получим систему:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -6, \\ 2ab = 8 \end{cases}.$$

Действительные числа a и b найдем, решив данную систему методом подстановки. Выразим b через a из второго уравнения системы: $b = \frac{4}{a}$. Подставим это значение в первое уравнение: $a^2 - \left(\frac{4}{a}\right)^2 = -6$. Домножив обе части уравнения на a^2, получим биквадратное уравнение $a^4 + 6a^2 - 16 = 0$. Заменой $a^2 = t$ $(t \geq 0)$ уравнение сводится к квадратному $t^2 + 6t - 16 = 0$, решив которое, получим: $t_1 = -8$, $t_2 = 2$. Условию $t \geq 0$ удовлетворяет только $t_2 = 2$. Следовательно, $a^2 = 2$, откуда $a_1 = \sqrt{2}$, $a_2 = -\sqrt{2}$. По формуле $b = \frac{4}{a}$ находим $b_1 = 2\sqrt{2}$, $b_2 = -2\sqrt{2}$, откуда $x_1 = \sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; $x_2 = -\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.

Ответ: a) $\pm 4i$; b) $1 \pm 2i$; c) $\pm\left(\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i\right)$.

5. Выразите $tg5\varphi$ через $tg\varphi$.

Решение.

По формуле Муавра $(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi$. Перепишем данное соотношение, применяя к левой части равенства формулу бинома Ньютона:

$$\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi + 10i^2\cos^3\varphi\sin^2\varphi +$$
$$+ 10i^3\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5i^4\cos\varphi\sin^4\varphi + i^5\sin^5\varphi = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi.$$

Учитывая, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, имеем:

$$\cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi -$$
$$- 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \cos 5\varphi + i\sin 5\varphi.$$

Используя определение равенства комплексных чисел, можно записать:

$$\cos 5\varphi = \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$
$$\sin 5\varphi = 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi,$$

поэтому $tg5\varphi = \dfrac{\sin 5\varphi}{\cos 5\varphi} = \dfrac{5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi}{\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi}$.

Разделив числитель и знаменатель последней дроби на $\cos^5\varphi$, окончательно получим: $tg5\varphi=\dfrac{5tg\varphi-10tg^3\varphi+tg^5\varphi}{1-10tg^2\varphi+5tg^4\varphi}$.

Ответ: $tg5\varphi=\dfrac{5tg\varphi-10tg^3\varphi+tg^5\varphi}{1-10tg^2\varphi+5tg^4\varphi}$.

6. Выразите $\sin^5\varphi$ *линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.*

Решение.

Положим $b=\cos\varphi+i\sin\varphi$, тогда $b^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$,

$$b^{-1}=\frac{1}{b}=\frac{1}{\cos\varphi+i\sin\varphi}=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{(\cos\varphi+i\sin\varphi)(\cos\varphi-i\sin\varphi)}=\frac{\cos\varphi-i\sin\varphi}{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=$$

$$=\cos\varphi-i\sin\varphi,$$

$$b^{-n}=\cos n\varphi-i\sin n\varphi.$$

Вычитая из первого равенства третье, а из второго – четвертое, получим:

$$b-b^{-1}=2i\sin\varphi,$$

$$b^n-b^{-n}=2i\sin n\varphi,$$

откуда

$$\sin\varphi=\frac{b-b^{-1}}{2i},$$

$$\sin n\varphi=\frac{b^n-b^{-n1}}{2i}.$$

Сделаем ряд выкладок, используя полученные соотношения, формулу бинома Ньютона и равенство $\boldsymbol{i}^5=\boldsymbol{i}$:

$$\sin^5\varphi=\left(\frac{b-b^{-1}}{2i}\right)^5=\frac{b^5-5b^4\cdot b^{-1}+10b^3\cdot b^{-2}-10b^2\cdot b^{-3}+5b\cdot b^{-4}-b^{-5}}{2^5\cdot i^5}=$$

$$=\frac{b^5-5b^3+10b-10b^{-1}+5b^{-3}-b^{-5}}{32i}=\frac{\left(b^5-b^{-5}\right)-5\left(b^3-b^{-3}\right)+10\left(b-b^{-1}\right)}{32i}=$$

$$=\frac{2i\sin 5\varphi-10i\sin 3\varphi+20i\sin\varphi}{32i}=\frac{\sin 5\varphi-5\sin 3\varphi+10\sin\varphi}{16}.$$

Ответ: $\sin^5\varphi=\dfrac{\sin 5\varphi-5\sin 3\varphi+10\sin\varphi}{16}$.

§ 5. Тождества и неравенства для комплексных чисел

Укажем ряд полезных тождеств и неравенств, справедливых для комплексных чисел:

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}),$$

$$|z_1+z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1|\cdot|z_2|\cos(\arg z_1-\arg z_2),$$

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right),$$

$$\left|1-z_1\overline{z_2}\right|^2=|z_1-z_2|^2+\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right),$$

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$ – неравенство треугольника,

$$\left||z_1|-|z_2|\right|\le|z_1-z_2|,$$

$$\left|1-z_1\overline{z_2}\right|^2\ge\left(1-|z_1|^2\right)\left(1-|z_2|^2\right),$$

$$\left|\frac{z}{|z|}-1\right|\le|\arg z|.$$

§ 6. Задания для самостоятельной работы и типовых расчетов

Задание 1. Для заданных комплексных чисел z_1 и z_2 найдите: $a)$ z_1+z_2; $b)$ z_1-z_2.

1) $z_1=4-5i$, $z_2=2+3i$;
2) $z_1=3-6i$, $z_2=-5+4i$;
3) $z_1=8-3i$, $z_2=3+7i$;
4) $z_1=7-3i$, $z_2=6+2i$;
5) $z_1=3-7i$, $z_2=6+5i$;
6) $z_1=4+3i$, $z_2=-3+2i$;
7) $z_1=-4-8i$, $z_2=-2+6i$;
8) $z_1=2+6i$, $z_2=9-3i$;
9) $z_1=-5-6i$, $z_2=2-3i$;
10) $z_1=-3+2i$, $z_2=-2-3i$;
11) $z_1=4+7i$, $z_2=12-3i$:
12) $z_1=-5+2i$, $z_2=3-9i$;
13) $z_1=-2-5i$, $z_2=8+3i$;
14) $z_1=9-6i$, $z_2=5-3i$;
15) $z_1=6-7i$, $z_2=7+5i$;
16) $z_1=14+9i$, $z_2=12-8i$;
17) $z_1=11-4i$, $z_2=9+5i$;
18) $z_1=9+6i$, $z_2=10+3i$;
19) $z_1=-3-5i$, $z_2=6+3i$;
20) $z_1=8+4i$, $z_2=-5-3i$;
21) $z_1=-5+6i$, $z_2=4-3i$;
22) $z_1=12-5i$, $z_2=-6+4i$;
23) $z_1=8-6i$, $z_2=5+7i$;
24) $z_1=9-4i$, $z_2=8+7i$;
25) $z_1=-5+4i$, $z_2=8+6i$;
26) $z_1=3+8i$, $z_2=6-5i$;
27) $z_1=4+9i$, $z_2=7-5i$;
28) $z_1=5+6i$, $z_2=-7+2i$;
29) $z_1=-6-5i$, $z_2=-2+7i$;
30) $z_1=6+4i$, $z_2=-8+9i$.

Задание 2. Вычислите:

1. a) $(2+i)\overline{(3+i)}$, b) $\dfrac{4+i}{2-i}$;

2. a) $(-1+i)\overline{(1+5i)}$, b) $\dfrac{1-2i}{1-\sqrt{3}i}$;

3. a) $(4-i)\overline{(-1+4i)}$, b) $\dfrac{5-3i}{3+i}$;

4. a) $(2+3i)\overline{(7-5i)}$, b) $\dfrac{-4+i}{3+i}$;

5. a) $(2-i)\overline{(1+3i)}$, b) $\dfrac{i}{4+3i}$;

6. a) $(2+i)\overline{(-1+3i)}$, b) $\dfrac{-1+5i}{-3+2i}$;

7. a) $(4+i)\overline{(1-2i)}$, b) $\dfrac{3+i}{2+i}$;

8. a) $(3-i)\overline{(-1-4i)}$, b) $\dfrac{3+i}{7-i}$;

9. a) $(-4+i)\overline{(-1+5i)}$, b) $\dfrac{3+2i}{1-2i}$;

10. a) $(4-3i)\overline{(5+3i)}$, b) $\dfrac{1+2i}{-1+5i}$;

11. a) $(3+i)\overline{(-3+i)}$, b) $\dfrac{-1+4i}{5-2i}$;

12. a) $(7+2i)\overline{(-2+3i)}$, b) $\dfrac{3-i}{7+3i}$;

13. a) $(3+i)\overline{(1+2i)}$, b) $\dfrac{3+i}{-1+4i}$;

14. a) $(6+i)\overline{(-3-2i)}$, b) $\dfrac{2+2i}{8-2i}$;

15. a) $(7-i)\overline{(-1+2i)}$, b) $\dfrac{2+i}{-4+i}$;

16. a) $(4+3i)\overline{(2+5i)}$, b) $\dfrac{-4+4\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i}$;

17. a) $(3-i)\overline{(2+2i)}$, b) $\dfrac{2-i}{4+i}$;

18. a) $(-2+3i)\overline{(5-3i)}$, b) $\dfrac{4+5i}{3-i}$;

19. a) $(7+i)\overline{(4+i)}$, b) $\dfrac{1+3i}{-1+2i}$;

20. a) $(3+2i)\overline{(-2-i)}$, b) $\dfrac{5-5i}{7+2i}$;

21. a) $(-5+2i)\overline{(1-4i)}$, b) $\dfrac{-1+i}{2+3i}$;

22. a) $(8-2i)\overline{(1+4i)}$, b) $\dfrac{3+11i}{-1+5i}$;

23. a) $(6-3i)\overline{(2+3i)}$, b) $\dfrac{-1+5i}{7-5i}$;

24. a) $(2+5i)\overline{(-6+2i)}$, b) $\dfrac{3+i}{2-i}$;

25. a) $(3+4i)\overline{(-4+3i)}$, b) $\dfrac{1+5i}{-2+3i}$;

26. a) $(2-7i)\overline{(1+2i)}$, b) $\dfrac{-2+6i}{3+5i}$;

27. a) $(3+5i)\overline{(1-5i)}$, b) $\dfrac{3+5i}{4-3i}$;

28. a) $(6-3i)\overline{(4+5i)}$, b) $\dfrac{3+5i}{4-8i}$;

29. a) $(2+3i)\overline{(6+3i)}$, b) $\dfrac{-8+5i}{1-3i}$;

30. a) $(3-4i)\overline{(-5+2i)}$, b) $\dfrac{-4+6i}{3-5i}$.

Задание 3. Вычислите: a) $i\cdot i^2\cdot i^3\cdot\ldots\cdot i^{50}$; b) $i^4+i^{14}+i^{24}+\ldots+i^{104}$.

Задание 4. Решите систему уравнений:

a) $\begin{cases}(3-i)x+(4+2i)y=2+6i,\\(4+2i)x-(2+3i)y=5+4i\end{cases}$; b) $\begin{cases}(2+i)x+(2-i)y=6,\\(3+2i)x+(3-2i)y=8\end{cases}$.

Задание 5. При каких значениях p и t комплексные числа $z = p - 4i$, $z = 2 + \sqrt{3}ti$: a) равны; b) сопряжены?

Задание 6. $\arg z = \dfrac{2}{5}\pi$. Чему равен $\arg \bar{z}$?

Задание 7. Как изменится модуль и аргумент комплексного числа z в результате умножения этого числа: a) на 4; b) на i?

Задание 8. Найдите модуль и главное значение аргумента комплексного числа:

1) $z = \sqrt{3} + i$;	2) $z = \sqrt{3} - i$;	3) $z = \sqrt{3} - \sqrt{3}i$;
4) $z = -4 + 3i$;	5) $z = 1 + 4i$;	6) $z = 12 - 7i$;
7) $z = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$;	8) $z = \sqrt{8} - i$;	9) $z = 1 + \sqrt{3}i$;
10) $z = 4 + 3i$;	11) $z = 1 + 2i$;	12) $z = 3 + 4i$;
13) $z = \sqrt{5} - \sqrt{5}i$;	14) $z = 1 - \sqrt{3}i$;	15) $z = 2\sqrt{3} + 2i$;
16) $z = 2 - 7i$;	17) $z = \sqrt{8} - \sqrt{8}i$;	18) $z = \sqrt{12} - 2i$;
19) $z = -3 + 3i$;	20) $z = 5 + 5i$;	21) $z = -3 + 3i$;
22) $\mathrm{z} = -4 + \mathrm{i}$;	23) $z = -5i$;	24) $z = 3 - 3i$;
25) $z = -\sqrt{3} + i$;	26) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$;	27) $z = 3 + \sqrt{27}i$;
28) $z = 9 + 2i$;	29) $z = 6 - 8i$;	30) $z = 2 - 2i$.

Задание 9. Изобразите на комплексной плоскости:

1) $\mathrm{Re}(z - 1) = \lvert z \rvert$;	2) $\lvert z + 1 - i \rvert \le 1$;	3) $1 \le \lvert z + 4 \rvert \le 2$;
4) $\begin{cases} \lvert z - 1 \rvert < 2, \\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1 \end{cases}$;	5) $\begin{cases} \lvert z - i \rvert < 1, \\ \dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4} \end{cases}$;	6) $\begin{cases} \lvert z + 1 \rvert < 3, \\ \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases}$;
7) $1 \le z \cdot \bar{z} \le 2$;	8) $\lvert z + 3 \rvert = \lvert z - 3i \rvert$;	9) $\lvert z - 1 \rvert = \lvert z + i \rvert$;
10) $z \cdot \bar{z} \le 10$;	11) $\lvert z + 5 \rvert = \lvert z - 5i \rvert$;	12) $2 < \lvert z - 1 \rvert < 3$;
13) $4 \le \lvert z - i \rvert \le 6$;	14) $1 \le \lvert z + i \rvert \le 2$;	15) $\lvert z + 5 \rvert \ge 4$;

16) $\begin{cases} |z+i|<2, \\ \operatorname{Re}(z)>0 \end{cases}$; 17) $\begin{cases} |z|<1, \\ 0<\arg z<\pi/2 \end{cases}$; 18) $\begin{cases} |z-2|<2, \\ -1<\operatorname{Im}(z)<1 \end{cases}$;

19) $\begin{cases} |z-1-2i|<3, \\ \operatorname{Im}(z)>2 \end{cases}$; 20) $\begin{cases} |z-1|<2, \\ 0<\operatorname{Re}(z)<1 \end{cases}$; 21) $\begin{cases} 2\le|z|\le 3, \\ -\pi<\arg z<-\pi/2 \end{cases}$;

22) $\arg z=\dfrac{\pi}{4}$; 23) $-\dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{4}$; 24) $\operatorname{Im}(z)\ge 3$;

25) $|1\le|z+2i|\le 3|$; 26) $|\pi-\arg z|<\dfrac{\pi}{6}$; 27) $-3\le\operatorname{Re}(z)<2$;

28) $\begin{cases} |z-3i|=3, \\ \operatorname{Im}(z)\ge 3 \end{cases}$; 29) $\begin{cases} |z|>3, \\ \dfrac{\pi}{6}<\arg z<\dfrac{\pi}{3} \end{cases}$; 30) $\begin{cases} |z|<2, \\ \operatorname{Im}(z)<1 \end{cases}$.

Задание 10. Запишите число z в тригонометрической и показательной формах и изобразите на комплексной плоскости.

1) $z=6+8i$; 2) $z=3-\sqrt{27}i$; 3) $z=-\sqrt{3}-3i$;
4) $z=1+\sqrt{3}i$; 5) $z=-3+4i$; 6) $z=2+2i$;
7) $z=5+i$; 8) $z=2-\sqrt{12}i$; 9) $z=-3-5i$;
10) $z=-3-5i$; 11) $z=12+7i$; 12) $z=1-i$;
13) $z=-5+2i$; 14) $z=-1-\sqrt{3}i$; 15) $z=\sqrt{3}+i$;
16) $z=\dfrac{\sqrt{5}}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$; 17) $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; 18) $z=\sqrt{2}-i\sqrt{2}$;
19) $z=2+4i$; 20) $z=7-12i$; 21) $z=-2-5i$;
22) $z=-2-i$; 23) $z=4-4i$; 24) $z=8-6i$;
25) $z=3+4i$; 26) $z=3-4i$; 27) $z=7i$;
28) $z=5-2\sqrt{6}i$; 29) $z=9+12i$; 30) $z=-6-8i$.

Задание 11. Упростите.

1) $\dfrac{(\cos 64^0+i\sin 64^0)(\cos 46^0+i\sin 46^0)}{\cos 20^0-i\sin 20^0}$; 2) $\dfrac{6-6i}{3(\cos 15^0+i\sin 15^0)}$;

3) $\dfrac{8(\cos(-105^0)+i\sin(-105^0))}{-\sqrt{3}-i}$; 4) $\left(\cos\dfrac{\pi}{15}-i\sin\dfrac{\pi}{15}\right)^{-5}$;

5) $\dfrac{8(\cos 40^0+i\sin 40^0)}{16(\cos(-50^0)+i\sin(-50^0))}$; 6) $\left(\cos\dfrac{\pi}{14}-i\sin\dfrac{\pi}{14}\right)^{\frac{7}{2}}$.

Задание 12. Выполните действия. Результат представьте в алгебраической форме: a) $\left(\sqrt{2}\cdot e^{\frac{2\pi}{27}i}\right)^9$; b) $5\cdot e^{\frac{4}{5}\pi i}\cdot 3e^{\frac{\pi}{5}i}$.

Задание 13. Вычислите.

1) $(-1-i)^{12}$; 2) $z=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^6$; 3) $z=(-5+5i)^8$;

4) $z=(-2+2\sqrt{3}i)^3$; 5) $z=(4-4i)^4$; 6) $(-\sqrt{3}+3i)^4$;

7) $(1+\sqrt{3}i)^5$; 8) $(-2-2i)^4$; 9) $(6-2\sqrt{3}i)^6$;

10) $(5-5i)^4$; 11) $(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^4$; 12) $(1+i)^6\cdot(8i)^{10}$;

13) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^{60}$; 14) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^8$; 15) $z=\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$;

16) $(2+2i)^4 i^{100}$; 17) $(1+i)^{12}$; 18) $(-2-2i)^4$;

19) $(\sqrt{3}+i)^6$; 20) $(-1+i)^5$; 21) $(1+i)^8$;

22) $(1-\sqrt{3}i)^5$; 23) $(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^6$; 24) $(1+2i)^6$;

25) $(\sqrt{8}-\sqrt{8}i)^6$ 26) $(\sqrt{3}-i)^{15}$ 27) $(-7+7i)^8$

28) $(-4+4\sqrt{3}i)^3$; 29) $(-\sqrt{3}+i)^{24}$; 30) $(1-i)^{32}$.

Задание 14. Найдите все значения корня и отметьте их на комплексной плоскости.

1) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$; 2) $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$; 3) $\sqrt[3]{-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i}$;

4) $\sqrt[3]{8i}$; 5) $\sqrt[4]{-9}$; 6) $\sqrt[2]{1-\sqrt{3}i}$;

7) $\sqrt[3]{-5i}$; 8) $\sqrt[4]{27}$; 9) $\sqrt[3]{8i}$;

10) $\sqrt[3]{-27i}$; 11) $\sqrt[2]{\sqrt{3}+3i}$; 12) $\sqrt{-9i}$;

13) $\sqrt[3]{1}$; 14) $\sqrt{4i}$; 15) $\sqrt{-1}$;

16) $\sqrt[2]{1+\sqrt{3}i}$; 17) $\sqrt{3+4i}$; 18) $\sqrt[8]{1}$;

19) $\sqrt[3]{-9i}$; 20) $\sqrt[6]{-1}$; 21) $\sqrt[2]{-8+8\sqrt{3}i}$;

22) $\sqrt[4]{-2-2\sqrt{3}i}$; 23) $\sqrt[5]{-32}$; 24) $\sqrt[4]{2-\sqrt{12}i}$;

25) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}i}$; 26) $\sqrt[4]{-1+\sqrt{3}i}$; 27) $\sqrt[5]{\cos 225^0 + i\sin 225^0}$;

28) $\sqrt[6]{2+\sqrt{12}i}$; 29) $\sqrt[4]{\cos 120^0 + i\sin 120^0}$; 30) $\sqrt[3]{\cos 135^0 + i\sin 135^0}$.

Задание 15. Используя формулу Муавра, выразите через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$: a) $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$; b) $\cos 4\varphi$ и $\sin 4\varphi$; c) $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$.

Задание 16. Выразите $tg 6\varphi$ через $tg\varphi$.

Задание 17. Используя формулы Эйлера (11), выразите через косинусы и синусы кратных дуг функции: a) $\cos^4 x$; b) $\sin^3 x$; c) $\cos^5 x$.

