

А. А. Шум

**ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ  
И БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ**

**Министерство образования Российской Федерации**  
**Тверской государственный технический университет**

**А . А . Шум**

**ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ**  
**И БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ**

**Учебное пособие**

**Тверь 2011**

ББК 22.12 : 22.14 я 7

УДК 510.6 : 512 (075.8)

Шум А. А. Логика высказываний и булевы алгебры: Учебное пособие. – Тверь: ТГТУ, 2011. – 60 с.

Учебное пособие посвящено начальным понятиям математической логики, обязательным для студентов вуза. Излагаются основы классической логики высказываний, приводятся истинностные таблицы пропозициональных связок, а также аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний. Рассматриваются тождества алгебры множеств и их связь с пропозициональными тавтологиями. Обсуждаются аксиомы булевых алгебр и их связь с теорией решёток.

Рецензенты : зав. кафедрой алгебры и математической логики  
Тверского государственного университета, профессор,  
доктор физико-математических наук А. В. Чагров;  
зав. кафедрой прикладной математики Московского  
государственного университета леса, профессор,  
доктор физико-математических наук А. В. Корольков.

ISBN

© Тверской государственный  
технический университет, 2011

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие представляет собой переработанный вариант учебного пособия [ 1 ], которое было издано в 2003 году для студентов, изучающих семестровый курс математической логики. В пособии [ 1 ] подробно рассматривались формальные исчисления, логика высказываний и алгебра множеств. В настоящее время эти вопросы математической логики часто включаются в состав более общего курса с названием «дискретная математика» и в силу необходимости рассматриваются на лекциях в более короткие сроки. В предлагаемом учебном пособии изложение этих вопросов адаптировано к данным условиям и является более компактным. Вместе с тем, в данном учебном пособии добавлена новая по сравнению с пособием [ 1 ] глава, посвящённая булевым алгебрам.

Составляющий настоящее учебное пособие материал разбит на четыре главы.

Первая глава посвящена классической логике высказываний. В ней вводятся пропозициональные связки и обсуждается их обычная семантика. Здесь рассматриваются традиционные вопросы вычисления истинностных значений пропозициональной формулы при помощи истинностных таблиц, понятия тавтологии и противоречия, а также обсуждается понятие семантического следования.

Во второй главе рассмотрено понятие формального исчисления и описано классическое исчисление высказываний. Здесь приводится (без доказательства) теорема о полноте классического исчисления высказываний, утверждающая, что теоремами этого исчисления являются тавтологии, и только они.

В третьей главе обсуждаются операции над множествами, рассматриваются тождества алгебры множеств и устанавливается естественная связь между тождествами алгебры множеств и пропозициональными тавтологиями.

Последняя, четвёртая глава посвящена булевым алгебрам. Здесь булевы алгебры рассматриваются с одной стороны как универсальные алгебры, удовлетворяющие определённым аксиомам, а с другой – как дистрибутивные решётки с нулём и единицей. Обсуждается описание конечных булевых алгебр.

В заключение следует отметить, что в предлагаемом учебном пособии изложены как раз те начальные понятия математической логики, которые необходимо знать каждому студенту, чтобы выдержать стандартные вузовские тесты.

## Глава 1

# КЛАССИЧЕСКАЯ ЛОГИКА ВЫСКАЗЫВАНИЙ

## § 1. Высказывания и пропозициональные связки

Из всех предложений естественного языка можно выделить те, которые что-то утверждают и в соответствии с этим являются истинными или ложными. Такие предложения называют высказываниями. Так, например, высказываниями будут

$$\begin{aligned}\varphi_1 &\Leftrightarrow \text{« Волга впадает в Каспийское море »}, \\ \varphi_2 &\Leftrightarrow \text{« Луна – это спутник Земли »}, \\ \varphi_3 &\Leftrightarrow \text{« Марс – это спутник Земли »}.\end{aligned}$$

(Здесь символ  $\Leftrightarrow$  сопоставляет высказываниям их обозначения). Известно, что высказывания  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  истинны, а высказывание  $\varphi_3$  ложно. Из высказывания  $\varphi_1$  можно образовать высказывание

$$\psi_1 \Leftrightarrow \text{« Не верно, что Волга впадает в Каспийское море »},$$

а из высказываний  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  можно образовать высказывания

$$\begin{aligned}\psi_2 &\Leftrightarrow \text{« Луна – это спутник Земли } \\ &\quad \text{и Марс – это спутник Земли »}, \\ \psi_3 &\Leftrightarrow \text{« Луна – это спутник Земли } \\ &\quad \text{или Марс – это спутник Земли »}, \\ \psi_4 &\Leftrightarrow \text{« Если Луна – это спутник Земли, } \\ &\quad \text{то и Марс – это спутник Земли »}\end{aligned}$$