Задание 18. Найдите сумму:

a) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx, \quad n \in \mathrm{N}$;

b) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx, \quad n \in \mathrm{N}$.

Задание 19. Покажите, что числа $-1+3i$ и $-1-3i$ являются корнями уравнения $x^2 + 2x + 10 = 0$.

Задание 20. Решите уравнения:

1) $z^5 + 1 = 0$; 2) $z^3 - 125 = 0$; 3) $x^3 - \frac{1}{27}i = 0$;

4) $x^4 - 8\sqrt{3} + 8i = 0$; 5) $z^3 + 64 = 0$; 6) $z^2 - 16 - 16i = 0$;

7) $x^4 - 16i = 0$; 8) $x^3 + 64i = 0$; 9) $x^3 - 8i = 0$;

10) $x^2 - 4x + 5 = 0$; 11) $x^2 - 2x + 10 = 0$; 12) $x^2 - 4x + 29 = 0$;

13) $x^2 + 2x + 17 = 0$; 14) $x^2 - 6x + 13 = 0$; 15) $x^2 - 5x + 7 = 0$;

16) $3x^2 + 10x + 9 = 0$; 17) $4x^2 - 14x + 13 = 0$; 18) $x^2 - 2x + 2 = 0$;

19) $x^2 - 6x + 16 = 0$; 20) $x^2 + 10x + 28 = 0$; 21) $x^2 - 6x + 25 = 0$;

22) $x^2 - 10x + 169 = 0$; 23) $x^2 - 30x + 289 = 0$; 24) $x^2 - x + 5 = 0$;

25) $x^2 - 4x + 8 = 0$; 26) $x^2 - 8ix - 15 = 0$; 27) $x^2 + 4x + 20 = 0$;

28) $x^2 + 8x + 41 = 0$; 29) $x^2 + 2x + 10 = 0$; 30) $x^2 + 5x + 7 = 0$.

Задание 21. Разложите на множители в области комплексных чисел многочлены: a) $x^2 + 4$; b) $x^4 - 81$; c) $x^2 + 3 - 4i$; d) $x^2 + i$.

Глава 2. Функции комплексного переменного

Теория комплексных функций комплексного переменного и ее приложения предоставляют инженерам и исследователям множество полезных математических моделей, так как содержит много принципиально нового по сравнению с теорией функций действительной переменной.

Определения основных понятий, известные для функций действительного переменного, остаются почти без изменений для функций комплексного переменного, но их содержание существенным образом меняется. Многие математические теоремы упрощаются, если рассматривать действительные переменные как частный случай комплексных переменных. Аналитические функции комплексного переменного описывают двумерные скалярные и векторные поля, реализуют конформные отображения одной плоскости на другую.

Одним из создателей теории функций комплексного переменного по праву считается Л. Эйлер. В его работах, намного опередивших эпоху, детально изучены элементарные функции комплексного переменного, включая логарифм, показательную, тригонометрические и обратные тригонометрические функции, даны условия дифференцируемости функций комплексного переменного. Л. Эйлер положил начало применению функций комплексного переменного в гидродинамике и картографии.

§ 1. Комплексные функции действительного переменного

Иногда рассматривают функции, для которых независимая переменная является действительной, но сама функция принимает комплексные значения.

Если каждому значению $t \in (a,\ b)$ по некоторому правилу поставлено в соответствие единственное комплексное число z, то говорят, что на интервале (a, b) задана *комплексная функция действительного переменного* t. Этот факт символически записывают как $z = f(t)$ или $z = z(t)$, например:

$$z = (t - i)^2.$$

Если разложить значение функции на действительную и мнимую части, то каждая из этих частей будет функцией действительной переменной t; для приведенного примера нетрудно получить:

$$x(t) = t^2 - 1,$$
$$y(t) = -2t.$$

В общем случае, если

$$z = f(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \qquad (1)$$

то

$$x = \varphi(t), \ y = \psi(t). \qquad (2)$$

Возможен и обратный переход от (2) к (1). Последнее означает, что задание комплексной функции от действительной переменной равносильно заданию двух обычных, действительных функций от той же переменной, и это аналогично заданию векторной функции от скалярной переменной.

Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ – действительные непрерывные функции действительного переменного $t \in [a, b]$. Тогда уравнение

$$z = z(t) = \varphi(t) + i\psi(t), \ (t \in [a, b])$$

задает изображение *непрерывной параметрически заданной кривой* на комплексной плоскости.

Изображением функции $z(t) = t + it^2$, $-\infty < t < +\infty$ служит парабола $y = x^2$. Здесь $x = t$, $y = t^2$.

Теория комплексных функций от действительной переменной не имеет существенных отличий от теории действительных функций. В частности, без изменений переносятся определения предела, непрерывности, производной и т. д. При этом сохраняются все формулы дифференцирования.

Изображается функция (1) линией в комплексной плоскости с параметрическими уравнениями (2).

При рассмотрении комплексных функций от действительной переменной (1) необходимо иметь в виду следующие свойства:

если комплексные функции складываются, складываются их действительные, а также мнимые части:

$$\mathrm{Re}\big(f_1(t) + f_2(t)\big) = \mathrm{Re}\big(f_1(t)\big) + \mathrm{Re}\big(f_2(t)\big),$$
$$\mathrm{Im}\big(f_1(t) + f_2(t)\big) = \mathrm{Im}\big(f_1(t)\big) + \mathrm{Im}\big(f_2(t)\big);$$

если комплексная функция умножается на действительное число λ или действительную функцию $g(t)$, то действительная и мнимая части умножаются на тот же множитель:

$$\mathrm{Re}\big(\lambda f(t)\big) = \lambda\,\mathrm{Re}\big(f(t)\big), \ \mathrm{Im}\big(\lambda f(t)\big) = \lambda\,\mathrm{Im}\big(f(t)\big);$$
$$\mathrm{Re}\big(g(t)\cdot f(t)\big) = g(t)\cdot\mathrm{Re}\big(f(t)\big), \ \mathrm{Im}\big(g(t)\cdot f(t)\big) = g(t)\cdot\mathrm{Im}\big(f(t)\big);$$

если комплексную функцию продифференцировать, то над ее действительной и мнимой частями производится то же действие:

$$\mathrm{Re}\big(f'(t)\big) = \big(\mathrm{Re}\big(f(t)\big)\big)', \ \mathrm{Im}\big(f'(t)\big) = \big(\mathrm{Im}\big(f(t)\big)\big)'.$$

Эти свойства позволяют производить указанные действия над всей комплексной функцией и от полученного результата брать действительную или мнимую часть, вместо того чтобы производить эти действия над действительной или мнимой частью. В ряде задач такой переход к комплексным величинам с обратным переходом к искомым действительным величинам оказывается проще и нагляднее, чем непосредственное действие над действительными величинами.

Важную роль как в самой математике, так и в ее приложениях играет показательная функция с мнимым показателем степени $z = e^{it}$ (использованная в главе 1 при введении показательной формы комплексного числа).

Показательной функцией с мнимым показателем степени называется комплексная функция действительного переменного

$$e^{it} = \cos t + i \sin t, \tag{3}$$

где параметр t может принимать любые действительные значения. Эту формулу, как было отмечено выше, называют формулой Эйлера.

Изображением функции $z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$ служит окружность (рис. 2.1) радиуса 1 с центром в начале координат, так как $|z(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1$. При $t = 0$ получаем точку $z = 1$ $(e^{i \cdot 0} = 1)$, при $t = \dfrac{\pi}{2}$ – точку $z = i$ $(e^{i \cdot \frac{\pi}{2}} = i)$, при $t = \pi$ – точку $z = -1$ $(e^{i \cdot \pi} = -1)$ и т. д.

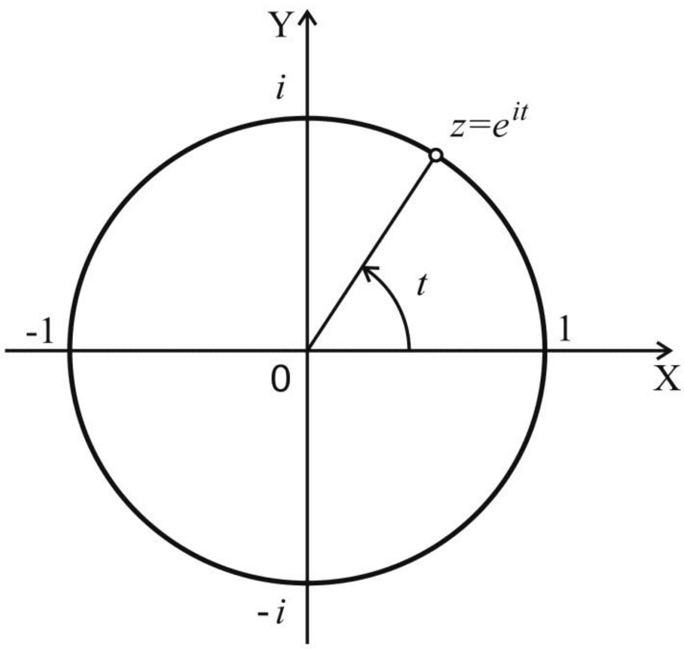

Рис. 2.1

При изменении t от 0 до 2π точка пробегает окружность против часовой стрелки, при $t = 2\pi$ возвращается в исходное положение $(e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 1$. При дальнейшем увеличении t от 2π до 4π точка $z = e^{it}$ снова пробегает всю окружность и т. д. Таким свойством обладают периодические функции. Покажем, что показательная функция

$z = e^{it}$ действительно является *периодической* с периодом $T = 2\pi$. Для этого необходимо проверить выполнение равенства $z(t + 2\pi) = z(t)$.

Действительно,

$$z(t+2\pi) = e^{i(t+2\pi)} = \cos(t+2\pi) + i\sin(t+2\pi) = \cos t + i\sin t = e^{it} = z(t).$$

Для мнимых показателей степени выполняется основное правило действий с показательной функцией, заключающееся в том, что для любых действительных чисел x и y справедливо равенство $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

Правило умножения показывает, что если два комплексных числа записаны в показательной форме $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \qquad (4)$$

Требование сохранения правила умножения приводит к соотношению:

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \qquad (5)$$

отсюда

$$\left|e^{(\alpha+i\beta)t}\right| = e^{\alpha t}, \quad Arg e^{(\alpha+i\beta)t} = \beta t.$$

Формулы (5) определяют степень числа e для любого комплексного показателя степени. Например:

$$e^{3+5i} = e^3(\cos 5 + i\sin 5).$$

Укажем теперь формулу для нахождения производной показательной функции $z = e^{it}$. По правилу отыскания производной комплексной функции действительного переменного

$$\left(e^{it}\right)' = (\cos t + i\sin t)' = (\cos t)' + i(\sin t)' = -\sin t + i\cos t = i(\cos t + i\sin t) = ie^{it}.$$

Таким образом, *комплексная функция* e^{it} *дифференцируется так же, как если бы* i *считать постоянным числом*.

Геометрически дифференцирование функции e^{it} сводится к повороту вектора $z = e^{it}$ на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки.

Используя формулу (5), можно показать, что

$$\left(e^{(\alpha+i\beta)t}\right)' = (\alpha + i\beta)e^{(\alpha+i\beta)t}.$$

Следовательно, справедлива формула

$$(e^{at})' = ae^{at}, \qquad (6)$$

где a – любое число, действительное или комплексное.

Комплексные функции от действительной переменной применяют для описания ряда физических процессов. Например, показательную функцию

$$U(t) = Ae^{i(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t + \alpha) + iA\sin(\omega t + \alpha) \quad (A > 0, \quad \omega > 0)$$

применяют как для исследования гармонических колебаний, так и для расчета установившегося тока в цепи с активным сопротивлением и индуктивностью при условии, что к цепи подключен источник напряжения, меняющийся по гармоническому закону $\varphi = \varphi_0 \sin(\omega t + \beta)$.

§ 2. Понятие функция комплексного переменного

Пусть D и E – множества, элементами которых являются комплексные числа (точки) $z \in D$, $\omega \in E$.

Если каждому числу (точке) $z \in D$ по некоторому правилу ставится в соответствие число (точка) $\omega \in E$, то говорят, что на множестве D задана *однозначная функция комплексного переменного* $\omega = f(z)$, отображающая множество D в множество E.

Если каждому $z \in D$ по некоторому правилу ставится в соответствие несколько значений $\omega \in E$, то говорят, что на множестве D задана *многозначная функция комплексного переменного.* Например, функции:

$$\omega = f(z) = z^2 + 2z - 3$$

$$\omega = f(z) = \sqrt[3]{z^2 - 3z + 6}$$

являются однозначной и многозначной соответственно. Переменная величина z называется *аргументом* функции $f(z)$.

Множество D называют *областью определения функции* $\omega = f(z)$, множество E_1 (всех значений ω, которые функция $f(z)$ принимает на E) – *областью значений* этой функции. Если множества E и E_1 совпадают, то говорят, что функция $f(z)$ отображает D на E. Точка $\omega \in E$ называется *образом* точки z при отображении $\omega = f(z)$, точка $z \in D$ – *прообразом точки* ω.

Если любое значение $\omega \in E$ является образом единственной точки $z \in D$, *то* функция называется *однолистной в D*, в противном случае – *неоднолистной*. Однолистная функция взаимно-однозначна. Функции $\omega = z$, $\omega = \bar{z}$ – простейшие однолистные функции. $\omega = 2z^2 - 3$ – неоднолистная функция, так как различным точкам $z_1 = 2$ и $z_2 = -2$ соответствует одно значение функции $\omega = 5$.

Функция комплексного переменного $\omega = f(z)$ представляет собой комплексное число, поэтому ее можно представить разложенной на действительную и мнимую части. Пусть $z = x + iy$, $\omega = u + iv$, тогда

$$u + iv = f(x + iy) \text{, т.е. } f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Следовательно, задание комплексной функции $\omega = f(z)$ равносильно заданию двух функций двух действительных переменных x и y:

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y).$$

Функции u и v называются *действительной и мнимой частями функции* $\omega = f(z)$ и обозначаются как $u = \mathrm{Re}(\omega)$, $v = \mathrm{Im}(\omega)$.

В случае функции комплексного переменного функциональную зависимость $\omega = f(z)$ нельзя представить геометрически так же просто, как график функции действительного переменного, поскольку для этого потребуется изображение четырехмерного пространства с осями Ox, Oy, Ou, Ov. Поэтому принято значения аргумента изображать точками одной плоскости, а значения функции – точками другой плоскости. Откладывая значения z на одной комплексной плоскости, а значения ω – на другой, функцию комплексного переменного можно геометрически представить как некоторое отображение области D плоскости z на некоторую область E плоскости ω (рис. 2.2).

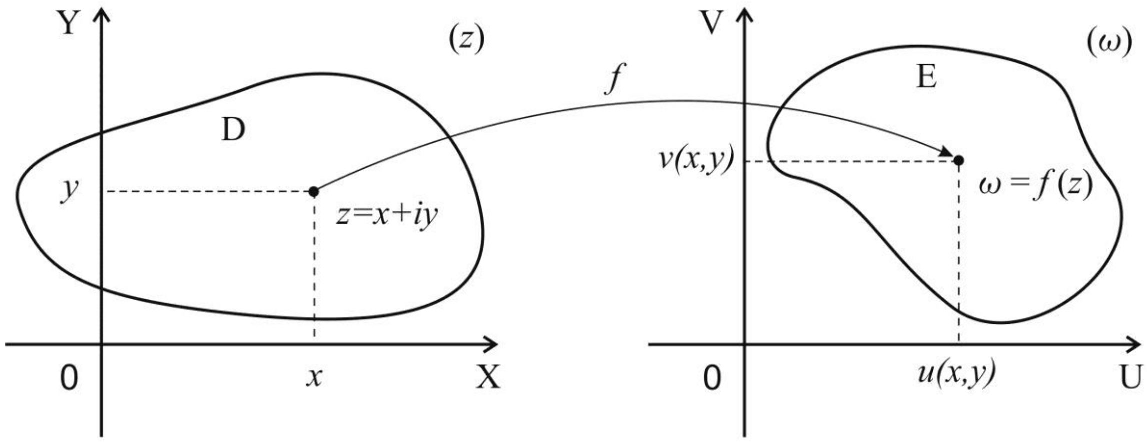

Рис. 2.2

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$, кроме, может быть, самой точки z_0. Под δ – *окрестностью точки* z_0 комплексной плоскости понимают внутренность круга радиуса δ с центром в точке z_0.

Комплексное число a называется *пределом функции* $f(z)$ в точке z_0, если для любого положительного числа ε найдется положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|f(z) - a| < \varepsilon$ для всех z, удовлетворяющих неравенству $0 < |z - z_0| < \delta(\varepsilon)$.

Для обозначения предела используется обычная запись

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = a.$$

Справедливо следующее утверждение: *для того чтобы в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$ *существовал предел функции* $f(z)$ $a = b + ic$, *необходимо и достаточно, чтобы в точке* (x_0, y_0) *существовали пределы двух функций действительных переменных* $u = u(x, y) = \mathrm{Re}(f(z))$, $v = v(x, y) = \mathrm{Im}(f(z))$ *и при этом выполнялись равенства:*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = b, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = c.$$

Теоремы об арифметических свойствах пределов для функции действительного переменного справедливы и для функции комплексного переменного. Если функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют пределы в точке z_0, то

$$\lim_{z\to z_0}(p\,f(z)\pm qg(z))=p\lim_{z\to z_0}f(z)\pm q\lim_{z\to z_0}g(z),$$

где p, q – постоянные;

$$\lim_{z\to z_0}(f(z)\cdot g(z))=\lim_{z\to z_0}f(z)\cdot\lim_{z\to z_0}g(z);$$

$$\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\lim\limits_{z\to z_0}f(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}g(z)},\ \text{если}\ \lim_{z\to z_0}g(z)\neq 0$$

Функция $\omega=f(z)$, определенная в конечной точке z_0 и в некоторой ее окрестности, называется *непрерывной* в точке z_0, если предел функции в точке z_0 равен ее значению в этой точке, т. е. $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=f(z_0)$.

Как и для функции действительного переменного назовем $\Delta z=z-z_0$ *приращением аргумента*, а $\Delta\omega=f(z)-f(z_0)$ – *приращением функции*.

Функция $\varphi(z)$ называется *бесконечно малой* в окрестности точки z_0, если $\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)=0$.

Можно сформулировать еще одно определение непрерывности функции: функция $\omega=f(z)$ называется *непрерывной* в конечной точке z_0, если бесконечно малому приращению Δz аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение $\Delta\omega$ функции.

Функция $\omega=f(z)$ называется *непрерывной* в *бесконечно удаленной точке* $z_0=\infty$, если $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\omega_0$, где ω_0 – конечное число, которое принимают за значение функции $f(z)$ в точке $z_0=\infty$.

Геометрически определение непрерывности функции означает, что для всех точек z, лежащих внутри круга $|z-z_0|<\delta$ достаточно малого радиуса δ, с центром в точке z_0, соответствующие значения функции $\omega=f(z)$ изображаются точками, лежащими внутри круга $|\omega-\omega_0|<\varepsilon$ сколь угодно малого радиуса ε с центром в точке $\omega_0=f(z_0)$.

Функция $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ будет непрерывной в точке $z_0=x_0+iy_0$, тогда и только тогда, когда в этой точке будут непрерывными действительные функции $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$.

Функция $\omega=f(z)$ называется *непрерывной* в некоторой области D, если она непрерывна в каждой точке этой области. Класс непрерывных на множестве D функций будем обозначать $C(D)$. Сумма, разность и произведение двух функций, $f(z)$ и $g(z)$, непрерывных в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ (в области D), есть функция, непрерывная в той же точке (в той же области); частное непрерывных в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ (в области D) есть функция, непрерывная в той же точке (в той же области), если $g(z_0) \neq 0$ (если $g(z) \neq 0$ в области D). Например, функции $f(z) = z$, $f(z) = \bar{z}$, $f(z) = |z|$, $f(z) = \mathrm{Re}(z)$, $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ и $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ непрерывны во всей комплексной плоскости, а рациональная функция $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, где $P(z)$ и $Q(z)$ – многочлены, непрерывна во всей комплексной плоскости, за исключением точек, где $Q(z) = 0$. Модуль непрерывной функции комплексного переменного обладает теми же свойствами, что и непрерывная функция действительного переменного.

Примеры

1. Найдите значение функции $f(z) = \dfrac{5}{z}$ *в точке* $z_0 = 3 + 4i$.

Решение.

$$f(z_0) = f(3+4i) = \frac{5}{3+4i} = \frac{5\cdot(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{5\cdot(3-4i)}{9-16i^2} =$$

$$= \frac{5\cdot(3-4i)}{25} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Ответ: $f(3+4i) = \dfrac{3}{5} - \dfrac{4}{5}i.$

2. Установите соответствие между функцией комплексного переменного:

1) $f(z) = z + 2$; 2) $f(z) = 4 + 3z$; 3) $f(z) = 5z - 7$

и ее значением в точке $z_0 = 3 - 2i$:

A) $13 + 6i$ B) –2 C) $5 - 2i$ D) $8 - 10i$ E) $13 - 6i$

Решение.

Найдем значение заданных функций в точке $z_0 = 3 - 2i$:

1) $f(z_0) = f(3-2i) = 3 - 2i + 2 = 5 - 2i$;

2) $f(z_0) = f(3-2i) = 4 + 3\cdot(3-2i) = 4 + 9 - 6i = 13 - 6i$;

3) $f(z_0) = f(3-2i) = 5\cdot(3-2i) - 7 = 15 - 10i - 7 = 8 - 10i$.

Ответ:

1	2	3
C	E	D

3. Найдите образ E множества D при отображении $\omega = f(z)$:

a) D – ось Ox, $f(z) = 3iz + 5$;

b) D – круг $|z| \le 2$, $f(z) = z + 3 + 4i$.

Решение.

a) Для точек действительной оси $z = x + i \cdot 0 = x$, поэтому $\omega = f(z) = f(x) = 3ix + 5$. Следовательно, $u = 5$, $v = 3x$, $x \in \Re$. В плоскости (ω) данные уравнения задают прямую, параллельную мнимой оси (рис. 2.3);

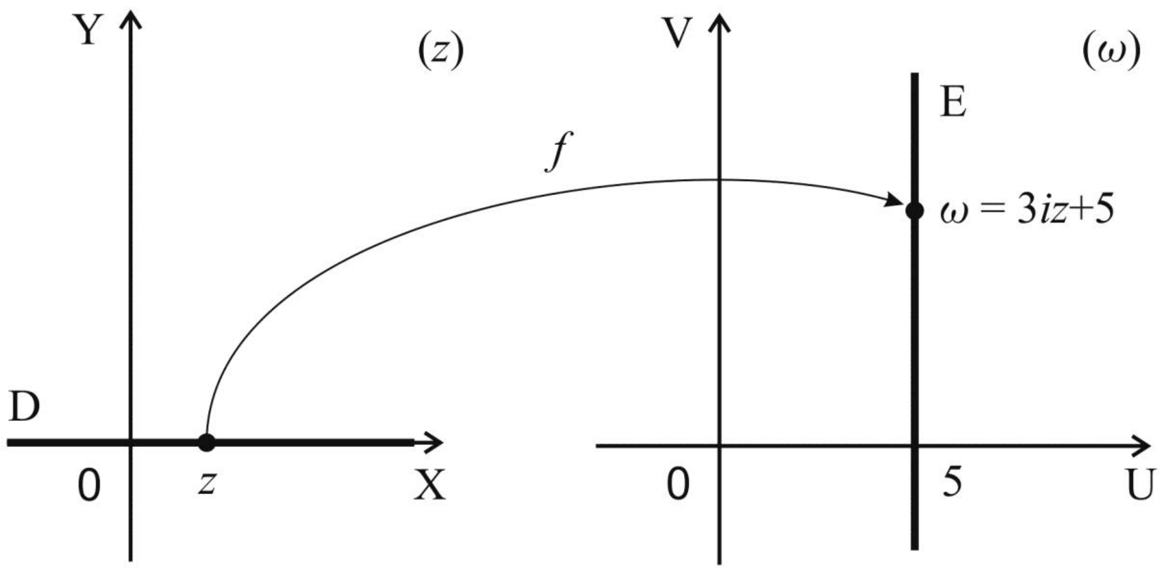

Рис. 2.3

b) зададим комплексную функцию $\omega = f(z) = z + 3 + 4i$ двумя функциями двух действительных переменных x и y: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. $\omega = f(z) = f(x + iy) = x + iy + 3 + 4i = x + 3 + i \cdot (y + 4)$, тогда $u = x + 3$, $v = y + 4$. Это означает, что заданное отображение сводится к параллельному переносу плоскости (z) на вектор $\vec{c} = (3; 4)$. При параллельном переносе круг переходит в круг с тем же радиусом. Следовательно, отображением круга $|z| \le 2$ будет круг $|\omega - (3 + 4i)| \le 2$ (рис. 2.4).

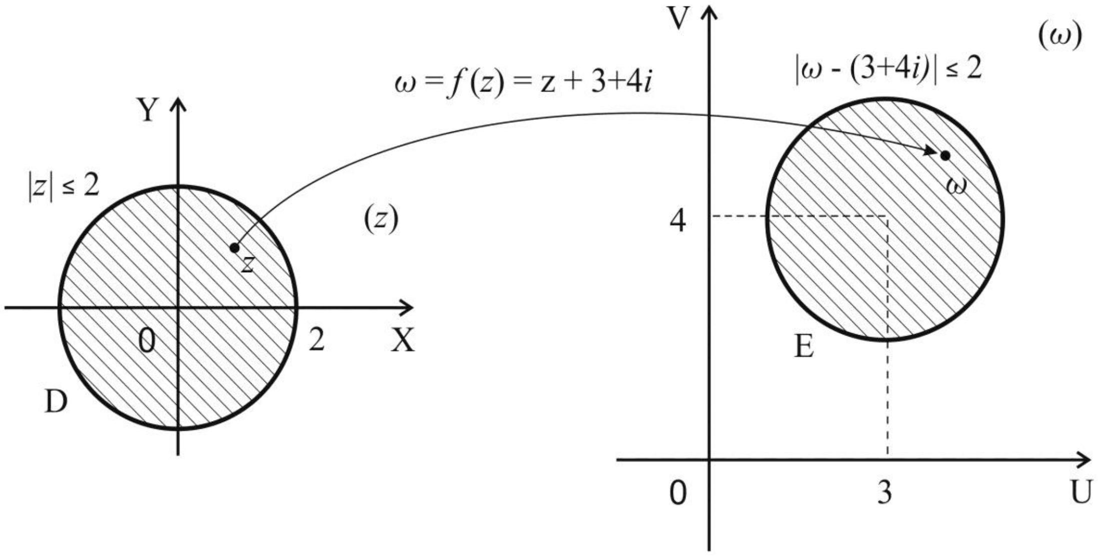

Рис. 2.4

Ответ: а) E – прямая $u = 5$; b) E – круг $|\omega - (3+4i)| \le 2$.

4. Определите действительную и мнимую части функции $f(z) = \dfrac{z+2}{z+4}$.

Решение.

Положим $z = x + iy$, тогда

$$f(z) = \frac{x+iy+2}{x+iy+4} = \frac{x+2+iy}{x+4+iy} = \frac{(x+2+iy)(x+4-iy)}{(x+4+iy)(x+4-iy)} =$$

$$= \frac{x^2+y^2+6x+8+i\cdot(2y)}{(x+4)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+6x+8}{(x+4)^2+y^2} + i\,\frac{2y}{(x+4)^2+y^2}.$$

Ответ: $\mathrm{Re}(f(z)) = \dfrac{x^2+y^2+6x+8}{(x+4)^2+y^2}$; $\mathrm{Im}(f(z)) = \dfrac{2y}{(x+4)^2+y^2}$.

5. Определите мнимую часть функции $f(z) = z^2 + 2\bar{z} + 2i - 4$ *при* $z = 3 - 2i$.

Решение.

Если $z = 3 - 2i$, то

$$\bar{z} = 3 + 2i,$$

$$f(z) = (3-2i)^2 + 2\cdot(3+2i) + 2i - 4 = 9 - 12i - 4 + 6 + 4i + 2i - 4 = 7 - 6i.$$

Ответ: $\mathrm{Im}(f(z)) = -6$.

6. Если z *и* $\bar{z}$ *– комплексно-сопряженные числа, то действительная часть функции* $f(z) = z\cdot\bar{z} + 2z + i - 3$, *где* $z = x + iy$, *имеет вид:*

а) $2y + 1$; b) $x^2 + y^2 + 2x - 3$; c) $x^2 + 2x + -3$; d) $x^2 + 2x$.

Решение.

Если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$. Тогда

$$f(z) = (x+iy)(x-iy) + 2\cdot(x+iy) + i - 3 = x^2 + y^2 + 2x + i\cdot 2y + i - 3 =$$
$$= (x^2 + y^2 + 2x - 3) + i\cdot(2y+1).$$

Следовательно, действительная часть функции $f(z) = z\cdot\bar{z} + 2z + i - 3$ имеет вид: $\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 + y^2 + 2x - 3$.

Ответ: b).

7. Определите функцию $f(z)$*, где* $z = x + iy$, если $\mathrm{Re}(f(z)) = x$, *а* $\mathrm{Im}(f(z)) = -y$.

Решение.

Из условия задачи $f(z) = x - iy$. Выразим x и y через z. Поскольку $z = x + iy$, а $\bar{z} = x - iy$, то $z + \bar{z} = 2x$, $z - \bar{z} = i\cdot 2y$, $z - \bar{z} = i\cdot 2y$, откуда $x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, $y = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$. Следовательно,

$$f(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} - i\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{z+\bar{z}}{2} - \frac{z-\bar{z}}{2} = \bar{z}.$$

Ответ: $f(z) = \bar{z}$.

§ 3. Основные элементарные функции комплексного переменного

Элементарные функции комплексного переменного являются естественным продолжением в комплексную область элементарных функций действительного переменного. Однако при таком распространении функции приобретают иногда новые свойства. Например, показательная функция комплексного переменного e^z является периодической, тригонометрические функции $\sin z$ и $\cos z$ становятся неограниченными, а логарифмы отрицательных чисел могут быть определены и т. д.

Целой рациональной функцией называют многочлен n-й степени

$$\omega = P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0,\ n \in \aleph,$$

где a_n, a_1, a_0, – комплексные числа, $a_n \neq 0$; n – степень многочлена. Функция $P_n(z)$ определена на всей комплексной плоскости. Частный случай такой функции – *целая линейная функция*, определяемая формулой

$$\omega = P_1(z) = az + b,$$

где a и b – комплексные числа.

Рациональная функция определяется равенством

$$\omega = R(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0}{b_m z^m + b_{m-1}z^{m-1} + \ldots + b_1 z + b_0},$$

где $P_n(z)$, $Q_m(z)$ – многочлены, $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$, $P_n(z)$ и $Q_m(z)$ не имеют общих множителей. Если $Q_m(z) = b_m(z - z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (z - z_p)^{k_p}$, $z_i \neq z_j$ при $i \neq j$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = m$, то функция $R(z)$ определена на всей комплексной плоскости за исключением точек z_1, $z_2, \ldots$, z_p. Примером такой функции является *линейная функция дробно-линейная функция* $\omega = R(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $ad - bc \neq 0$.

Показательная функция $\omega = e^z$ определяется формулой Эйлера

$$\omega = e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \qquad (7)$$

которая была использована для записи комплексного числа в показательной форме. Положив в равенстве (7) $y = 0$ получаем, что для действительных значений $z = x$ показательная функция e^z совпадает с определением показательной функции действительного переменного. Таким образом, комплексная экспонента является продолжением известной функции e^x на комплексную плоскость.

Основные свойства функции e^z были описаны Л. Эйлером в 40-х годах XVIII века и систематически изложены в его работе «Введение в анализ бесконечно малых», вышедшей в 1748 г. Функция e^z обладает свойствами, справедливость которых установлена в действительной области для e^x, $x \in \Re$, например:

1) для всех $z \in \mathbb{C}$, $e^z \neq 0$;

2) $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$. (8)

С другой стороны, в силу расширения имеют место свойства, аналога которых нет в действительной области. Например, функция e^z является неоднолистной на множестве $\mathbb{C}$ и периодической (ее период $2\pi i$ – чисто мнимое число). Последнее вытекает из равенства

$$e^{z+2\pi i} = e^z \cdot e^{2\pi i} = e^z \cdot (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = e^z,$$

справедливого при любых значениях z.

Заметим, что $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, или $e^{i\pi} + 1 = 0$. Это простое и удивительное соотношение одновременно содержит основные знакомые константы геометрии (число π), алгебры (1), математического анализа (e) и теории функций комплексного переменного (i).

Из определения показательной функции комплексного переменного получаем:

$$\left|e^z\right| = \sqrt{\left(e^x \cos y\right)^2 + \left(e^x \sin y\right)^2} = \sqrt{e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y)} =$$
$$= \sqrt{e^{2x}} = e^x = e^{\mathrm{Re}(z)},$$
$$\arg e^z = y = \mathrm{Im}(z).$$

Логарифмическая функция

Понятие функции, обратной показательной функции, как и в действительной области, связано с понятием логарифма числа. Значения показательной функции $e^{\omega} = z$ всегда отличны от нуля, поэтому логарифмическая функция определяется на всей комплексной плоскости (z), кроме точки $z = 0$.

Первая удовлетворительная теория логарифмической функции в комплексной плоскости была дана в 1749 г. Л. Эйлером, который исходил из определения $Lnz = \lim\limits_{n\to\infty} n(z^{1/n} - 1)$.

Логарифмом комплексного числа $z \neq 0$ называется число ω, такое, что выполняется равенство $e^{\omega} = z$; обозначается $\omega = \ln z$. Заметим, что логарифмы отрицательных действительных чисел существуют.

Для нахождения логарифма числа z, т. е. для нахождения действительной и мнимой частей числа ω, запишем число z в показательной форме ($z = re^{i\varphi}$), а число ω будем искать в алгебраической форме $\omega = u + iv$. Тогда равенство $e^{\omega} = z$ примет вид $e^{\omega} = e^{u+iv} = re^{i\varphi}$ или $e^u \cdot e^{iv} = re^{i\varphi}$. Используя условие равенства комплексных чисел, записанных в показательной форме, получаем $e^u = r$, а значит, $u = \ln r$, $(r > 0)$; $v = \varphi + 2\pi k$, $k \in \mathrm{Z}$. Для искомого числа ω получаем: $\omega = \ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$, $k \in \mathrm{Z}$, где $r = |z|$, $\varphi = \arg z$.

Это означает, что логарифм комплексного числа определяется неоднозначно, а полученное выражение задает множество значений логарифма данного числа z, отличающихся на $2\pi k i$, $k \in \mathrm{Z}$, и обозначается Lnz:

$$Lnz = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2\pi k),\ k \in \mathrm{Z}. \tag{9}$$

Для каждого фиксированного значения $k \in \mathrm{Z}$ получаем определенное значение логарифма числа z; при $k = 0$ оно называется главным значением логарифма:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z,\ -\pi < \arg z \leq \pi. \tag{10}$$

Если z – действительное положительное число, то $\arg z = 0$ и $\ln z = \ln|z|$. Следовательно, главное значение логарифма действительного положительного числа совпадает с обычным натуральным логарифмом этого числа.

Введение понятия логарифма комплексного числа позволяет решать в комплексной области *показательные уравнения.* Простейшим показательным уравнением является уравнение вида $e^z + a = 0$, решение которого сводится к нахождению значений выражения $z = Ln(-a)$.

Логарифмическая функция вводится как функция, обратная к показательной функции, а именно как решение уравнения $e^{\omega} = z$; для нее используется обозначение $\omega = Lnz$; значения функции при любом $z \neq 0$ определяются по формуле (9). Эта формула показывает, что логарифмическая функция комплексного переменного имеет бесчисленное множество значений, т. е. $\omega = Lnz$ – многозначная функция. Однозначную ветвь логарифмической функции можно выделить, зафиксировав число n в формуле (9). Так, например, положив $n = 0$, получим однозначную функцию, которую называют *главным значением* логарифма Lnz и обозначают символом $\ln z$.

Главное значение логарифма $\ln z$ представляет собой однозначную ветвь логарифмической функции, которая на положительной действительной полуоси $(\arg z = 0)$ совпадает с обычным действительным логарифмом.

Если точка z опишет замкнутый путь, один раз, обходящий против часовой стрелки точку 0, то $|z|$ вернется к первоначальному значению, а $\arg z$ получит приращение 2π, т. е. после обхода Lnz получит приращение $2\pi i$.

Логарифмическая функция Lnz обладает обычными для логарифма свойствами:

$$Lnz_1 + Lnz_2 = Ln(z_1 \cdot z_2);$$

$$Lnz_1 - Lnz_2 = Ln(\frac{z_1}{z_2});$$

$$Ln(z^n) = nLnz;$$

$$Ln\sqrt[n]{z} = \frac{1}{n}Lnz.$$

Тригонометрические функции комплексного переменного определяются при помощи экспоненты посредством равенств:

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}. \qquad (11)$$

Укажем некоторые свойства этих функций.

Непосредственно из определения синуса и косинуса (11) следует:

формула Эйлера $e^{iz} = \cos z + i \sin z$;

$\cos z$ – четная, а $\sin z$ – нечетная функция, т. е. $\cos(-z)=\cos z$, $\sin(-z)=-\sin z$;

тригонометрические функции комплексного переменного наследуют основные свойства обычного синуса и косинуса, например:

$\sin^2 z+\cos^2 z=1$,

$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cos z_2+\cos z_1\sin z_2$,

$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$,

$\sin\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=\cos z$.

Замечательным свойством, не имеющим аналога в действительной области, является неограниченность (по модулю) функций $\sin z$ и $\cos z$.

Из равенств (11) и $2\pi i$-периодичности комплексной экспоненты следует 2π-периодичность синуса и косинуса:

$$\sin(z+2\pi k)=\sin z,\ \cos(z+2\pi k)=\cos z,\ k\in Z.$$

Полагая $z=x+iy$, выделим действительную и мнимую части комплексных синуса и косинуса:

$$\sin(x+iy)=\frac{e^{-y+ix}-e^{y-ix}}{2i}=\frac{e^{-y}(\cos x+i\sin x)-e^{y}(\cos(-x)+i\sin(-x))}{2i}=$$

$$=\frac{\cos x(e^{-y}-e^{y})+i\sin x(e^{-y}+e^{y})}{2i}=\sin x\cdot chy+i\cos x\cdot shy,$$

следовательно,

$$\operatorname{Re}(\sin z)=\sin x\cdot chy,\ \operatorname{Im}(\sin z)=\cos x\cdot shy. \qquad (12)$$

Аналогично получаем:

$$\operatorname{Re}(\cos z)=\cos x\cdot chy,\ \operatorname{Im}(\cos z)=-\sin x\cdot shy. \qquad (13)$$

Из формул (12), (13) следует, что при $z=x\in\Re$ функции $\sin z$ и $\cos z$ совпадают с обычными синусом и косинусом. Поэтому комплексные синус и косинус, определенные равенствами (11), являются продолжениями соответствующих тригонометрических функций действительного переменного с действительной оси на комплексную плоскость.

Функции tgz *и* $ctgz$ определяются через $\sin z$ и $\cos z$ обычным образом:

$$tgz=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}},\ ctgz=\frac{\cos z}{\sin z}=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}. \qquad (14)$$

Из определения (14) и соответствующих свойств функций $\sin z$ и $\cos z$ вытекают следующие свойства tgz и $ctgz$:

$tg(-z)=-tgz$;

$ctg(-z)=-ctgz$;

$tg\left(\frac{\pi}{2}+z\right)=-ctgz$.

Как и функции действительного переменного, комплексные тангенс и котангенс являются π-периодическими. Справедливыми для комплексных тангенса и котангенса остаются и другие известные тригонометрические соотношения. Действительные и мнимые части функций tgz и $ctgz$ имеют вид:

$$\mathrm{Re}(tgz)=\frac{\sin 2x}{\cos 2x+ch2y},\quad \mathrm{Im}(tgz)=\frac{sh2y}{\cos 2x+ch2y};$$

$$\mathrm{Re}(ctgz)=\frac{\sin 2x}{ch2y-\cos 2x},\quad \mathrm{Im}(ctgz)=\frac{-sh2y}{ch2y-\cos 2x}.$$

Примеры

1. Найдите значение функции комплексной экспоненты в точках:

1) $z_1=\ln 6+i\frac{\pi}{6}$; 2) $z_2=-2+i$.

Решение.

1) $e^{\ln 6+i\frac{\pi}{3}}=e^{\ln 6}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=6\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=3+3\sqrt{3}\cdot i;$

2) $e^{-2+i}=e^{-2}\cdot(\cos 1+i\sin 1)\approx 0{,}1353\cdot(0{,}5403+0{,}8415i)\approx 0{,}0730+0{,}1138i.$

Ответ: 1) $e^{\ln 6+i\frac{\pi}{2}}=3+3\sqrt{3}i$; 2) $e^{-2+i}\approx 0{,}0730+0{,}1138i.$

2. Найдите $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\arg z$ *комплексного числа* $z=e^{3+i}$.

Решение. Найдем сначала модуль и аргумент числа $z=e^{3+i}$: $|z|=|e^{3+i}|=e^3$, $\varphi=\arg(e^{3+i})=1$. Теперь можно записать:

$$x=\mathrm{Re}(e^{3+i})=e^3\cos 1,$$
$$y=\mathrm{Im}(e^{3+i})=e^3\sin 1.$$

Ответ: $\mathrm{Re}(e^{3+i})=e^3\cos 1$, $\mathrm{Im}(e^{3+i})=e^3\sin 1$, $|e^{3+i}|=e^3$, $\arg(e^{3+i})=1$.