(очевидно, что  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_4$  – ложные высказывания, а  $\psi_3$  – истинное высказывание). Здесь  $\psi_1$ ,  $\psi_2$ ,  $\psi_3$ ,  $\psi_4$  – это сложные высказывания, образованные из простых высказываний  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$  при помощи стандартных оборотов естественного языка. Для сокращенной записи таких сложных высказываний можно использовать *пропозициональные связки*, которые вводятся следующим образом:

отрицание  $\neg$  :  $\neg\varphi \Leftrightarrow$  « не верно  $\varphi$  »,  
 конъюнкция  $\&$  :  $\varphi \& \psi \Leftrightarrow$  «  $\varphi$  и  $\psi$  »,  
 дизъюнкция  $\vee$  :  $\varphi \vee \psi \Leftrightarrow$  «  $\varphi$  или  $\psi$  »,  
 импликация  $\supset$  :  $\varphi \supset \psi \Leftrightarrow$  « если  $\varphi$ , то  $\psi$  »,  
 («  $\varphi$  влечет  $\psi$  »).

Используя введенные пропозициональные связки, можно коротко записать высказывания  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  :

$$\psi_1 = \neg\varphi_1, \quad \psi_2 = \varphi_2 \& \varphi_3, \quad \psi_3 = \varphi_2 \vee \varphi_3, \quad \psi_4 = \varphi_2 \supset \varphi_3.$$

Выше уже было замечено, что  $\psi_1, \psi_2, \psi_4$  – ложные высказывания, а  $\psi_3$  – истинное высказывание. Однако, следует отметить ещё и то, что истинность или ложность этих сложных высказываний  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$  зависит только от того, истинны или ложны те простые высказывания  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ , из которых они составлены, и совсем не зависит от того, что именно они утверждают. Характер этой зависимости может быть точно описан следующим образом. Если истинность простых высказываний известна, то истинность сложного высказывания, построенного из них, определяется таблицами :

$\varphi$	$\neg\varphi$
и	л
л	и

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \& \psi$
и	и	и
и	л	л
л	и	л
л	л	л

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \vee \psi$
и	и	и
и	л	и
л	и	и
л	л	л

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \supset \psi$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Эти таблицы (*таблицы истинности пропозициональных связок*) отвечают смыслу соответствующих оборотов естественного языка. Первые три таблицы утверждают следующее:

*отрицание  $\neg\varphi$  высказывания  $\varphi$  является истинным тогда и только тогда, когда высказывание  $\varphi$  ложно,*

*конъюнкция  $\varphi \& \psi$  двух высказываний  $\varphi$  и  $\psi$  является истинной тогда и только тогда, когда оба высказывания  $\varphi$  и  $\psi$  истинны,*

*дизъюнкция  $\varphi \vee \psi$  двух высказываний  $\varphi$  и  $\psi$  является истинной тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно из высказываний  $\varphi$  или  $\psi$ .*

Последнее означает, что дизъюнкция отвечает не *разделительному*, но *объединительному* союзу «или»: дизъюнкция  $\varphi \vee \psi$  истинна и в том случае, когда оба дизъюнктивных члена истинны.

Последняя таблица утверждает, что

*импликация  $\varphi \supset \psi$  двух высказываний  $\varphi$  и  $\psi$  является ложной тогда и только тогда, когда высказывание  $\varphi$  (посылка импликации) истинно, а высказывание  $\psi$  (заключение импликации) ложно.*

Заметим, что это определение импликации соответствует правилу «из лжи следует все, что угодно». Так, построенные из предложений  $\psi_1, \varphi_2, \varphi_3$  предыдущего параграфа предложения

$\psi_5 \Leftrightarrow$  «Если Марс – это спутник Земли, то и Луна – это спутник Земли»,

$\psi_6 \Leftrightarrow$  «Если Марс – это спутник Земли, то не верно, что Волга впадает в Каспийское море»

следует считать истинными потому, что

$$\psi_5 = \varphi_3 \supset \varphi_2 \quad \text{и} \quad \psi_6 = \varphi_3 \supset \psi_1,$$

а высказывание  $\varphi_3$ , стоящее в посылке каждой из двух импликаций, является ложным.