3. Если $z=-3+4i$, *то действительная часть логарифма* Lnz *равна*:

1) $\ln 5$; 2) $\ln 3$; 3) $\ln\frac{3}{5}$; 4) $\ln\frac{5}{3}$.

Решение. Если $z=x+iy$, то $Lnz=\ln|z|+i\cdot(\arg z+2\pi k)$, $k\in Z$, поэтому $\mathrm{Re}(Lnz)=\ln|z|$, где $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$. В нашем примере $x=-3$, $y=4$, следовательно, $|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$ и $\mathrm{Re}(Lnz)=\ln 5$.

Ответ: 1).

4. Если $z = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ *, то мнимая часть логарифма* $\mathrm{Ln}z$ *равна:*

1) $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$; 2) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$; 3) $-\frac{\pi}{3}$; 4) $-\sqrt{3}$.

Решение. Логарифм комплексного числа определяется формулой (9) $Lnz = \ln|z| + i \cdot (\arg z + 2\pi k)$, $k \in Z$. Тогда $\mathrm{Im}(Lnz) = \arg z + 2\pi k$, $k \in Z$, где главное значение $\arg z$ находится из системы (6) (см. § 3 гл. 1).

В нашем случае

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{-\sqrt{3}}{\sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2}}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{1}{2}, \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

следовательно, φ – угол четвертой четверти. Учитывая условие $-\pi < \varphi \le \pi$, получаем $\varphi = -\frac{\pi}{3}$, $\mathrm{Im}(Lnz) = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Ответ: 2).

5. Найдите значение логарифмической функции в точках:

1) $z_1 = 3$; 2) $z_2 = -3$; 3) $z_3 = i$; 4) $z_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$.

Решение. Логарифм комплексного числа определяется формулой (9), где $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, а главное значение аргумента $\arg z$ находится

из системы $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{cases}$

1) $z_1 = 3$, поэтому $x = 3$, $y = 0$, $|z_1| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$, $\cos\varphi = \frac{3}{3} = 1$, $\sin\varphi = \frac{0}{3}$, $\arg z_1 = 0$, тогда

$$Ln3 = \ln 3 + i \cdot (0 + 2\pi k) = \ln 3 + i \cdot 2\pi k, \quad k \in Z;$$

2) $z_2 = -3$, $x = -3$, $y = 0$, $|z_2| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$, $\cos\varphi = \frac{-3}{3} = -1$, $\sin\varphi = \frac{0}{3}$, $\arg z_2 = \pi$, поэтому

$$Ln(-3) = \ln 3 + i \cdot (\pi + 2\pi k), \; k \in Z;$$

3) $z_3 = i$, $x = 0$, $y = 1$, $|z_3| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$, $\cos\varphi = \frac{0}{1} = 0$, $\sin\varphi = \frac{1}{1}$,

$\arg z_3 = \frac{\pi}{2}$, следовательно,

$$Lni = \ln 1 + i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k) = i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k), \quad k \in Z;$$

4) $z_4 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$, $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $|z_4| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{4} = 2$,

$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\arg z_4 = \frac{\pi}{4}$, отсюда

$$Ln(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \ln 2 + i \cdot (\frac{\pi}{4} + 2\pi k), \quad k \in Z.$$

Ответ:

1) $Ln3 = \ln 3 + i \cdot 2\pi k$, $k \in Z$;

2) $Ln(-3) = \ln 3 + i \cdot (\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$;

3) $Lni = i \cdot (\frac{\pi}{2} + 2\pi k)$, $k \in Z$;

4) $Ln(\sqrt{2} + \sqrt{2}i) = \ln 2 + i \cdot (\frac{\pi}{4} + 2\pi k)$, $k \in Z$.

6. Вычислите $\sin(\pi - i)$.

Решение. Для нахождения синуса комплексного числа воспользуемся формулой (11):

$$\sin(\pi - i) = \frac{e^{i(\pi - i)} - e^{-i(\pi - i)}}{2i} = \frac{e^{1+i\pi} - e^{-1-i\pi}}{2i} = \frac{e^1 e^{i\pi} - e^{-1} e^{-i\pi}}{2i} =$$

$$= \frac{\left(e^1(\cos\pi + i\sin\pi) - e^{-1}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))\right)}{2i} = \frac{\left(e^1(-1+0) - e^{-1}(-1+0)\right)}{2i} =$$

$$= \frac{1}{i} \cdot \frac{-e^1 + e^{-1}}{2} = i \cdot \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = i \cdot sh1.$$

Ответ: $i \cdot sh1$.

7. Определите функцию $f(z)$*, где z = x + iy, если* $\mathrm{Re}(f(z)) = e^x \cos y$, $\mathrm{Im}(f(z)) = e^x \sin y$.

Решение.

$f(z) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z$.

Ответ: $f(z) = e^z$.

§ 4. Дифференцирование функции комплексного переменного

Производная функции комплексного переменного определяется, как и в действительной области, с использованием понятия предела.

Однозначная функция $f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке z_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки, включая и саму точку, и существует предел $\lim\limits_{z\to z_0} = \dfrac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0)$. Предел называют производной функции $f(z)$ в точке z_0. Обозначая обычным образом $\Delta z = z - z_0$, получим для производной привычное выражение $f'(z_0)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$. Если этот предел существует, то он не зависит от способа стремления к нулю величины Δz, поэтому точка $z_0+\Delta z$ может приближаться к точке z_0 по любому из бесконечного множества направлений (для функции одного действительного переменного точка $x+\Delta x$ приближается к точке x лишь по двум направления: слева и справа). Это налагает на функцию сильные ограничения, т. е. если она имеет в некоторой области производную первого порядка, то там же обязаны существовать и производные всех более высоких порядков. Это свойство не характерно для функций действительного переменного.

Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке следует ее непрерывность в этой точке. Обратное не всегда имеет место.

Если в выражении $f = u + iv$ взять в качестве u и v произвольные дифференцируемые функции, то составная функция f может оказаться недифференцируемой в комплексном смысле. Например, рассмотрим функцию $f(z)=\bar{z}=x-iy$. Тогда $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta z}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}$. Положив сначала $\Delta x = 0$, при $\Delta y \neq 0$, а затем $\Delta y = 0$, $\Delta x \neq 0$, получим два разных значения предела: сначала -1, а затем 1. Последнее означает, что функция $f(z)=\bar{z}$ не является дифференцируемой. Для функций комплексного переменного имеют место правила дифференцирования, аналогичные правилам для производных от функций действительного переменного: если в точке z существуют производные $f'(z)$ и $g'(z)$, то в этой точке существуют и производные $\left(c\cdot f(z)\right)'$, $\left(f(z)\pm g(z)\right)'$, $\left(f(z)\cdot g(z)\right)'$, $\left(\dfrac{f(z)}{g(z)}\right)'$, и справедливы равенства:

$$\left(c\cdot f(z)\right)' = c\cdot f'(z),$$

где $c\in\mathbb{C}$.

$$\left(f(z)\pm g(z)\right)' = f'(z)\pm g'(z),$$

$$\left(f(z)\cdot g(z)\right)' = f'(z)\cdot g(z)+ f(z)\cdot g'(z),$$

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)\cdot g(z)- f(z)\cdot g'(z)}{g^2(z)} ,$$

при условии, что $g(z)\neq 0$.

Сложная функция $g\left(f(z)\right)$ дифференцируема в точке z, если в этой точке дифференцируема функция $f(z)$, а функция $g(v)$ дифференцируема в точке $v= f(z)$. При этом справедливо равенство $\left(g\left(f(z)\right)\right)' = g'_f(f)\cdot f'_z(z)$.

Если функция $f=u(x,y)+iv(x,y)$ определена в некоторой окрестности точки $z=x+iy$, причем в этой точке действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z необходимо и достаточно выполнения условий $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Эти равенства называются *условиями Коши – Римана (условиями Эйлера – Даламбера).*

В полярных координатах (r,φ) условия Коши – Римана записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial v(r,\varphi)}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi}. \qquad (15)$$

С учетом условий Коши – Римана производная дифференцируемой функции может быть найдена по одной из формул:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x},\quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y};$$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y},\ f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}; \qquad (16)$$

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi}-i\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right).$$

Для исследования функции $f(z)$ на дифференцируемость и нахождения ее производной следует либо воспользоваться определением, либо выполнить следующее:

1) найти действительную и мнимую части функции $f(z)$: $u=u(x,y)=\mathrm{Re}\, f(z)$, $v=v(x,y)=\mathrm{Im}\, f(z)$;

2) определить частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$;

3) проверить выполнение условий Коши – Римана;

4) записать выражение производной по одной из формул (15).

Укажем области дифференцируемости некоторых элементарных функций и приведем формулы для их вычисления (табл. 2.1).

Таблица 2.1

$f(z)$	$f'(z)$	Область дифференцирования
z^n, $n \in N$	$n \cdot z^{n-1}$	$\mathbb{C}$
e^z	e^z	$\mathbb{C}$
$\sqrt[n]{z}$, $n \in N$	$\frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1}$	Любая область D, не содержащая замкнутых кривых, обходящих точку $z = 0$
$\cos z$	$-\sin z$	$\mathbb{C}$
$\sin z$	$\cos z$	$\mathbb{C}$
Lnz	$\frac{1}{z}$	Любая область D, не содержащая замкнутых кривых, обходящих точку $z = 0$

Фундаментальным понятием в теории функций комплексного переменного является понятие аналитической функции.

Однозначная функция $f(z)$ называется *аналитической* (голоморфной) в точке z_0, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки. Функция, дифференцируемая во всех точках некоторой области, называется *аналитической в этой области.* Из этого определения видно, что условие аналитичности в точке не совпадает с условием дифференцируемости в этой же точке (первое условие более сильное).

Дифференциалом df аналитической функции $f(z)$ в точке z_0 называется главная часть ее приращения, т. е. $df = f'(z_0)\Delta z$. Поскольку $dz = \Delta z$, то производная функции равна отношению дифференциала функции к дифференциалу независимого переменного:

$$f'(z) = \frac{df}{dz}.$$

Если функция $f = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в некоторой области, то функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению Лапласа $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0\right)$, а значит, являются *гармоническими функциями.*

Действительная и мнимая части аналитической функции, кроме того, связаны условиями Коши – Римана, поэтому являются *сопряженными гармоническими функциями.* Основываясь на этом, всегда можно построить аналитическую функцию, для которой заданная гармоническая функция будет действительной или мнимой частью. Задача нахождения гармонической функции, сопряженной с данной гармонической функцией, сводится к интегрированию полного дифференциала функции двух переменных.

Пусть, например, заданная гармоническая функция $u(x,y)$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z)$. Гармоническую функцию $v(x,y)$, сопряженную с функцией $u(x,y)$, найдем из условий Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, которые определят две частные производные $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$ неизвестной функции v (полный дифференциал неизвестной функции v). Поэтому функция $v=v(x,y)$ с точностью до постоянного слагаемого определяется формулой

$$v(x,y)=\int -\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy. \qquad (17)$$

Если известна гармоническая функция $v(x,y)$, то сопряженная с ней гармоническая функция $u=u(x,y)$ с точностью до постоянного слагаемого определяется формулой

$$u(x,y)=\int \frac{\partial u}{\partial y}dx-\frac{\partial u}{\partial x}dy. \qquad (18)$$

Примеры

1. Дана функция $f(z)=3z^2+2-6i$. *Найдите значение производной этой функции в точке* $z_0=2-3i$.

Решение. Найдем сначала производную заданной функции в произвольной точке. При нахождении производной воспользуемся правилами дифференцирования функций комплексного переменного и равенством $(z^2)'=2z$:

$$f'(z)=(3z^2+2-6i)'=3\cdot 2z=6z,$$

поэтому $f'(z_0)=f'(2-3i)=6(2-3i)=12-18i$.

Ответ: $f'(2-3i)=12-18i$.

2. Найдите значение производной функции $f(z)=e^{2z}$ *в точке* $z_0=i\frac{\pi}{4}$.

Решение.

При нахождении производной воспользуемся правилом нахождения производной сложной функции $(f(\varphi(z)))'=f'_{\varphi(z)}(\varphi(z))\varphi'_z(z)$ и равенствами:

$(e^z)' = e^z$, $(z)' = 1$;

$f'(z) = (e^{2z})' = e^{2z} \cdot (2z)' = 2e^{2z}$;

$f'(z_0) = f'(i\dfrac{\pi}{4}) = 2e^{2\cdot i\frac{\pi}{4}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = 2\cdot i = 2i$.

Ответ: $f'(i\dfrac{\pi}{4}) = 2i$.

3. Найдите значение производной функции $f(z) = \dfrac{z+6i}{z-2i}$ *в точке* $z_0 = 1+i$.

Решение. Найдем производную заданной функции в произвольной точке, используя правила дифференцирования частного:

$$f'(z) = \left(\frac{z+6i}{z-2i}\right)' = \frac{(z+6i)'\cdot(z-2i)-(z+6i)\cdot(z-2i)'}{(z-2i)^2} = \frac{1\cdot(z-2i)-(z+6i)\cdot 1}{(z-2i)^2} =$$

$$= \frac{z-2i-z-6i}{(z-2i)^2} = \frac{z-2i-z-6i}{(z-2i)^2} = \frac{-8i}{(z-2i)^2};$$

$$f'(z_0) = f'(1+i) = \frac{-8i}{(1+i-2i)^2} = \frac{-8i}{(1-i)^2} = \frac{-8i}{1^2-2i+i^2}$$

$$= \frac{-8i}{1-2i-1} = \frac{-8i}{-2i} = 4.$$

Ответ: $f'(z_0) = 4$.

4. Найдите точки, в которых существует производная функции $f(z) = \dfrac{1}{z}$, *и вычислите эту производную.*

Решение.

1. Найдем действительную и мнимую части функции $f(z) = \dfrac{1}{z}$.

Поскольку $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$, то $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v(x,y) = -\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

2. Найдем частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{\frac{\partial x}{\partial x}\cdot(x^2+y^2) - \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\cdot x}{(x^2+y^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)=\frac{\frac{\partial x}{\partial y}\cdot(x^2+y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{0\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\cdot(x^2+y^2)-\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=-\frac{0\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{\frac{\partial y}{\partial y}\cdot(x^2+y^2)-\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=-\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

3. Проверим выполнение условий Коши – Римана.

Частные производные функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ существуют для любой пары действительных чисел (x,y), если $x^2+y^2\neq 0$, и представляют собой отношение двух многочленов. Следовательно, частные производные существуют и непрерывны в окрестности каждой точки плоскости $\Re^2$, за исключением точки $(0,0)$, и при этом выполняются равенства $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$. Это означает, что условия Коши – Римана выполняются для любой пары действительных чисел (x,y), кроме пары $(0,0)$. Поэтому производная $f'(z)$ существует в любой точке $z=x+iy$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$, за исключением точки $z=0$.

4. Запишем выражение для производной по первой формуле (15), используя найденные выше частные производные:

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}+i\cdot\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2+i\cdot 2xy}{(x^2+y^2)^2}=$$

$$=\frac{y^2-x^2+i\cdot 2xy}{(x^2-(iy)^2)^2}=\frac{y^2-x^2+i\cdot 2xy}{((x+iy)\cdot(x-iy))^2}=\frac{y^2-x^2+i\cdot 2xy}{(x+iy)^2\cdot(x-iy)^2}=$$

$$=\frac{-(x^2-y^2-i\cdot 2xy)}{(x+iy)^2\cdot(x^2-y^2-i\cdot 2xy)}=-\frac{1}{(x+iy)^2}=-\frac{1}{z^2}.$$

Таким образом, $f'(z)=\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2}$ для всех $z\in\mathbb{C},\ z\neq 0$.

Этот результат можно также получить, используя полярные координаты.

1. Запишем функцию в полярных координатах:

$$f(z)=\frac{1}{z}=\frac{1}{re^{i\varphi}}=\frac{1}{r}\cdot e^{-i\varphi}=\frac{1}{r}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=\frac{1}{r}\cos\varphi+i\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\right),$$

поэтому

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{r}\cos\varphi,\ \ v(r,\varphi)=-\frac{1}{r}\sin\varphi.$$

2. Найдем частные производные функций $u(r,\varphi)$ и $v(r,\varphi)$.

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right)=-\frac{1}{r^2}\cos\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r}\cos\varphi\right)=-\frac{1}{r}\sin\varphi;$$

$$\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\right)=\frac{1}{r^2}\sin\varphi,\quad \frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(-\frac{1}{r}\sin\varphi\right)=-\frac{1}{r}\cos\varphi.$$

3. Проверим выполнение условий Коши – Римана.

Частные производные функций $u(r,\varphi)$ и $v(r,\varphi)$ существуют и непрерывны для любой пары чисел (r,φ), если $r\neq 0$ и выполняются равенства $\dfrac{\partial u}{\partial r}=\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}$, $\dfrac{\partial v}{\partial r}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}$. Это означает, что условия Коши – Римана выполняются для любой пары действительных чисел (r,φ), кроме пары $(0,\varphi)$.

4. Запишем выражение для производной по третьей формуле (16), используя найденные выше частные производные:

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{r}{z}\left(-\frac{1}{r^2}\cos\varphi+i\cdot\frac{1}{r^2}\sin\varphi\right)=$$

$$=-\frac{1}{zr}(\cos\varphi-i\sin\varphi)=-\frac{1}{re^{i\varphi}\cdot r}\cdot e^{-i\varphi}=-\frac{1}{re^{i\varphi}\cdot re^{i\varphi}}=-\frac{1}{z^2}.$$

Ответ: $\left(\dfrac{1}{z}\right)'=-\dfrac{1}{z^2},\ z\in\mathbb{C}\ \ z\neq 0.$

5. Найдите аналитическую функцию $f = u(x,y) + iv(x,y)$ *по ее заданной действительной части* $u = x^3 - 3xy^2 + 2$.

Решение.

1. Находим частные производные функции $u = x^3 - 3xy^2 + 2$ двух переменных x и y до второго порядка:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2 + 2) = 3x^2 - 3y^2, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x;$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2 + 2) = -6xy, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x.$$

Равенство $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + (-6x) = 0$ выполняется для любой точки (x,y), поэтому функция $u = x^3 - 3xy^2 + 2$ является гармонической в любой области D.

2. Определим мнимую часть $v(x,y)$, используя условия Коши – Римана. Согласно первому условию $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$, в нашем примере $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Проинтегрировав последнее равенство по y, получим:

$$v = \int \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int (3x^2 - 3y^2) dy = 3x^2 y - y^3 + \varphi(x).$$

Функция двух переменных $\frac{\partial v}{\partial y}$ была проинтегрирована по одной из переменных (y), поэтому постоянная интегрирования, не зависящая от переменной интегрирования, является функцией переменной x.

Для определения функции $\varphi(x)$ воспользуемся вторым условием Коши – Римана: $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Поскольку $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, то $\frac{\partial v}{\partial x} = -(-6xy) = 6xy$.

Производную $\frac{\partial v}{\partial x}$ можно найти, используя полученное выше выражение для $v(x,y)$: $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2 y - y^3 + \varphi(x)\right) = 6xy + \varphi'(x)$. Сравнив найденные производные $\frac{\partial v}{\partial x}$, получим $\varphi'(x) = 0$. Отсюда $\varphi(x) = C$, где $C = const$, а $v = 3x^2 y - y^3 + C$.

3. Записываем функцию

$$f = u(x,y) + iv(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 2 + i\left(3x^2 y - y^3 + C\right).$$

Преобразуем полученное выражение к функции переменной z, учитывая при этом, что $i^2 = -1$, и используя формулу куба суммы:

$$f = x^3 + 3x^2 iy + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + 2 + iC = (x + iy)^3 + 2 + iC = z^3 + 2 + iC.$$

Ответ: $f = z^3 + 2 + iC$.

§ 5. Понятие о конформном отображении

Свойство конформности – одно из геометрических свойств отображений – относится к важнейшим понятиям математики. Возникшее из физических представлений, понятие конформных отображений имеет широкое применение в различных областях: в задачах гидродинамики и электростатики, в теории упругости и теории потенциалов, а также при решении краевых задач уравнений математической физики. Отдельные задачи, связанные с конформными отображениями, решались еще Даламбером, Эйлером и Гауссом. Начиная с середины XIX века конформные отображения широко применяются в качестве математического аппарата при изучении механики сплошной среды.

Отображение $\omega = f(z)$, обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений в точке z_0, называется *конформным.*

Пусть D – область дифференцируемости функции $f(z)$. Следовательно, на D определена функция $f'(z)$, которую называют производной. $f'(z)$ как функция комплексного переменного определяет отображение области D на область G. В каждой точке $z_0 \in D$ определено комплексное число $f'(z_0)$, и если $f'(z_0) \neq 0$, то определены $|f'(z_0)|$ и $\arg f'(z_0)$. С геометрической точки зрения число $|f'(z_0)|$ – длина радиуса-вектора точки $f'(z_0)$, а $\arg f'(z_0)$ – угол наклона этого радиуса-вектора к действительной оси.

Ответ на вопрос, каким образом эти величины характеризуют отображение $\omega = f(z)$ в точке z_0, дают следующие утверждения:

модуль $|f'(z_0)|$ производной функции $f(z)$, дифференцируемой в окрестности точки z_0, есть коэффициент линейного растяжения кривой в точке z_0 при отображении $\omega = f(z)$;

аргумент производной в точке есть угол поворота кривой в этой точке при отображении $\omega = f(z)$;

отображение с помощью дифференцируемой в окрестности точки z_0 функции $f(z)$, удовлетворяющее условию $f'(z_0) \neq 0$, является конформным в точке z_0. Оно обладает свойством постоянства растяжения и сохранения углов. Причем углы сохраняются как по величине, так и по направлению отсчета.

Отображение $\omega = f(z)$ z_0 называется *конформным в области* D, если оно конформно в каждой точке этой области.

Справедлива теорема: если функция $\omega = f(z)$ аналитична в области D и $f'(z) \neq 0$, то отображение конформно в области D, и наоборот: если отображение $\omega = f(z)$ конформно в области D, то функция $\omega = f(z)$ аналитична в области D и во всех точках этой области $f'(z) \neq 0$.

Отображение с помощью аналитической функции можно рассматривать как преобразование подобия в бесконечно малом, так как сохраняется пропорциональность линейных размеров сходственных линий, в частности границ фигур, и имеет место равенство соответствующих углов. Например, треугольник плоскости (z) переходит в подобный ему криволинейный треугольник плоскости (ω).

В теории и практике конформных отображений часто решаются задачи:

1) нахождение образа данной линии L или области D при заданном отображении $\omega = f(z)$;

2) нахождение функции $f(z)$, осуществляющей отображение данной линии L или области D на заданную линию L' или область D'.

Применяется алгоритм нахождения образа данной линии L при отображении $\omega = f(z)$.

1. Записываем уравнение линии L либо в параметрической форме: $z = z(t)$, либо в комплексной форме: $g\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right) = 0$.

2. Если уравнение линии записано в параметрической форме, то выражение $z(t)$ подставляем в $\omega = f(z)$. Полученное выражение $\omega = f(z(t))$ есть уравнение образа данной линии L при отображении $\omega = f(z)$.

Если уравнение линии записано в комплексной форме, то выражаем z из $\omega = f(z)$ и находим $\bar{z} = \overline{f^{-1}(\omega)}$. Далее подставляем z и $\bar{z}$ в уравнение линии. Полученное выражение представляет собой уравнение образа данной линии L.

Для нахождения образа данной области D при заданном отображении $\omega = f(z)$ можно использовать один из двух алгоритмов.

I. 1. Записываем уравнение границы ∂D заданной области D.

2. Находим образ границы ∂D по приведенному выше алгоритму.

3. Выбираем произвольную внутреннюю точку заданной области и находим ее образ при заданном отображении. Область, которой принадлежит полученная точка, является образом заданной области D.

II. 1. Выражаем z из соотношения $\omega = f(z)$.

2. Подставляем, полученное в 1. выражение z в неравенство, определяющее заданную область D. Полученное выражение – образ заданной области D.

При решении второй задачи (нахождение функции $f(z)$) используют свойства простейших отображений, например, круговое свойство линейного отображения и набор известных отображений.

Пример

Выясните геометрическую картину отображения, осуществляемого функцией $\omega = 3z$.

Решение. Отображение $\omega = 3z$ конформно во всех точках комплексной плоскости, так как $\omega' = 3 \neq 0$. Модуль производной функции $|\omega'(z)| = |3| = 3$, поэтому коэффициент линейного растяжения в любой точке плоскости равен 3. Аргумент производной $\arg\omega'(z) = \arg 3 = 0$ в любой точке плоскости, следовательно, направление при данном отображении не меняется. Отсюда отображение $\omega = 3z$ – преобразование гомотетии с центром в нулевой точке ($\omega(0) = 0$) и коэффициентом гомотетии, равным 3.

Ответ: $\omega = 3z$ – преобразование гомотетии с центром в нулевой точке и коэффициентом гомотетии, равным 3.

§ 6. Задания для самостоятельной работы и типовых расчетов

Задание 1. Найдите значение функции $f(z)$ в точке z_0.

1) $f(z) = z^2 + z - i$, $z_0 = 1 + 2i$;
2) $f(z) = z^2 + 2i$, $z_0 = -1 + 2i$:
3) $f(z) = 2z^2 - 4i$, $z_0 = 2 + 2i$;
4) $f(z) = -z^2 + z + 2i$, $z_0 = 3 - i$;
5) $f(z) = z^2 + 2z - 3i$, $z_0 = 1 + i$;
6) $f(z) = z^2 - 4z + 3i$, $z_0 = 2 - i$;
7) $f(z) = -z^2 + 3z - 4i$, $z_0 = 1 - 2i$;
8) $f(z) = 3z^2 + 4i$, $z_0 = 1 + 2i$;
9) $f(z) = 4z^2 - 3z + i$, $z_0 = 3 - 2i$;
10) $f(z) = 2z^2 - 5z + i$, $z_0 = 2 + i$;
11) $f(z) = -2z^2 + z - 2i$, $z_0 = 1 + 3i$;
12) $f(z) = z^2 + 3z - 5i$, $z_0 = 4 - 2i$;
13) $f(z) = 3z^2 - 5z + 3i$, $z_0 = 1 + i$;
14) $f(z) = z^2 + 6z - 4i$, $z_0 = 3 + 2i$;
15) $f(z) = z^2 + 6z + 7i$, $z_0 = 1 + 2i$;
16) $f(z) = -2z^2 + z - i$, $z_0 = 4 + 2i$;
17) $f(z) = 4z^2 + 2z - 8i$, $z_0 = 1 - 2i$;
18) $f(z) = 3z^2 + 2z - 6i$, $z_0 = 1 + i$;
19) $f(z) = -2z^2 + 8z - 5i$, $z_0 = 1 + 3i$;
20) $f(z) = -z^2 + 7z - 4i$, $z_0 = 1 + 2i$;
21) $f(z) = z^2 + 5z - 3i$, $z_0 = 5 + i$;
22) $f(z) = 2z^2 + z - i$, $z_0 = -1 - 2i$;
23) $f(z) = -3z^2 + z + 2i$, $z_0 = 3 - i$;
24) $f(z) = 2z^2 - 7z + 5i$, $z_0 = -2 + i$;

25) $f(z)=z^2-4z+9i$, $z_0=1+2i$; 26) $f(z)=-z^2+5z-7$, $z_0=1-3i$;

27) $f(z)=2z^2+5z-7$, $z_0=2-i$; 28) $f(z)=z^2+9z-12$, $z_0=1-i$;

29) $f(z)=-z^2+8z-9i$, $z_0=2+i$; 30) $f(z)=4z^2+2z-4$, $z_0=1+i$.

Задание 2. Для данной функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, где $z=x+iy$, найдите действительную $u(x,y)$ и мнимую $v(x,y)$ части.

1) $f(z)=2z^2$; 2) $f(z)=z^2-2z+i$; 3) $f(z)=z^3$;

4) $f(z)=z-\dfrac{1}{z}$; 5) $f(z)=\dfrac{2}{z+2i}$; 6) $f(z)=\dfrac{i}{2z-\bar{z}}$;

7) $f(z)=-2z^2+\bar{z}$; 8) $f(z)=z^2+i\bar{z}$; 9) $f(z)=iz^2+4\bar{z}$;

10) $f(z)=\dfrac{z}{z-\bar{z}}$; 11) $f(z)=\dfrac{2z+\bar{z}}{z-\bar{z}}$; 12) $f(z)=\dfrac{z+i}{\bar{z}-i}$;

13) $f(z)=iz^2+1$; 14) $f(z)=\bar{z}+\dfrac{1}{z}$; 15) $f(z)=\dfrac{1}{\bar{z}}-iz$;

16) $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$; 17) $f(z)=z^2+4\bar{z}$; 18) $f(z)=z^2-3z+2i$;

19) $f(z)=z-i\bar{z}$; 20) $f(z)=\dfrac{iz}{\bar{z}}$; 21) $f(z)=\dfrac{2\bar{z}+z}{z-\bar{z}}$;

22) $f(z)=\dfrac{4i}{z-2i}$; 23) $f(z)=iz^2-\bar{z}$; 24) $f(z)=2z^2+2i\bar{z}$;

25) $f(z)=\dfrac{1}{z}$; 26) $f(z)=2i\bar{z}^2-4z$; 27) $f(z)=2z^2-4\bar{z}-2i$;

28) $f(z)=\dfrac{\bar{z}}{2iz}$; 29) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-i}$; 30) $f(z)=\bar{z}^2-3z+2i$.

Задание 3. Определите функцию $f(z)$, где $z = x + iy$ по заданным $\mathrm{Re}(f(z))=u(x,y)$, $\mathrm{Im}(f(z))=v(x,y)$:

a) $u=-y$, $v=x$; b) $u=x^2-y^2$, $v=2xy$;

c) $u=\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$; d) $u=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $v=-\dfrac{1}{2xy}$;

e) $u=x^3-3xy^2$, $v=y^3-3x^2y$.

Задание 4. Найдите $\operatorname{Re}(z)$, $\operatorname{Im}(z)$, $|z|$, $\arg z$ комплексного числа $z = e^{x+iy}$:

1) $x = 5$, $y = 2$;
2) $x = -2$, $y = 3$;
3) $x = -4$, $y = 8$;
4) $x = -3$, $y = 5$;
5) $x = 4$, $y = \pi$;
6) $x = 6$, $y = -1$;
7) $x = 5$, $y = 2$;
8) $x = 5$, $y = 2$;
9) $x = 5$, $y = 2$;
10) $x = 9$, $y = -30$;
11) $x = -8$, $y = 3\pi$;
12) $x = 7$, $y = -3$;
13) $x = -12$, $y = -2$;
14) $x = 4$, $y = 3$;
15) $x = 15$, $y = 3$;
16) $x = 5$, $y = 8$;
17) $x = -9$, $y = 5$;
18) $x = -10$, $y = 7$;
19) $x = 3$, $y = 4$;
20) $x = 5$, $y = 30$;
21) $x = -2$, $y = 15$;
22) $x = 4$, $y = -2\pi$;
23) $x = 8$, $y = 2$;
24) $x = -7$, $y = -3$;
25) $x = -5$, $y = -3$;
26) $x = 10$, $y = 2\pi$;
27) $x = 3$, $y = -8$;
28) $x = -11$, $y = 45$;
29) $x = 3$, $y = -\pi$;
30) $x = 7$, $y = -7$.

Задание 5. Найдите значение функции $f(z) = e^z$ в точке z_0:

1) $z_0 = -1 - i\frac{2\pi}{3}$;
2) $z_0 = \ln 7 + i\frac{\pi}{4}$;
3) $z_0 = 2 + i\frac{4\pi}{3}$;
4) $z_0 = \ln 9 - i\frac{\pi}{2}$;
5) $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{4}$;
6) $z_0 = -\ln 2 + i\frac{3\pi}{2}$;
7) $z_0 = 1 + i\pi$;
8) $z_0 = -\ln 3 + i\frac{\pi}{6}$;
9) $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{6}$;
10) $z_0 = \ln 4 - i\frac{\pi}{2}$;
11) $z_0 = 3 - i\frac{\pi}{4}$;
12) $z_0 = \ln 5 + i\frac{\pi}{3}$;
13) $z_0 = \ln 2 - i\frac{\pi}{3}$;
14) $z_0 = 1 + i\frac{\pi}{2}$;
15) $z_0 = 2 + i\frac{2\pi}{3}$;
16) $z_0 = \ln 4 - i\frac{\pi}{4}$;
17) $z_0 = 4 - i\frac{\pi}{3}$;
18) $z_0 = \ln 3 + i\frac{5\pi}{6}$;
19) $z_0 = -4 + i\frac{\pi}{3}$;
20) $z_0 = \ln 3 - i\frac{3\pi}{2}$;
21) $z_0 = 2 + i\frac{\pi}{4}$;

22) $z_0 = \ln 2 - i\dfrac{\pi}{3}$; 23) $z_0 = -2 + i\dfrac{3\pi}{4}$; 24) $z_0 = \ln 3 + i\dfrac{5\pi}{3}$;

25) $z_0 = -3 + -i\dfrac{5\pi}{4}$; 26) $z_0 = \ln 4 - i\dfrac{5\pi}{6}$; 27) $z_0 = 2 - i\dfrac{\pi}{6}$;

28) $z_0 = -\ln 4 + i\dfrac{\pi}{2}$; 29) $z_0 = -3 + i\dfrac{5\pi}{6}$; 30) $z_0 = \ln 5 + i\dfrac{3\pi}{4}$.

Задание 6. Вычислите.

1) $Ln(\sqrt{3}+i)$; 2) $Ln(1-i)$; 3) $Ln(-3+4i)$;

4) $Ln(-\sqrt{2}+\sqrt{2}i)$; 5) $Ln(1+3i)$; 6) $Ln(2-5i)$;

7) $Ln(-1)$; 8) $Ln(\sqrt{3}+3i)$; 9) $Ln(-2+3i)$;

10) $Ln(6-i)$; 11) $Ln(-5i)$; 12) $Ln(3+4i)$;

13) $Ln(-2i)$; 14) $Ln(ei)$; 15) $Ln(-\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$;

16) $Ln(5+12i)$; 17) $Ln(2-3i)$; 18) $Ln(1+i)$;

19) $Ln(\sqrt{3}-3i)$; 20) $Ln(5-12i)$; 21) $Ln(1+\sqrt{3}i)$;

22) $Ln(1-i)$; 23) $Ln(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)$; 24) $Ln(2-2i)$;

25) $Ln(1-\sqrt{3}i)$; 26) $Ln(4i)$; 27) $Ln(-\sqrt{3}-3i)$;

28) $Ln(2+2i)$; 29) $Ln(-4)$; 30) $Ln(-5+12i)$.

Задание 7. Вычислите.

$1)\sin n(\frac{\pi}{3}+i)$; $2)\cos(\frac{\pi}{6}-i)$; $3)\sin(6i)$;

4) $\cos(-i)$; 5) $\cos(\pi/3-2i)$; 6) $\sin(\pi/6-i)$;

7) $\sin(3\pi-2i)$; 8) $\cos(-2i)$; 9) $\sin(-\pi+9i)$;

10) $\cos(5i)$; 11) $\sin(-3i)$; 12) $\cos(4i)$;

13) $\sin(2i)$; 14) $\cos(2\pi/3+i)$; 15) $\sin(9i)$;

16) $\cos(-8i)$; 17) $\sin(-\pi/6-i)$; 18) $\cos(17i)$;

19) $\sin(-7i)$; 20) $\cos(\pi/4-2i)$; 21) $\sin(3i)$;

22) $\cos(-2i)$; 23) $\sin(-11i)$; 24) $\cos(-4i)$;

25) $\sin i$; 26) $\cos(\pi/6-i)$; 27) $\sin(3\pi+2i)$;

28) $\cos(-5i)$; 29) $\sin(\frac{\pi}{4}-2i)$; 30) $\cos(\frac{\pi}{4}+3i)$.

Задание 8. Определите, какие из следующих функций являются периодическими, и определите для них период.

a) $f_1(z)=z\cos z$; b) $f_1(z)=i\cos z$; c) $f_3(z)=z\cos i$; d) $f_4(z)=i\sin iz$;

e) $f_5(z)=z\cos iz$; f) $f_6(z)=\sin(1+i)z$; g) $f_7(z)=iz\cos iz$;

h) $f_8(z)=(1+i)\cos(1-i)z$; i) $f_9(z)=ie^{iz}$; j) $f_{10}(z)=2ze^{iz}$.

Задание 9. Найдите значение производной функции $f(z)$ в точке z_0.

1) $f(z)=3z^2+4i$, $z_0=3-2i$; 2) $f(z)=z^2+3z-5i$, $z_0=2-i$;

3) $f(z)=z^2+5z-3i$, $z_0=1+3i$; 4) $f(z)=z^2+6z+7i$, $z_0=2+3i$;

5) $f(z)=-2z^2+8z-5i$, $z_0=2-i$; 6) $f(z)=2z^2-7z+5i$, $z_0=3-i$;

7) $f(z)=z^2+2z-i$, $z_0=1+2i$; 8) $f(z)=4z^2+2z-8i$, $z_0=2+i$;

9) $f(z)=-2z^2+z-i$, $z_0=2+2i$; 10) $f(z)=-z^2+7z-4i$, $z_0=5+i$;

11) $f(z)=z^2+6z-4i$, $z_0=1-3i$; 12) $f(z)=2z^2+5z-7$, $z_0=2+i$;

13) $f(z)=2z^2+z-i$, $z_0=1+2i$; 14) $f(z)=z^2+9z-12$, $z_0=1+2i$;

15) $f(z)=-z^2+5z-7$, $z_0=-2+i$; 16) $f(z)=z^2+2iz+i$, $z_0=-1+2i$;

17) $f(z)=-3z^2+z+2i$, $z_0=2-i$;

18) $f(z)=-z^2+8z-9i$, $z_0=4+2i$;

19) $f(z)=-z^2+3z+2i$, $z_0=3-i$;

20) $f(z)=z^2+6z-4i$, $z_0=1-2i$;

21) $f(z)=z^2-4z+9i$, $z_0=1+i$;

22) $f(z)=3z^2-5z+3i$, $z_0=1-i$;

23) $f(z)=z^2-4z+3i$, $z_0=2-i$;

24) $f(z)=4z^2-3z+i$, $z_0=1+2i$;

25) $f(z)=2z^2-5z+i$, $z_0=1+3i$;

26) $f(z)=2z^2-4iz+3$, $z_0=2+2i$;

27) $f(z)=4z^2+2z-4$, $z_0=3+2i$;

28) $f(z)=-z^2+3z-4i$, $z_0=3-2i$;

29) $f(z)=-2z^2+z-2i$, $z_0=4-2i$;

30) $f(z)=z^2+2z-3i$, $z_0=1+i$.

Задание 10. Найдите значение производной функции $f(z)$ в точке z_0.

1) $f(z)=e^{2z-i}$, $z_0=\ln 9-i\dfrac{\pi}{2}$;

2) $f(z)=\sin 2z$, $z_0=2+i\dfrac{\pi}{4}$;

3) $f(z)=\cos 4iz$, $z_0=1+i\dfrac{\pi}{2}$;

4) $f(z)=e^{iz+2}$, $z_0=\ln 4-i\dfrac{\pi}{4}$;

5) $f(z)=Ln(2z+4)$, $z_0=-2+2i$;

6) $f(z)=\cos 4z$, $z_0=1+i\dfrac{\pi}{4}$;

7) $f(z)=\sin\left(3z+\dfrac{\pi}{6}\right)$, $z_0=-3+i\dfrac{5\pi}{6}$;

8) $f(z)=Ln iz$, $z_0=1+3i$;

9) $f(z)=e^{3z-i}$, $z_0=\ln 5+i\dfrac{\pi}{3}$;

10) $f(z)=\cos(-2iz)$, $z_0=-2+i\dfrac{3\pi}{4}$;

11) $f(z)=\sin(-3z+i)$, $z_0=4-i\dfrac{\pi}{3}$;

12) $f(z)=e^{2iz-i}$, $z_0=-\ln 2+i\dfrac{3\pi}{2}$;

13) $f(z)=Ln(2iz-2)$, $z_0=-1+2i$;

14) $f(z)=\cos 6z$, $z_0=-1-i\dfrac{2\pi}{3}$;

15) $f(z)=e^{-3z+5}$, $z_0=\ln 2-i\dfrac{\pi}{3}$;

16) $f(z)=\sin 3iz$, $z_0=2+i\dfrac{2\pi}{3}$;

17) $f(z)=\cos\pi iz$, $z_0=2-i$;

18) $f(z)=Ln(-2z+2)$, $z_0=4-2i$;

19) $f(z)=Ln3iz$, $z_0=1-3i$;

20) $f(z)=e^{-4z}$, $z_0=\ln 7+i\dfrac{\pi}{4}$;

21) $f(z)=\sin \pi z$, $z_0=3-2i$;

22) $f(z)=\cos(6iz-2i)$, $z_0=1+i\dfrac{\pi}{6}$;

23) $f(z)=e^{-3iz+2i}$, $z_0=\ln 3+i\dfrac{5\pi}{6}$;

24) $f(z)=\sin 9z$, $z_0=1+i\pi$;

25) $f(z)=\cos(2iz-2)$, $z_0=-4+i\dfrac{\pi}{3}$;

26) $f(z)=e^{6z-6i}$, $z_0=\ln 4-i\dfrac{\pi}{2}$;

27) $f(z)=\sin(3iz+3)$, $z_0=2+i\dfrac{4\pi}{3}$;

28) $f(z)=\cos 8iz$, $z_0=3-i\dfrac{\pi}{4}$;

29) $f(z)=e^{-3z+3}$, $z_0=-\ln 3+i\dfrac{\pi}{6}$;

30) $f(z)=Ln(2z+2)$, $z_0=2+3i$.