## § 2. Пропозициональные формулы

Пусть буквы  $A, B, C, \dots$  обозначают какие - либо простые (*атомарные*) высказывания. При помощи пропозициональных связей имеется возможность строить из них высказывания сложные, которые в свою очередь могут использоваться для построения других сложных высказываний. Таким образом, например, могут быть построены следующие сложные высказывания:

$$\begin{aligned} & A \& \neg B, \\ & (A \& \neg B) \supset C, \\ & (A \supset (B \vee C)) \supset ((A \& \neg B) \supset C). \end{aligned}$$

Сложные высказывания в подобной записи представляют собой *пропозициональные формулы*. Буквы  $A, B, C, \dots$  здесь удобно рассматривать как *пропозициональные переменные*: их значениями могут служить атомарные высказывания, истинность которых заранее не определена (каждое из них может быть как истинно, так и ложно). Таким образом, пропозициональные формулы строятся из пропозициональных переменных  $A, B, C, \dots$  при помощи пропозициональных связок  $\neg, \&, \vee, \supset$  и скобок естественным образом (формальное определение пропозициональной формулы будет дано в следующей главе).

Обозначим последнюю из трёх записанных пропозициональных формул через  $\psi$  и рассмотрим её подробнее. С каждой пропозициональной связкой этой пропозициональной формулы можно связать *подформулу*: так, связке  $\vee$  отвечает подформула  $B \vee C$ , связке  $\&$  – подформула  $A \& \neg B$ , а связке  $\neg$  – подформула  $\neg B$  (при этом говорят, что  $\vee$  – *главная связка* формулы  $B \vee C$ ,  $\&$  – *главная связка* формулы  $A \& \neg B$  и  $\neg$  – *главная связка* формулы  $\neg B$ ). Связка  $\supset$  имеет три *вхождения* в обсуждаемую пропозициональную формулу, причем второе ее вхождение определяет подформулу, совпадающую со всей исходной формулой (таким образом, главной связкой этой формулы является вторая ее импликация).

Если фиксировать какое-либо распределение истинностных значений переменных  $A, B$  и  $C$ , то можно при помощи таблиц истинности последовательно вычислять истинностные значения всех подформул и, таким образом, определить истинностное значение и всей формулы. Эти вычисления удобно оформить в виде таблицы, в которой под каждой связкой записано истинностное значение соответствующей подформулы:

$A$	$B$	$C$	$(A \supset (B \vee C)) \supset ((A \& \neg B) \supset C)$
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и и и и и и и и л л и и и</i>
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и и и и л и и и л л и и л</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и и л и и и и и и и л и и</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и л л л л и и и и л л л</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л и и и и и и и л л л и и и</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л и и и л и и и л л л и и л</i>
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л и л и и и и и л л и л и и</i>
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л и л л л и и и л л и л л и</i>

В правой части таблицы выделены истинностные значения, стоящие под главной связкой рассматриваемой формулы. Это истин-



ностные значения данной формулы. Все эти значения – истины, и это значит, что независимо от того, истинны или нет атомарные высказывания  $A, B, C$ , сложное высказывание  $\psi$  всегда истинно. Пропозициональные формулы, подобные формуле  $\psi$  (то есть те, которые истинны при любом распределении истинностных значений между их пропозициональными переменными), называют *тавтологиями*.

### § 3. Тавтологии и противоречия

Буквы  $A, B, C, \dots$ , из которых строятся пропозициональные формулы, могут служить обозначениями каких-либо высказываний, а высказывания могут быть истинными или ложными. Поэтому эти буквы, названные в предыдущем параграфе пропозициональными переменными, естественно рассматривать как переменные, принимающие значения из множества  $\{u, l\}$ . Здесь  $u \Leftrightarrow$  «истина» и  $l \Leftrightarrow$  «ложь». Всякое распределение этих двух истинностных значений между всеми пропозициональными переменными языка называется *оценкой* (или *означиванием*). Более формально, оценкой  $v$  является всякая функция, отображающая множество всех пропозициональных переменных языка в множество истинностных значений  $\{u, l\}$ . Таким образом, оценка  $v$  сопоставляет всякой пропозициональной переменной истинностное значение из множества  $\{u, l\}$ . Если  $\varphi$  – пропозициональная формула и  $v$  – некоторая оценка, то в соответствии с правилами, описанными в § 2, при помощи истинностных таблиц может быть вычислено истинностное значение  $\varphi(v) \in \{u, l\}$  формулы  $\varphi$  при оценке  $v$ .

Заметим здесь, что определив (хотя и не вполне формально) понятие пропозициональной формулы, мы ввели *формальный язык*. Для того, чтобы изучать этот формальный язык, мы используем язык естественный (русский), который выступает по отношению к изучаемому формальному языку как *мета-язык*. Для удобства записей мы будем использовать привычные сокращения стандартных оборотов естественного языка, и это значит, что мы будем использовать *мета-символы*. В следующем списке мета-символов первый уже встречался ранее, а второй представляет собой *мета-импликацию*:

- $\Leftrightarrow$  – « есть по определению » ;
- $\Rightarrow$  – « если ... , то ... » , « следует » ;
- $\Leftrightarrow$  – « тогда и только тогда » , « равносильно » ;
- $\forall$  – « для любого » , « для всех » ;
- $\exists$  – « существует » , « найдется хотя бы один » .