Задание 11. Для функции $f(z)$ укажите точки, в которых выполняются условия Коши – Римана, и найдите производную $f'(z)$ в этих точках.

1) $f(z)=2i\bar{z}$;
2) $f(z)=2z+4i$;
3) $f(z)=2iz^2-4z+2$;
4) $f(z)=z^5$;
5) $f(z)=4z\cdot e^z$;
6) $f(z)=z\operatorname{Re} z$;
7) $f(z)=\sin(z-4i)$;
8) $f(z)=Ln(z^4)$;
9) $f(z)=\cos\bar{z}$;
10) $f(z)=\operatorname{Im} z$;
11) $f(z)=\cos z\cdot e^z$.

Задание 12. Найдите аналитическую функцию $f=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее заданной действительной (мнимой) части.

1) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+2x$;

2) $\operatorname{Im} f(z)=x^2-y^2-1$;

3) $\operatorname{Im} f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3$;

4) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+xy$;

5) $\operatorname{Im} f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$;

6) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+x$;

7) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;

8) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}-2y$;

9) $\operatorname{Im} f(z)=e^x(y\cos y+x\sin y)+x-y$;

10) $\operatorname{Re} f(z)=e^{-y}(x\sin x+y\cos x)$;

11) $\operatorname{Re} f(z)=x^4+y^4-6x^2y^2$;

12) $\operatorname{Im} f(z)=e^x\sin y+2xy+5y$;

13) $\operatorname{Im} f(z)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$;

14) $\operatorname{Im} f(z)=\dfrac{y}{(x+1)^2+y^2}$;

15) $\operatorname{Re} f(z)=e^y\sin x+x$;

16) $\operatorname{Re} f(z)=e^{-x}\cos y+2x$;

17) $\operatorname{Re} f(z) = y + x^2 - y^2 + 1$;

18) $\operatorname{Re} f(z) = \ln(x^2 + y^2)$;

19) $\operatorname{Im} f(z) = y^2 - x^2 - 2$;

20) $\operatorname{Im} f(z) = xy - x$;

21) $\operatorname{Im} f(z) = 3xy^2 - x^3 + 7y$;

22) $\operatorname{Re} f(z) = e^{-y} \cos x - x$;

23) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + y + 2$;

24) $\operatorname{Im} f(z) = e^{y}(\cos x - \sin x)$;

25) $\operatorname{Im} f(z) = 6x^2 y - 3xy^2 + x^3 - 2y^3$;

26) $\operatorname{Im} f(z) = 3x^2 y - y^3 + y$;

27) $\operatorname{Re} f(z) = e^{-2x} \sin 2y + xy$;

28) $\operatorname{Re} f(z) = e^{x} \cos y$;

29) $\operatorname{Re} f(z) = -\dfrac{y}{2(x^2 + y^2)} + x^2 - y^2$;

30) $\operatorname{Re} f(z) = 3x + y - 1$.

Глава 3. Операционное исчисление

Операционное исчисление применяется при изучении теоретических основ электротехники, радиотехники и электроники, теории автоматического управления, линейных импульсных систем и других специальных дисциплин, а также при исследованиях в различных инженерно-технических задачах и используется:

для интегрирования линейных обыкновенных уравнений, линейных разностных уравнений, дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом;

нахождения решений линейных интегральных уравнений типа свертки, интегро-дифференциальных уравнений и краевых задач для линейных уравнений в частных производных;

вычисления интегралов и суммирования рядов.

Метод операционного (т. е. символического) исчисления основан на введении символического обозначения для оператора дифференцирования $\frac{d}{dt} = p$, так что $\frac{d^k y}{dt^k} = p^k y$. При этом дифференциальное уравнение заменяется многочленом от p (так называемым операторным многочленом). Такое символическое представление дает возможность применять законы общей алгебры при решении задач с интегральными и дифференциальными выражениями.

Начало систематическому приложению символического исчисления к решению физико-технических задач положил английский инженер-электрик Оливер Хевисайд, получивший с его помощью ряд важных результатов по сложным проблемам теории электромагнитных колебаний в проводах. Однако применяемое в трудах Хевисайда операционное (или, как его еще называют, операторное) исчисление не было математически обосновано. Строгое обоснование и дальнейшее развитие операционное исчисление получило на основе интегральных преобразований. Наиболее широко применяется интегральное преобразование Лапласа.

§ 1. Операционные свойства преобразования Лапласа

1.1. Преобразование Лапласа

Рассмотрим функцию $f(t)$. Предположим, что в отношении нее выполняются условия:

1. Функция кусочно-дифференцируема, т. е. непрерывна вместе со своими производными достаточно высокого порядка на всей оси t,

кроме отдельных точек, в которых $f(t)$ или ее производные терпят разрыв первого рода, причем на каждом конечном интервале оси t таких точек имеется лишь конечное число;

2. $f(t)$ возрастает не быстрее показательной функции, т. е. существует постоянная $C>0$ и число β такие, что для любого t $|f(t)|<Ce^{\beta t}$. Число β называется показателем роста функции $f(t)$;

3. $f(t)\equiv 0$ для всех значений $t<0$.

Функция $f(t)$, удовлетворяющая данным условиям, называется *функцией-оригиналом.*

Условиям 1–2 удовлетворяют абсолютное большинство функций, с которыми приходится сталкиваться не практике. Условие 3 также нельзя отнести к разряду обременительных. Реальный процесс начинается в конечный момент времени, который мы можем принять за нулевую точку, и продолжается в течение длительного промежутка времени, теоретически до бесконечности. Следовательно, в практических условиях приходится иметь дело с промежутком времени $0\le t<+\infty$, т. е. с односторонне бесконечным промежутком. Такой случай мы включаем в случай двусторонне бесконечного промежутка, произвольно полагая $f(t)$ равной нулю для всех $t<0$.

Простейшей функцией-оригиналом является так называемая единичная функция Хевисайда (единичный скачок): $f(t)=\begin{cases}1, & \text{если } t>0\\ 0, & \text{если } t<0\end{cases}$. Вопрос об определении функции $1(t)$ в точке разрыва $t=0$ оставим открытым, так как при вычислении интеграла Лапласа безразлично, какое значение имеет $1(t)$ при $t=0$. В некоторых случаях целесообразно принимать $1(0)=0$, в других – полагать $1(0)=1$ или $\frac{1}{2}$.

Если некоторая функция $f(t)$ удовлетворяет первому и второму условиям, но не удовлетворяет третьему, то функция $\varphi(t)=f(t)1(t)$ будет уже функцией-оригиналом. Все рассматриваемые ниже функции обращаются в нуль при $t<0$. Множитель $1(t)$, как это принято в операционном исчислении, для простоты будем опускать, например, записывая $\sin(wt)$ вместо $1(t)\sin(wt)$.

Изображением по Лапласу функции $f(t)$, называется функция $F(p)$ комплексного переменного $p=x+iy$, определяемая соотношением

$$F(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}f(t)dt. \qquad (1)$$

Связь между функциями $f(t)$ и $F(p)$ будем символически обозначать $F(p)=L\{f(t)\}$ или $f(t)=L^{-1}\{F(p)\}$. Преобразование (1) называют одномерным преобразованием Лапласа.

Существуют и другие типы интегральных преобразований функции. Например, изображение по Хевисайду отличается от изображения по Лапласу множителем перед интегралом:

$$\Phi(p)=p\int_0^\infty e^{-pt}f(t)dt\,.$$

Можно доказать [3], что для всякого оригинала $f(t)$ изображение $F(p)$ определено в комплексной полуплоскости $\mathrm{Re}=x>\beta$ и является в этой области аналитической функцией. К функции $F(p)$ применимы мощные методы теории функции комплексного переменного. Из получаемых таким путем результатов, касающихся $F(p)$, можно вывести полезные следствия о функции времени $f(t)$, для исследования которой, возможно, не существует общих методов.

Прежде чем перейти к изложению этих идей, вычислим для некоторой функции $f(t)$ соответствующее изображение $F(p)$.

1.2. Изображение по Лапласу простейших функций

1.2.1. Изображение единичной функции Хевисайда $1(t)$

Докажем, прежде всего, что $1(t)$ является оригиналом:

1) $\dfrac{d}{dt}(1(t))=0$ для любого $t\neq 0$, т. е. функция кусочно-дифференцируема;

2) для любого t $1(t)<2e^{\alpha t}$, т. е. функция удовлетворяет второму условию и показатель ее роста $\beta=0$;

3) $1(t)\equiv 0\quad \forall t<0$.

Вычисляем изображение по Лапласу:

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}1(t)dt=\lim_{\alpha\to 0+0}\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta e^{-pt}1(t)dt=\lim_{\alpha\to 0+0}\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^\beta e^{-pt}dt=\lim_{\alpha\to 0+0}\lim_{\beta\to+\infty}\left(-\frac{1}{p}e^{-pt}\Big|_\beta^\alpha\right)=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0+0}\lim_{\beta\to+\infty}\left[-\frac{1}{p}\left(e^{-\beta p}-e^{-\alpha p}\right)\right]=-\frac{1}{p}\lim_{\alpha\to 0+0}\left(0-e^{-\alpha p}\right)=\frac{1}{p}\,.$$

Изображение существует в полуплоскости $\mathrm{Re}\quad p>0$.

1.2.2. Функция $f(t)=e^{\alpha t}$

Данная функция (точнее, функция $e^{\alpha t}1(t)$) является оригиналом с показателем роста $\beta=\alpha$.

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}e^{\alpha t}dt=\int_0^\infty e^{(\alpha-p)t}dt=\left.\frac{e^{(\alpha-p)t}}{\alpha-p}\right|_0^\infty=\frac{-1}{\alpha-p}=\frac{1}{p-\alpha};\quad \operatorname{Re}\ p>\alpha .$$

1.2.3. Функция $f(t)=te^{\alpha t}$

Данная функция является оригиналом, и ее изображение по Лапласу имеет вид

$$L\{te^{\alpha t}\}=\int_0^\infty e^{-pt}te^{\alpha t}dt=\int_0^\infty te^{(\alpha-p)t}dt=\begin{vmatrix}U(t)=t; & dV=e^{(\alpha-p)t}dt\\ dU=dt; & V=\dfrac{1}{\alpha-p}e^{(\alpha-p)t}\end{vmatrix}=$$

$$=t\frac{1}{\alpha-p}e^{(\alpha-p)t}\Big|_\infty^0-\int_0^\infty\frac{1}{\alpha-p}e^{(\alpha-p)t}dt=\frac{-1}{(\alpha-p)^2}e^{(\alpha-p)t}\Big|_\infty^0=\frac{1}{(p-\alpha)^2}.$$

Из данного примера в частности следует, что если $f(t)=t$, то

$$L(t)=L\{te^{0t}\}=\frac{1}{(p-0)^2}=\frac{1}{p^2}.$$

1.2.4. Функция $f(t)=\sin t$

Показатель роста данной функции $\beta=0$.

$$F(p)=L\{\sin t\}=\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt .$$

Интегрируя дважды по частям, приходим к уравнению:

$$\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=\frac{1}{p^2}-\frac{1}{p^2}\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt\quad\Rightarrow\quad\left(\frac{1}{\frac{1}{p^2}+1}\right)\int_0^\infty e^{-pt}\sin t dt=\frac{1}{p^2},$$

из которого находим:

$$L\{\sin t\}=\frac{1}{p^2}\frac{1}{\frac{1}{p^2}+1}=\frac{1}{p^2+1};\quad \operatorname{Re}\ p>0.$$

1.2.5. Функция $f(t)=\cos t$

Аналогично предыдущему пункту получим:

$$L\{\cos t\}=\int_0^\infty e^{-pt}\cos t dt=\frac{p}{p^2+1},\quad \operatorname{Re}\ p>0.$$

Разработаны подробные таблицы преобразований Лапласа основных функций, встречающихся в приложениях [3]. Некоторые из них приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Оригиналы некоторых функций и их изображения

№	$f(t)$ при $t \ge 0$	$F(p)$
1	$\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{a-b}$	$\dfrac{1}{(p+a)(p-b)}$
2	$\dfrac{(c-a)e^{-at}-(c-b)e^{-bt}}{a-b}$	$\dfrac{p+c}{(p+a)(p-b)}$
3	$[(c-a)t+1]e^{-at}$	$\dfrac{p+c}{(p+a)^2}$
4	$\cos^2 \omega t$	$\dfrac{p^2+2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
5	$\sin^2 \omega t$	$\dfrac{2\omega^2}{p(p^2+4\omega^2)}$
6	$t^n \sin \omega t$	$\dfrac{n!}{2t}\dfrac{(p+\omega t)^{n+1}-(p-\omega t)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
7	$t^n \cos \omega t$	$\dfrac{n}{2}\dfrac{(p+\omega)^{n+1}-(p-\omega)^{n+1}}{(p^2+\omega^2)^{n+1}}$
8	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{t}$	$\ln\dfrac{p-a}{p-b}$
9	$\dfrac{1}{ab}\dfrac{be^{at}-ae^{bt}}{ab(a-b)}$	$\dfrac{1}{p(p-a)(p-b)}$
10	$\dfrac{1}{a^2}(e^{at}-1-at)$	$\dfrac{1}{p^2(p-a)}$

1.3. Условие взаимной однозначности

Как было показано, при $t>0$ каждой определенной функции-оригиналу $f(t)$ соответствует функция комплексной переменной $F(p)$. Совокупность всех $f(t)$ называют пространством оригиналов, а совокупность всех $F(p)$ – пространством изображений. Преобразования

$$L: \quad F(p)=L\{f(t)\},$$

$$L^{-1}: \quad f(t)=L^{-1}\{F(p)\}$$

отличаются друг от друга с точки зрения их однозначности. Каждому оригиналу $f(t)$ соответствует единственное изображение $F(p)=L\{f(t)\}$. Но при рассмотрении всех изображений, полученных посредством формулы (1), видно, что каждое изображение $F(p)$ может быть получено из бесконечно большого числа оригиналов $f(t)$. В самом деле, если изменить определение функции $f(t)$ в конечном числе точек, то она останется оригиналом, и, поскольку такое изменение не влияет на результат интегрирования, изображение останется прежним. Однако совокупность всех оригиналов $f(t)$, соответствующих какому-либо изображению $F(p)$, легко выявить: все они отличаются друг от друга на так называемые нулевые функции $n(t)$, т. е. функции, обладающие свойством:

$$\int_0^t n(\tau)d\tau \equiv 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Если среди всех оригиналов $f(t)$, соответствующих данному изображению $F(p)$, имеется один, являющийся непрерывной функцией, то других таких оригиналов не существует. Следовательно, если в качестве оригиналов брать только непрерывные функции, то обратное преобразование Лапласа также будет всегда однозначным.

Способ вычисления функции-оригинала $f(t)$ по ее изображению $F(p)$ дается теоремой Меллина – Бромвича: в любой точке, в которой $f(t)$ непрерывна, справедливо равенство

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{x-i\infty}^{x+i\infty} e^{tp}F(p)dp=\frac{1}{2\pi i}\lim_{\alpha\to+\infty}\int_{x-i\alpha}^{x+i\alpha} e^{tp}F(p)dp,$$

где x – любое действительное число, удовлетворяющее неравенству $x>\beta.$.

1.4. Свойства преобразования Лапласа и их применение при вычислении изображений

При практическом применении преобразования Лапласа необходимо знать не только изображения отдельных функций, но и правила отображения выполняемых над ними операций. Если над функцией в пространстве оригиналов производится какая-либо операция, например дифференцирование или интегрирование, то в пространстве изображений этой операции должна отвечать вполне определенная другая операция и наоборот. Аналогичным образом, если несколько изображений комбинируются, например перемножаются, то в пространстве оригиналов такой комбинации должна соответствовать вполне определенная комбинация оригиналов.

1.4.1. Свойство линейности

Если $\varphi(t)=\sum_{i=1}^{n} a_i\, f_i(t)$ и $L\{f_i(t)\}=F_i(p)$, то

$$L\{\varphi(t)\}=\sum_{i=1}^{n} a_i L\{f_i(t)\}=\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(p),$$

откуда следует:

$$L\{\varphi(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-pt}\varphi(t)dt=\int_0^{\infty} e^{-pt}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i(t)\right)dt=\int_0^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-pt} f_i(t)\right)dt=\sum_{i=1}^{n} a_i e^{-pt} f_i(t)dt=\sum_{i=1}^{n} a_i F_i(p)$$

Примеры

1. $L\left\{C_1e^{a_1t}+C_2e^{a_2t}\right\}=C_1L\left\{e^{a_1t}\right\}+C_2L\left\{e^{a_2t}\right\}=\dfrac{C_1}{p-a_1}+\dfrac{C_2}{p-a_2};$

$$\operatorname{Re}\quad p>\max(a_1;a_2)$$

2. $L\{C\}=L\{C1(t)\}=CL\{1\{t\}\}=\dfrac{C}{p};\quad C=const,\quad \operatorname{Re}\quad p>0$.

1.4.2. Свойство подобия

$$L\{f(at)\}=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right),\quad a>0$$

$$L\{f(at)\}=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(at)dt=\left|\begin{array}{l} at=\tau;\quad dt=\frac{1}{a}d\tau \\ t=0\quad\Rightarrow\quad \tau=0 \\ t\to\infty\Rightarrow\quad \tau\to\infty \\ \frac{p}{a}=p_1\end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{a}\tau} f(\tau)d\tau=\frac{1}{a}\int_0^{\infty} e^{p_1\tau} f(\tau)d\tau=$$

$$=\frac{1}{a}F(p_1)=\frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Примеры

1. $L\{\sin\omega t\}=\dfrac{1}{\omega}\dfrac{1}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1}=\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

2. $L\{\cos\omega t\}=\dfrac{\dfrac{p}{\omega}}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1}=\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

3.
$$L\{\sin^2 t\}=L\left\{\frac{1}{2}(1-\cos 2t)\right\}=\frac{1}{2}L\{1\}-\frac{1}{2}L\{\cos 2t\}=\frac{1}{2p}-\frac{p^2-4-p^2}{p(p^2+4)}=\frac{2}{p(p^2+4)}.$$

4. $L\{\cos^2 t\}=L\left\{\frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right\}=\frac{p^2+2}{p(p^2+4)}.$

1.4.3. Свойство запаздывания

$$L\{f(t-a)\}=e^{-ap}L\{f(t)\}=e^{-ap}F(p),\quad a>0$$

Примеры

1. $L\{e^{t-t_0}\}=\frac{1}{p}e^{-t_0 p}.$

2. $L\{\sin(t-\varphi)\}=e^{-\varphi p}\frac{1}{p^2+1}.$

Замечание. Свойства подобия и запаздывания являются частными случаями теоремы о замене переменной в функции-оригинале. Они указывают, какую замену переменной и какие преобразования нужно произвести в изображении, чтобы получить изображение данной суперпозиции функции. Пусть действительной переменной t соответствует комплексная переменная p, а переменной τ – комплексная переменная s, т. е. $L\{f(t)\}=L_p\{f(t)\}=F(p)$; $L\{f(\tau)\}=L_s\{f(\tau)\}=F(s)$. Данные свойства утверждают свойство подобия:

$$L_p\{\varphi(t)\}=L_p\{f(\varphi(t))\}=L_p\{f(at)\}=|\tau=at|=\left[\frac{1}{a}L_s\{f(\tau)\}\right];\quad \left|s=\frac{p}{a}\right|$$

и свойство запаздывания:

$$L_p\{\varphi(t)\}=L_p\{f(\varphi(t))\}=L_p\{f(t-b)\}=|\tau=t-b|=[e^{-bs}L_s\{f(\tau)\}];\quad |s=p|,$$

используя которые, можно находить изображения более сложных суперпозиций:

$$L_p\{f(at-b)\}=|\tau=at|=\left[\frac{1}{a}L_s\{f(\tau-b)\}\right]=\left|u=\tau-b;\, s=\frac{p}{a}\right|=\frac{1}{a}\left[e^{-bq}L_q\{f(u)\}\right]=$$
$$=\left|q=s;\, s=\frac{p}{a}\right|=\frac{1}{a}\left[e^{-bq}F(s)\right]=\left|s=\frac{p}{a}\right|=\frac{1}{a}e^{-\frac{b}{a}}F\left(\frac{p}{a}\right).$$

Примеры

3. $L\{\sin(\omega t-\varphi)\}=\frac{1}{\omega}e^{-\frac{\varphi}{\omega}p}\frac{1}{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2+1}=e^{-\frac{\varphi}{\omega}p}\frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$

4. $L\{\cos(\omega t-\varphi)\}=\dfrac{1}{\omega}e^{-\frac{\varphi}{\omega}p}\dfrac{\dfrac{p}{\omega}}{\left(\dfrac{p}{\omega}\right)^2+1}=e^{-\frac{\varphi}{\omega}p}\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$.

1.4.4. Свойство затухания (смещения)

$$L\{e^{-\lambda t}f(t)\}=F(p+\lambda),\quad \lambda>0.$$

Примеры

1. $L\{e^{-\lambda t}\cos\omega t\}=\dfrac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$.

2. $L\{e^{-\lambda t}\sin\omega t\}=\dfrac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$.

1.4.5. Правило дифференцирования для оригинала

Если производная $f'(t)$ обладает изображением, то им обладает и первообразная функции $f(t)$. Обратное имеет место далеко не всегда. Например, функция $\ln t$ обладает изображением, т. е. $L(\ln t)$ существует, но производная от $\ln t$, равная $\dfrac{1}{t}$, изображением не обладает ($L\left(\dfrac{1}{t}\right)$ не существует). Поэтому при применении сформулированного ниже правила необходимо предполагать, что наивысшая встречающаяся производная существует при $t>0$ и обладает изображением. Из этого предположения автоматически следует, что производные более низких порядков, включая саму функцию, также обладают изображениями и, кроме того, предельные значения справа $f(+0)$, $f'(+0)$... существуют.

Правило дифференцирования оригинала имеет вид:

$$L\{f'(t)\}=pF(p)-f(+0);$$
$$L\{f''(t)\}=p^2F(p)-pf(+0)-f'(0);$$
$$L\{f^{(n)}(t)\}=p^nF(p)-p^{n-1}f(+0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

Именно это свойство определило широкое распространение преобразования Лапласа при решении дифференциальных уравнений. Оно выражает в высшей степени полезное свойство преобразования: дифференцирование в пространстве оригиналов заменяется в пространстве изображений умножением на степень аргумента p с добавлением многочлена, коэффициентами которого являются начальные значения оригинала.

Под начальными значениями $f(0)$, $f'(0)\ldots$ подразумеваются односторонние пределы функций $f(t)$, $f'(t)\ldots$ при $t \to 0$ справа. Эти пределы можно охарактеризовать как значения, от которых функции $f, f', \ldots$ начинают свое непрерывное изменение вправо. Например, функция $1(t)$ может иметь при $t = 0$ любое значение, но значение $1(+0)$ совершенно однозначно и равно единице.

Пример

Найдите изображение дифференциального выражения $y^{IV}(t) - 5y'''(t) - 4y''(t) + 2y'(t) - y(t)$ при условиях $y(+0)$ = 5; $y'(+0) = 0$; $y''(+0) = -1$; $y'''(+0) = 2$.

Решение.

Обозначим $L\{y(t)\} = F(p)$, тогда

$$L\{y'(t)\} = pF(p) - y(+0) = pF(p) - 5;$$

$$L\{y''(t)\} = pL\{y'(t)\} - y'(0) = p^2F(p) - 5p - 0;$$

$$L\{y'''(t)\} = pL\{y''(t)\} - y''(+0) = p^3F(p) - 5p^2 + 1;$$

$$L\{y^{IV}(t)\} = pL\{y'''(t)\} - y'''(+0) = p^4F(p) - 5p^2 + p - 2;$$

Учитывая эти соотношения, по свойству линейности получим:

$$L\{y^{IV}(t) - 5y'''(t) - 4y''(t) + 2y'(t) - y(t)\} =$$

$$= p^4F(p) - 5p^2 + p - 2 - 5\left[p^3F(p) - 5p^2 + 1\right] - 4\left[p^2F(p) - 5p - 0\right]$$
$$+ 2\left[pF(p) - 5\right] - F(p) =$$

$$= \left[p^4 - 5p^3 - 4p^2 + 2p - 1\right]F(p) + \left[-5p^3 + 25p^2 + 21p - 17\right].$$

1.4.6. Дифференцирование изображения

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^nF(p)}{dp^n}.$$

Примеры

1. $L\{t^n e^{at}\} = (-1)^n \dfrac{d^n}{dp^n}\left(\dfrac{1}{p-a}\right) = (-1)^n(-1)^n \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}} = \dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}.$

2. $L\{t\cos\omega t\} = (-1)\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{p}{p^2+\omega^2}\right) = \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}.$

3. $L\{t^2\sin\omega t\} = (-1)^2 \dfrac{d^2}{dp^2}\left(\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}\right) = \dfrac{2\omega(4p^2-\omega^2)}{(p^2+\omega^2)^2}.$

4. $L\{t^n\} = L\{t^{n-1}t\} = (-1)^{n-1}\dfrac{d^{n-1}}{dp^{n-1}}\left(\dfrac{1}{p^2}\right) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$.

5. $L\{te^{-at}\sin\omega t\} = (-1)\dfrac{d}{dp}\left(\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}\right) = \dfrac{2\omega(p+a)}{\left((p+a)^2+\omega^2\right)^2}$.

1.4.7. Интегрирование оригинала

$$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{p}F(p).$$

Вычислим изображения уже известных функций с помощью этого правила:

$$L\{t\} = L\left\{\int_0^t 1d\tau\right\} = \frac{1}{p}L\{1\} = \frac{1}{p^2}.$$

$$L\{t^2\} = L\left\{2\int_0^t \tau d\tau\right\} = 2\frac{1}{p}L\{t\} = \frac{2\cdot 1}{p^3}.$$

$$L\{t^3\} = L\left\{3\int_0^t \tau^2 d\tau\right\} = 3\frac{1}{p}L\{t^2\} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{p^4}.$$

$$L\{t^n\} = L\left\{n\int_0^t \tau^{n-1} d\tau\right\} = \frac{n}{p}L\{t^{n-1}\} = \quad \ldots \quad = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

1.4.8. Интегрирование изображения

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_p^\infty F(a)da.$$

Примеры

1. $L\left\{\dfrac{e^{2t}-e^{-4t}}{t}\right\} = \displaystyle\int_p^\infty\left(\frac{1}{a-2}-\frac{1}{a+4}\right)da = \ln\frac{p+4}{p-2}$,

2. $L\left\{\dfrac{\sin t}{t}\right\} = \displaystyle\int_p^\infty \frac{da}{a^2+1} = arctg\,a\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - arctgp$.

Используя определение обратного преобразования Лапласа как интеграла в комплексной области, можно получить свойства обратного преобразования L^{-1}. Соответствия некоторых часто встречающихся операций над оригиналами и изображениями приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Соответствия операций над оригиналами и их изображениями

№	Содержание операции	$f(t)$ при $t \ge 0$	$F(p)$ при $\operatorname{Re} \quad p > \beta$
1	Изменение масштаба	$\frac{1}{a} e^{\frac{b}{a}t} f\left(\frac{t}{a}\right)$	$F(ap-b), \quad a>0$
2	Умножение изображений	$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau$	$F_1(p) F_2(p)$
3	Дифференцирование по параметру	$\frac{\partial}{\partial a} f(t,a)$	$\frac{\partial}{\partial a} F(p,a)$
4	Начальное значение оригинала	$\lim\limits_{t\to 0} f(t)$	$\lim\limits_{t\to\infty} pF(p)$
5	Предельное значение оригинала	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$	$\lim\limits_{t\to 0} pF(p)$
6	Первая теорема разложения	$f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{k!} t^k$	$F(p) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{C_k}{p^{k+1}}$
7	Вторая теорема разложения	$f(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}$ p_k – корни уравнения $A(p)=0$; $A'(p) = \frac{dA(p)}{dp}$	$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ $\frac{B(p)}{A(p)}$ – правильная рациональная дробь с полюсами (корнями знаменателя) первого порядка (не кратными)

§ 2. Решение дифференциальных уравнений методами операционного исчисления

2.1. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка

Методика применения преобразований Лапласа при решении дифференциальных уравнений отчетливо видна уже при решении задачи Коши для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y' + ay = f(t), \quad y(+0) = y_0. \tag{1}$$

Предположим, что существует изображение по Лапласу функции $y'(t)$. Тогда существуют и изображения всех входящих в уравнение функций. Обозначив $L\{y(t)\}=y(p),\quad L\{f(t)\}=F(p),$ вычислим преобразования Лапласа левой и правой частей уравнения:

$$L\{y'+ay\}=L\{y'\}+aL\{y\}=py(p)-y(+0)+ay(p)=(p+a)y(p)-y_0;$$

$$L\{f(t)\}=F(p).$$

Если равны оригиналы (левая и правая части), то равны и их изображения. Следовательно, исходному (дифференциальному) уравнению между оригиналами в области изображений будет соответствовать следующее алгебраическое уравнение между изображениями

$$(p+a)y(p)-y_0=F(p), \tag{2}$$

откуда

$$y(p)=\frac{F(p)+y_0}{p+a}=\frac{F(p)}{p+a}+\frac{y_0}{p+a}. \tag{3}$$

Таким образом, найдено изображение $y(p)$ искомой функции $y(t)$. Найти соответствующий этому изображению оригинал можно, либо непосредственно вычисляя обратное преобразование Лапласа, либо воспользовавшись таблицами преобразований. В данном случае оригинал отыскивается очень просто. В указанных ниже преобразованиях использованы табл. 3.1 и 3.2.

$$y(t)=L^{-1}\left\{F(p)\frac{1}{p+a}+y_0\frac{1}{p+a}\right\}=L^{-1}\left\{F(p)\frac{1}{p+a}\right\}+L^{-1}\left\{y_0\frac{1}{p+a}\right\}=$$

$$=\int_0^t\left(L^{-1}\{F(p)\}\Big|_{t=\tau}L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\}\Bigg|_{t=t-\tau}\right)d\tau+y_0L^{-1}\left\{\frac{1}{p+a}\right\}=$$

$$=\int_0^t f(\tau)e^{-a(t-\tau)}d\tau+y_0e^{-at}=e^{-at}\left\{y_0+\int_0^t f(\tau)e^{at}d\tau\right\}. \tag{4}$$

Как известно, данное выражение представляет собой решение задачи Коши для дифференциального уравнения.

При практических вычислениях нет необходимости получать в явном виде формулу (4), достаточно найти $y(t)$ из соотношения (3).

Пример

$$y'+2y=4,\quad y(+0)=4.$$

$$py(p)-y_0+2y(p)=\frac{4}{p}.$$

$$y(p)=\frac{1}{p+2}\left[\frac{4}{p}+y_0\right]=\frac{1}{p+2}\left[\frac{4}{p}+4\right]=\frac{4}{p(p+2)}+\frac{4}{p+2}.$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{p+2}\right\}=4L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}=4e^{-2t}.$$

$$L^{-1}\left\{\frac{4}{p(p+2)}\right\}=4L^{-1}\left\{\frac{1}{p(p+2)}\right\}=4\frac{1}{2}L^{-1}\left\{\frac{1}{p}-\frac{1}{p+2}\right\}=2\left[L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\}-L^{-1}\left\{\frac{1}{p+2}\right\}\right]=$$
$$2\cdot 1(t)-2e^{-2t}=2\left(1+e^{-2t}\right).$$

2.2. Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка

Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами $y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y=f(t),\ \ y(+0)=y_0;\ \ \ldots\ \ y^{(n-1)}(+0)=y_{n-1}$. Эта задача также может быть решена с помощью преобразования Лапласа в предположении, что $y^{(n)}(t)$ и $f(t)$ – оригиналы. Введем обозначения $L\{y(t)\}=y(p),\ \ L\{f(t)\}=F(p)$. Пользуясь этими обозначениями, запишем изображающее уравнение

$$\left(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n\right)y(p)-\left(p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\right)y_0-$$
$$-\left(p^{n-2}+a_1p^{n-3}+\ldots+a_{n-2}p\right)y_1-\ \ \ldots\ \ -\left(p+a_1\right)y_{n-2}-y_{n-1}=F(p),$$

откуда

$$y\left(p=\frac{F(p)}{p^n+a_1p^{n-2}+\ldots+a_n}-\frac{\left(p^{n-1}+a_1p^{n-2}+\ldots+a_{n-1}\right)y_0+\ldots+\left(p+a_1\right)y_{n-2}-y_{n-1}}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-1}p+a_n}\right).$$

Для решения задачи Коши остается перейти к оригиналу $y(t)=L^{-1}\{y(p)\}$. Таким образом, решение задачи Коши осуществляется по следующей схеме.

Пространство оригиналов :	Дифференциальное уравнение +НУ		Решение задачи Коши
↑			↓
--------------------------------	L преобразование ------------	L^{-1}	Преобразование
	↓		↑
Пространство изображений :	Алгебраическое уравнение	→	Решение

Пример

$y''-3y'+2y=e^{3t},\quad y(+0)=1,\quad y'(+0)=3.$

Изображающее уравнение:

$$\left(p^2-3p+2\right)y(p)-(p-3)1-3=\frac{1}{p-3},$$
$$y(p)=\frac{1}{(p-3)\left(p^2-3p+2\right)}+\frac{p}{p^2-3p+2}.$$

Используя правило разложения дробей на простейшие, получим:

$$y(p)=\frac{1}{(p-3)(p^2-3p+2)}+\frac{p}{p^2-3p+2}=\frac{1}{(p-3)(p-1)(p-2)}+\frac{p}{(p-1)(p-2)}=$$

$$=\left(\frac{1}{2(p-1)}-\frac{1}{p-2}+\frac{1}{2(p-3)}\right)+\left(\frac{2}{p-2}-\frac{1}{p-1}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2(p-1)}+\frac{1}{p-2}+\frac{1}{2(p-3)}.$$

$$y(t)=L^{-1}\{y(p)\}=-\frac{1}{2}e^{t}+e^{2t}+\frac{1}{2}e^{3t}.$$

2.3. Решение систем линейных дифференциальных уравнений

Решение систем линейных дифференциальных уравнений операторным методом ничем принципиально не отличается от рассмотренного решения одного дифференциального уравнения. Здесь также оригиналы функций следует заменить их изображениями. Тогда каждое дифференциальное уравнение заменится соответствующим операторным и получится система алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций. Решив систему алгебраических уравнений, найдем изображения искомых оригиналов, а затем и сами оригиналы.

Рассмотрим линейную неоднородную систему первого порядка с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt}=a_{11}y_1+a_{12}y_2+\ldots+a_{1n}y_n+f_1(t) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{dy_n}{dt}=a_{n1}y_1+a_{n2}y_2+\ldots+a_{nn}y_n+f_n(t) \end{cases}$$

где $f_i(t)$ – известные функции-оригиналы.

Обозначив $y_i(+0)=y_{i0}$; $L\{y_i(t)\}=y_i(p)$, $i=\overline{1,n}$, запишем изображающую систему:

$$\begin{cases} py_1(p)-y_{10}=a_{11}y_1(p)+a_{12}y_2(p)+\ldots+a_{1n}y_n(p)+F_1(p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ py_n(p)-y_{n0}=a_{n1}y_1(p)+a_{n2}y_2(p)+\ldots+a_{nn}y_n(p)+F_n(p) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (a_{11}-p)y_1(p)+a_{12}y_2(p)+\ldots+a_{1n}y_n(p)=-F_1(p)-y_{10} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . \\ (a_{n1}-p)y_1(p)+a_{n2}y_2(p)+\ldots+(a_{nn}-p)y_n(p)=-F_n(p)-y_{n0} \end{cases}$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений по формулам Крамера, имеем:

$$y_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = \overline{1,n},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - p \end{vmatrix}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -F_1(p) - y_{10} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ -F_1(p) - y_{10} & a_{22} - p & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -F_1(p) - y_{10} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - p \end{vmatrix}.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} - p & a_{12} & \dots & -F_1(p) - y_{10} \\ a_{21} & a_{22} - p & \dots & -F_1(p) - y_{10} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & -F_1(p) - y_{10} \end{vmatrix}.$$

Пример

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = \quad y_2 + y_3, \\ \dfrac{dy_2}{dt} = y_1 + \quad y_3, \\ \dfrac{dy_3}{dt} = y_1 + y_{2.} \end{cases}$$

Записываем изображающую систему:

$$py_1(p) - y_{10} = y_2(p) + y_3(p);$$
$$py_2(p) - y_{20} = y_1(p) + y_3(p);$$
$$py_3(p) - y_{30} = y_1(p) + y_2(p).$$

Преобразовываем:

$$-py_1(p) + y_2(p) + y_3(p) = -y_{10};$$
$$y_1(p) - py_2(p) + y_3(p) = -y_{20};$$
$$y_1(p) + y_2(p) - py_3(p) = -y_{30}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}-p&1&1\\1&-p&1\\1&1&-p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-p&1&1\\1&-p&1\\0&1+p&-1-p\end{vmatrix}=(p+1)\begin{vmatrix}-p&1&1\\1&-p&1\\0&1&-1\end{vmatrix}=(p+1)\begin{vmatrix}-p&2&1\\1&1-p&1\\0&0&-1\end{vmatrix}=$$

$$=(p+1)(-1)\begin{vmatrix}-p&2\\1&1-p\end{vmatrix}=-(p+1)\left(p^2-p-2\right)=-(p+1)(p+1)(p+2).$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-y_{10}&1&1\\-y_{20}&-p&1\\-y_{30}&1&-p\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-y_{10}&1&0\\-y_{10}&-p&1+p\\-y_{10}&1&-1-p\end{vmatrix}=(p+1)\begin{vmatrix}-y_{10}&1&0\\-y_{20}&-p&1\\-y_{30}&1&-1\end{vmatrix}=$$

$$=(p+1)\begin{vmatrix}-y_{10}&1&0\\-y_{20}-y_{30}&1-p&0\\-y_{30}&1&-1\end{vmatrix}=-(p+1)\begin{vmatrix}-y_{10}&1\\-y_{20}-y_{30}&1-p\end{vmatrix}=.$$

$$=-(p+1)\left[(p-1)y_{10}+y_{20}+y_{30}\right]$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}-p&-y_{10}&1\\1&-y_{20}&1\\1&-y_{30}&-p\end{vmatrix}=-(p+1)\left[(p-1)y_{20}+y_{10}+y_{30}\right].$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}-p&1&-y_{10}\\1&-p&-y_{20}\\1&1&-y_{30}\end{vmatrix}=-(p+1)\left[(p-1)y_{30}+y_{10}+y_{20}\right].$$

$$y_1(p)=\frac{-(p+1)\left[(p-1)y_{10}+y_{20}+y_{30}\right]}{-(p+1)^2(p-2)}=$$

$$=\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}y_{10}+\frac{1}{(p+1)(p-2)}\left(y_{20}+y_{30}\right),$$

но

$$L^{-1}\left\{\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-2}+\frac{2}{p+1}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(e^{2t}+2e^{-t}\right),$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(p+1)(p-2)}\right\}=L^{-1}\left\{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{p-2}-\frac{1}{p+1}\right)\right\}=\frac{1}{3}\left(e^{2t}-e^{-t}\right),$$

откуда

$$y_1(t)=\frac{1}{3}y_{10}\left(e^{2t}+2e^{-t}\right)+\frac{1}{3}\left(y_{20}+y_{30}\right)\left(e^{2t}-e^{-t}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(y_{10}+y_{20}+y_{30}\right)e^{2t}+\left(2y_{10}-y_{20}-y_{30}\right)e^{-t}\right].$$

Аналогично получим:

$$y_2(p)=\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}y_{20}+\frac{1}{(p+1)(p-2)}(y_{10}+y_{30}),$$

$$y_3(p)=\frac{p-1}{(p+1)(p-2)}y_{30}+\frac{1}{(p+1)(p-2)}(y_{10}+y_{20}),$$

$$y_2(t)=\frac{1}{3}\left[(y_{10}+y_{20}+y_{30})e^{2t}+(2y_{20}-y_{10}-y_{30})e^{-t}\right].$$

$$y_3(t)=\frac{1}{3}\left[(y_{10}+y_{20}+y_{30})e^{2t}+(2y_{30}-y_{10}-y_{20})e^{-t}\right].$$

§ 3. Задания для типовых расчетов

Задание 1. Найти оригинал.

1. $\frac{1+p}{p^2+4p+30}$
2. $\frac{1-2p}{p^2+4p+28}$
3. $\frac{5p-1}{p^2-8p+32}$
4. $\frac{4+p}{p^2+p+2}$
5. $\frac{4+p}{p^2-4p+30}$
6. $\frac{p}{p^2+8p+25}$
7. $\frac{8-p}{p^2-2p+10}$
8. $\frac{5p}{p^2+10p+34}$
9. $\frac{2p-3}{p^2+10p+41}$
10. $\frac{1-p}{p^2-4p+5}$
11. $\frac{7+2p}{p^2+14p+53}$
12. $\frac{8+p}{p^2+12p+72}$
13. $\frac{p+2}{p^2+6p+14}$
14. $\frac{2p-1}{p^2+20p+116}$
15. $\frac{p}{p^2-14p+65}$
16. $\frac{p+2}{p^2+8p+20}$
17. $\frac{p-2}{p^2-10p+125}$
18. $\frac{1+p}{p^2+8p+60}$
19. $\frac{p-3}{p^2+4p+13}$
20. $\frac{p+3}{p^2-16p+61}$
21. $\frac{p}{p^2+4p+13}$
22. $\frac{4+p}{p^2+10p+41}$
23. $\frac{9+p}{p^2-36p+400}$
24. $\frac{9+p}{p^2-4p+20}$
25. $\frac{4-p}{p^2+12p+40}$
26. $\frac{3p+1}{p^2+6p+90}$
27. $\frac{p}{p^2-24p+160}$
28. $\frac{p}{p^2+p+1}$
29. $\frac{2p-1}{p^2-12p+45}$
30. $\frac{p}{p^2+30p+250}$

Задание 2. Непосредственным интегрированием найти образ.

1. $\sin 5t$
2. e^{2t}
3. $\sin t$
4. $ch3t$
5. $sh(-t)$
6. $\cos 2t$
7. e^{-2t}
8. $5t+3$
9. $\cos\frac{t}{2}$
10. $3t+4$

11. $\cos 3t$ 12. $sh5t$ 13. $\cos t$ 14. $2t+1$ 15. $ch\dfrac{t}{2}$

16. $\sin 3t$ 17. $ch5t$ 18. $3-t$ 19. $ch\dfrac{t}{10}$ 20. $5t-8$

21. t^2 22. $sh(-2t)$ 23. $sh3t$ 24. $2t-1$ 25. $sh\dfrac{t}{3}$

26. t 27. $ch(-2t)$ 28. $\sin 2t$ 29. $sh\dfrac{t}{10}$ 30. $3t-1$

Задание 3. Найти оригинал.

1. $\dfrac{p}{(p+1)^2(p^2+4)}$

2. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-16)}$

3. $\dfrac{p+2}{(p+1)(p+2)(p^2+1)}$

4. $\dfrac{p^3}{(p^2+1)^3}$

5. $\dfrac{p+5}{(p^2-1)^2}$

6. $\dfrac{p^2+1}{p^2(p^2-1)^2}$

7. $\dfrac{p+1}{(p^2-4)^2}$

8. $\dfrac{p}{p^4-5p+1}$

9. $\dfrac{p+3}{(p^2-9)^2}$

10. $\dfrac{p^3}{(p^2-1)(p^2+4)}$

11. $\dfrac{p^3}{p^4-1}$

12. $\dfrac{p}{(p^2-4p+3)(p^2+9)}$

13. $\dfrac{p^2}{p^4-27}$

14. $\dfrac{p+3}{p^4+161}$

15. $\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2-4)}$

16. $\dfrac{p+1}{(p^2+4)(p^2+9)}$

17. $\dfrac{p^5}{p^6-1}$

18. $\dfrac{p+3}{p(p^2+25)(p+2)^2}$

19. $\dfrac{p^2}{p^4-81}$

20. $\dfrac{p+5}{(p^2+81)(p^2-49)}$

21. $\dfrac{1}{p^4-16}$

22. $\dfrac{p}{(p^2+27)(p+1)}$

23. $\dfrac{4}{p^3+5p^2+6p}$

24. $\dfrac{p-1}{p(p^3-8)}$

25. $\dfrac{p}{(p-2)^2(p+3)(p+7)}$

26. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+5p+6)}$

27. $\dfrac{p^2}{(p^2-1)(p^2+4)}$

28. $\dfrac{p}{(p^2+16)(p^2+3p+2)}$

29. $\dfrac{1+p^3}{p(p^2+4)(p-4)}$

30. $\dfrac{1}{(p+1)(p^2-3p-4)}$

Задание 4. Решить дифференциальное уравнение.

1. $x''+9x=\cos 8t$
2. $x''+16x=\cos 2t$
3. $x''+4x'+4x=e^{5t}\sin t$
4. $x'''-4x''=te^{t}$
5. $x''+2x'=t^3$
6. $x''-4x'+x=\sin 2t$
7. $x''+x'=e^{2t}\cos t$
8. $x''+x'+9x=e^{3t}$
9. $x''+4x'+4x=e^{5t}$
10. $x''-14x'+49x=e^{7t}$
11. $x''+x'-2x=e^{t}$
12. $x'''-8x=te^{t}$
13. $x'''+x=0$, $x(0)=0;\quad x'(0)=-1;\quad x''(0)=2$
14. $x''+4x'+4x=\sin t$
15. $x''+2x'+x=e^{2t}$, $x(0)=1;\quad x'(0)=0$
16. $x''-9x'+8x=e^{8t}$
17. $x''+3x'=e^{-t}$, $x(0)=1;\quad x'(0)=2$
18. $x''-27x=\sin 2t$
19. $x''-2x'+2x=\sin t$
20. $x''+16x'+16x=te^{4t}$
21. $x''+4x=\cos t$
22. $x''+x'+x=sh2t$
23. $x''-9x=cht$
24. $x''+2x'+4x=ch2t$
25. $x'''-2x''=e^{5t}$
26. $x''+3x'+9x=sh3t$
27. $x'''+3x''+3x'+x=te^{-2t}$
28. $x''-7x'+49x=\sin 7t$
29. $x'''-9x'=sht$
30. $x''+9x=sh3t$

Задание 5. Найти оригинал, пользуясь теоремой о свертывании

1. $\dfrac{1}{[(p-1)(p-2)]^2}$
2. $\dfrac{p}{(p^2-64)(p^2+10)}$
3. $\dfrac{1}{(p^2+3p-4)^2}$
4. $\dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+2)}$
5. $\dfrac{1}{(p^2-5p+6)^2}$
6. $\dfrac{p^2}{(p^2+3)(p^2+2)}$
7. $\dfrac{1}{(p+4)^2(p-2)^2}$
8. $\dfrac{p^2}{(p^2+3)(p^2-4)}$
9. $\dfrac{1}{(p^2-p-12)^2}$
10. $\dfrac{p^2}{(p^2-1)(p^2+11)}$
11. $\dfrac{p}{(p^2+4)(p^2-4)}$
12. $\dfrac{1}{(p^2-10p-11)^2}$

13. $\dfrac{p}{(p^2-4)(p^2+16)}$

14. $\dfrac{1}{(p^2-12p-13)^2}$

15. $\dfrac{p}{(p^2-1)(p^2+25)}$

16. $\dfrac{1}{(p^2-13p-14)^2}$

17. $\dfrac{p}{(p^2+1)(p^2-36)}$

18. $\dfrac{1}{(p^2-10p-24)^2}$

19. $\dfrac{p}{(4p^2+1)(p^2-25)}$

20. $\dfrac{1}{(p^2-10p-56)^2}$

21. $\dfrac{p}{(p^2+5)(25p^2-1)}$

22. $\dfrac{1}{(p^2+10p-56)^2}$

23. $\dfrac{p}{(p^2+3)(p^2-49)}$

24. $\dfrac{1}{(p^2+2p-8)^2}$

25. $\dfrac{p}{(p^2+7)(p^2+81)}$

26. $\dfrac{p^2}{(p^2+2)(p^2-8)}$

27. $\dfrac{p^2}{p^4-100}$

28. $\dfrac{p^2}{p^4-225}$

29. $\dfrac{p^2}{p^4-169}$

30. $\dfrac{p^2}{(p^2-9)(p^2+16)}$

Задание 6. Решить дифференциальное уравнение при начальных условиях $x(0)=x'(0)=0$.

1. $x''-4x=\sin x$
2. $x''-16x=t^2+1$
3. $x''+4x=\cos x$
4. $x''+36x=t^2+t$
5. $x''-16x=shx$
6. $x''+16x=2-3t$
7. $x''+16x=chx$
8. $x''+49x=t^2-3$
9. $x''-25x=\sin 2x$
10. $x''-49x=2t-5$
11. $x''+36x=sh2x$
12. $x''-64x=4t^2-3$
13. $x''-x=ch9x$
14. $x''+64x=5t-t^2$
15. $x''+x=sh5x$
16. $x''-81x=2t-7$
17. $x''-3x=sh\sqrt{2x}$
18. $x''+81x=sh5x$
19. $x''+5x=sh3x$
20. $x''-100x=ch6x$
21. $x''+15x=\cos 6x$
22. $x''+100x=sh7x$
23. $x''+x=t^2$
24. $x''-121x=ch8x$
25. $x''-9x=t$
26. $x''+121x=sh9x$
27. $x''+16x=2t+1$
28. $x''-169x=2t-11$
29. $x''-25x=1-t$
30. $x''+169x=sh10x$

Задание 7. Решить систему дифференциальных уравнений.

1. $\dot{x} = x + 2y$	$\dot{y} = y - 3x$	$x(0) = 1$	$y(0) = 0$
2. $\dot{x} + 1 = y - x$	$\dot{y} = x + y$	$x(0) = 0$	$y(0) = 1$
3. $\dot{x} - 1 = 2x - y$	$\dot{y} + 2 = 2x + y$	$x(0) = 2$	$y(0) = 1$
4. $\dot{x} + 4 = x + y$	$\dot{y} - 1 = y + 3x$	$x(0) = -1$	$y(0) = 2$
5. $\dot{x} + 5 = x - 3y$	$\dot{y} + 1 = y + 5x$	$x(0) = 1$	$y(0) = 3$
6. $\dot{x} - 3 = y - 2x$	$\dot{y} = 2x - 7y$	$x(0) = 3$	$y(0) = 0$
7. $\dot{x} + 5 = y + 2x$	$\dot{y} + 1 = y + 7x$	$x(0) = 1$	$y(0) = -1$
8. $\dot{x} = 2 - y$	$\dot{y} = 5x + 3y$	$x(0) = 10$	$y(0) = 10$
9. $\dot{x} - 7 = x - 2y$	$\dot{y} - 4 = x - 2y$	$x(0) = 1$	$y(0) = 3$
10. $\dot{x} + 5y = 3$	$2\dot{y} + 1 = 7x$	$x(0) = -2$	$y(0) = 1$
11. $\dot{x} - y = 1$	$\dot{y} + x = 2$	$x(0) = -1$	$y(0) = 2$
12. $\dot{x} + y = 4$	$\dot{y} - x = 1$	$x(0) = 2$	$y(0) = 3$
13. $\dot{x} - 2x = y$	$\dot{y} + 2x = 5$	$x(0) = -2$	$y(0) = 0$
14. $\dot{x} + 2 = 3y$	$\dot{y} - 2x = 3$	$x(0) = 0$	$y(0) = 4$
15. $\dot{x} - x = 7y$	$\dot{y} + 5x = 1$	$x(0) = 0$	$y(0) = -2$
16. $\dot{x} + 4x = 7 + y$	$\dot{y} + 5x = x$	$x(0) = 5$	$y(0) = 0$
17. $\dot{x} - 5x = y + 2$	$\dot{y} - 2 = x + y$	$x(0) = 0$	$y(0) = -1$
18. $\dot{x} + y = 1$	$\dot{y} + x = 2y$	$x(0) = 0$	$y(0) = 1$
19. $\dot{y} - x = 2$	$y - \dot{x} = x$	$x(0) = 0$	$y(0) = -2$
20. $\dot{x} = y + x$	$\dot{y} + x = 2$	$x(0) = 1$	$y(0) = -1$
21. $\dot{x} = 2x - y$	$\dot{y} = x + y$	$x(0) = -1$	$y(0) = 1$
22. $\dot{x} = x + y$	$\dot{y} + 3 = x + 3y$	$x(0) = 2$	$y(0) = 0$
23. $\dot{x} = y + 5$	$\dot{y} = x - 7y$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$
24. $\dot{x} = 5 - y$	$\dot{y} = 5x - 2$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$
25. $\dot{x} = y + 2x$	$\dot{y} = 2y + x$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$
26. $\dot{x} = 5 + 2y$	$\dot{y} = y + 2x$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$
27. $\dot{x} = x + 20y$	$\dot{y} = 5 + x$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$
28. $\dot{x} = y + 2$	$\dot{y} = 7 + x$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$
29. $\dot{x} = 12 + y$	$\dot{y} = x - 2y$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$
30. $\dot{x} = 3 + y$	$\dot{y} = x - y$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$

Задание 8. Пользуясь интегралом Дюамеля, найти оригинал.

1. $\dfrac{10p^2}{\left(p^2 - 1\right)^2}$

2. $\dfrac{p^2}{\left(p^2 + 3\right)\left(p^2 + 5\right)}$

3. $\dfrac{p^2}{\left(p^2 + 1\right)^2}$

4. $\dfrac{p^2}{\left(p^2 - 36\right)\left(p^2 + 49\right)}$

5 $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2+1)}$

6. $\frac{p^2}{(p^2+1)(p^2+36)}$

7. $\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+9)}$

8. $\frac{p^2}{(p^2+49)^2}$

9. $\frac{p^2}{(p^2-9)^2}$

10. $\frac{p^2}{(p^2-16)^2}$

11. $\frac{p^2}{(p^2-9)(p^2+16)}$

12. $\frac{p^2}{(p^2-49)^2}$

13. $\frac{p^2}{(p^2-4)(p^2+81)}$

14. $\frac{p^2}{(p^2+81)(p^2-100)}$

15. $\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+25)}$

16. $\frac{p^2}{(p^2-81)(p^2+16)}$

17. $\frac{p^2}{(p^2+36)(p^2+25)}$

18. $\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2+4)}$

19. $\frac{p^2}{(p^2+81)(p^2-25)}$

20. $\frac{p^2}{(p^2+4)(p^2-9)}$

21. $\frac{p^2}{(p^2-81)(p^2-1)}$

22. $\frac{p^2}{(p^2-4)(p^2-9)}$

23. $\frac{p^2}{(p^2+36)(p^2-1)}$

24. $\frac{p^2}{(p^2-1)(p^2-4)}$

25. $\frac{p^2}{(p^2-9)(p^2+4)}$

26. $\frac{p^2}{(p^2-4)(p^2-9)}$

27. $\frac{p^2}{(p^2-4)(p^2+100)}$

28. $\frac{p^2}{(p^2-9)(p^2-16)}$

29. $\frac{p^2}{(p^2-16)(p^2+4)}$

30. $\frac{p^2}{(p^2-16)(p^2-25)}$

Задание 9. Найти изображение функции, заданной на отрезке $[a,b]$ и равной нулю вне отрезка.

1. $y=2t^2$ $[1,4]$
2. $y=3t^2+2$ $[2,3]$
3. $y=2t+5$ $[3,10]$
4. $y=\frac{1}{3}t+7$ $[72,99]$
5. $y=3t+6$ $[2,12]$
6. $y=\frac{1}{5}t+1$ $[15,45]$
7. $y=5t+3$ $[7,15]$
8. $y=2t^2+t$ $[1,4]$
9. $y=7t+1$ $[9,20]$
10. $y=t^2+8t$ $[2,5]$
11. $y=\frac{1}{3}t+6$ $[6,24]$
12. $y=t^2+t+1$ $[4,9]$

13. $y=\frac{1}{7}t+2$	$[7, 21]$	14. $y=t^2+2t+3$	$[5, 7]$
15. $y=\frac{1}{2}t+1$	$[8, 14]$	16. $y=t^2+4t$	$[1, 7]$
17. $y=4t+2$	$[21, 29]$	18. $y=2t^2+8t+1$	$[2, 4]$
19. $y=3t+5$	$[24, 81]$	20. $y=2t+8$	$[17, 39]$
21. $y=2t^2+1$	$[1, 2]$	22. $y=\frac{1}{7}t+t^2$	$[21, 35]$
23. $y=t^2+3$	$[2, 5]$	24. $y=\frac{1}{2}t+t^2$	$[4, 6]$
25. $y=t+2$	$[1, 3]$	26. $y=t^2+\frac{1}{3}t$	$[6, 9]$
27. $y=\frac{1}{3}t+5$	$[27, 36]$	28. $y=t^2+\frac{1}{4}t$	$[8, 16]$
29. $y=\frac{1}{10}t+1$	$[10, 50]$	30. $y=t^2+\frac{1}{5}t$	$[5, 15]$

Задание 10. Найти изображение периодической функции $f(t)$ с периодом T, если известна функция $f_0(t)=\begin{cases} f(t), & t\in[0,T] \\ 0, & t\notin[0,T] \end{cases}$.

1. t^2+t-10	$[0, 3]$	2. t^2-t-10	$[0, 10]$
3. t^2+2t+3	$[0, 2]$	4. t^2-7t+1	$[0, 7]$
5. t^2+3t+1	$[0, 5]$	6. $2t^2+5$	$[0, 9]$
7. $2t+7$	$[0, 11]$	8. $3t^2-1$	$[0, 11]$
9. $\frac{1}{3}t+7$	$[0, 36]$	10. $t^2+2t-15$	$[0, 20]$
11. $2t^2+1$	$[0, 8]$	12. $t^2-10t+4$	$[0, 6]$
13. t^2+3t+5	$[0, 4]$	14. $t^2+t-100$	$[0, 8]$
15. $3t^2+2t+1$	$[0, 1]$	16. $t-t^2+40$	$[0, 30]$
17. t^2+5t+4	$[0, 2]$	18. $2t-t^2-10$	$[0, 40]$
19. $\frac{1}{7}t+5$	$[0, 14]$	20. $3t-t^2+50$	$[0, 50]$
21. $\frac{1}{9}t+14$	$[0, 27]$	22. $5t-t^2+60$	$[0, 20]$
23. t^2+5t+1	$[0, 4]$	24. $3t-2t^2+15$	$[0, 15]$
25. t^2-3t1	$[0, 3]$	26. $t-2t^2-100$	$[0, 25]$
27. t^2-t-5	$[0, 7]$	28. $t-t^2+200$	$[0, 35]$
29. t^2-3t+1	$[0, 4]$	30. $5t-3t^2+400$	$[0, 60]$

Библиографический список

1) **Бицадзе, А.В.** Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А.В. Бицадзе. М.: Наука, 1984. 320 с.

2) **Горяйнов, В.В.** Курс лекций по теории функций комплексного переменного / В.В. Горяйнов. Волгоград: Волгоградский государственный университет, 1998. 124 с.

3) **Деч, Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования (с приложением таблиц, составленных Р. Гершелем) / Г. Деч. 3-е изд., пер. с нем. М.: Наука, 1971 . 288 с.

4) **Евграфов, М.А.** Аналитические функции: учеб. пособие для вузов. 3-е изд., перераб. и доп. М.А. Евграфов. М.: Наука, 1991. 448 с.

5) **Краснов, М.Л.** Операционное исчисление. Устойчивость движения. М.Л. Краснов, Г.И. Макаренко М.: Наука, 1964. 104 с.

6) **Лаврентьев М.А.,** Методы теории функций комплексного переменного / М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат. 5-е изд., испр. М.: Наука, 1987. 688 с.

7) **Маркушевич, А.Н.** Краткий курс теории аналитических функций / А.Н. Маркушевич. 5-е изд., испр. и доп. М.: МИР, 2006. 424 с.

8) **Мартыненко, В.С.** Операционное исчисление / В.С. Мартыненко Киев: Вища школа, 1990. 361 с

9) **Пантелеев, А.В.** Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах: учебное пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Якимова**.** М.: Вузовская книга, 2012. 446 с.

10) **Письменный, Д.Т.** Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. 5-е изд. М.: Айрис-пресс, 2007. 608 с.

11) **Половинкин, Е.С.** Курс лекций по теории функций комплексного переменного: учеб. Пособие / Е.С. Половинкин. М.: МФТИ, 1999. 256 с.

12) **Привалов, И.И.** Введение в теорию функций комплексного переменного / И.И. Привалов. М.: Наука, 1984. 432 с.

13) Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 2-й курс / К.Н. Лунгу [и др.]; под ред. С.Н. Федина. 6-е изд. М.: Айрис-пресс, 2007. 592 с.

14) **Свешников, А.Г.** Теория функций комплексного переменного: учеб. для вузов. А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов. 6-е изд., стереотип. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 336 с.

15) **Сидоров, Ю.В.** Лекции по теории функций комплексного переменного / Ю.В. Сидоров, М.В. Федорюк, М.И. Шабунин. М.: Наука, 1989. 480 с.

16) **Смышляева, Л.Г.** Преобразование Лапласа функций многих переменных / Л.Г. Смышляева. Л.: ЛГУ, 1981. 142 с.

17) **Хапланов, М.Г.** Теория функций комплексного переменного / М.Г. Хапланов. Изд. 2-е, испр. М.: Просвещение, 1965. 208 с.

18) **Шабат, Б.В.** Введение в комплексный анализ / Б.В. Шабат. Т. 1. СПб.: Лань, 2004. 572 с.

Оглавление