Символы, которые стоят слева, иногда включают в алфавиты формальных языков. Два последних из них ( $\forall$  – *квантор общности* и  $\exists$  – *квантор существования*) рассматриваются как элементы формального языка при построении языка исчисления предикатов. Однако для нас все они представляют собой элементы не формального языка, но того мета - языка, на котором мы собираемся рассуждать, в том числе, и о нашем формальном языке. К символам мета - языка следует относить здесь также и обычные знаки теоретико - множественных отношений, например, знак  $\in$  принадлежности или знак  $\subseteq$  включения.

Для того, чтобы более точно определить понятие тавтологии, в начале параграфа мы ввели понятие оценки (означивания). Пусть  $V$  обозначает множество всех оценок.

Пропозициональная формула называется *тавтологией*, если она истинна при любой оценке :

$$\varphi \text{ тавтология} \Leftrightarrow \forall v \in V ( \varphi(v) = u ).$$

Пропозициональная формула называется *противоречием*, если она ложна при любой оценке :

$$\varphi \text{ противоречие} \Leftrightarrow \forall v \in V ( \varphi(v) = л ).$$

Пропозициональная формула называется *выполнимой*, если она истинна при некоторой оценке :

$$\varphi \text{ выполнима} \Leftrightarrow \exists v \in V ( \varphi(v) = u ).$$

Пропозициональная формула называется *опровержимой*, если она ложна при некоторой оценке :

$$\varphi \text{ опровержима} \Leftrightarrow \exists v \in V ( \varphi(v) = л ).$$

Легко проверить, что справедлива следующая

- Лемма.**
- а)  $\varphi$  тавтология  $\Leftrightarrow \neg\varphi$  противоречие ;
  - б)  $\varphi$  противоречие  $\Leftrightarrow \neg\varphi$  тавтология ;
  - в)  $\varphi$  выполнима  $\Leftrightarrow \neg\varphi$  опровержима ;
  - г)  $\varphi$  опровержима  $\Leftrightarrow \neg\varphi$  выполнима .

Чтобы не ограничивать возможности построения пропозициональных формул, множество пропозициональных переменных следует

считать бесконечным (формально оно будет описано в следующей главе, здесь отметим только, что для обозначения пропозициональных переменных используются также буквы с индексами). Таким образом, множество всех оценок  $V$  тоже бесконечно. Для того чтобы выяснить, является или нет формула  $\varphi$  тавтологией, в соответствии с определением необходимо проверить, что  $\varphi(v) = u$  для любой оценки  $v \in V$ . Однако при этом нет необходимости перебирать все оценки  $v$  из бесконечного множества  $V$ , а достаточно рассмотреть только те из них, которые различаются лишь на конечном множестве пропозициональных переменных формулы  $\varphi$ . В связи с этим удобно использовать *ограниченные оценки*, то есть такие, которые сопоставляют истинностные значения не всем вообще пропозициональным переменным, а только входящим в рассматриваемую формулу (или формулы). Такие ограниченные оценки фактически и рассматриваются без специальных оговорок во всех примерах, связанных с истинностными таблицами.

Тавтология – это формула, которая *общезначима*, то есть истинна всегда. Название «тавтология» объясняется тем, что такая формула не сообщает никакой информации об истинности тех элементарных высказываний, из которых она построена. Так, истинность формулы  $(A \supset B \vee C) \supset (A \& \neg B \supset C)$  из § 2 ничего не добавляет к вопросу об истинности высказываний  $A, B, C$ : истинны они или ложны, эта тавтология все равно истинна. Истинность же формулы, не являющейся тавтологией, ограничивает возможности распределения истинностных значений между ее пропозициональными переменными: те оценки, при которых эта формула ложна, должны быть отброшены.

С другой стороны, тавтология описывает схему, которой может следовать верное (с логической точки зрения) рассуждение. В этой связи о некоторых тавтологиях говорят как о *логических законах*. Так, например, тавтология  $A \vee \neg A$  представляет собой *закон исключенного третьего*, а тавтология  $\neg\neg A \supset A$  выступает как *закон снятия двойного отрицания*.

## § 4. Семантическое следование

Пусть  $\Gamma$  – некоторое множество пропозициональных формул. Будем писать  $\Gamma(v) = u$ , если при оценке  $v$  истинны все формулы из множества  $\Gamma$ . Иначе говоря,

$$\Gamma(v) = u \iff \forall \varphi \in \Gamma \varphi(v) = u.$$

Будем говорить, что из множества формул  $\Gamma$  семантически следует формула  $\psi$  и писать  $\Gamma \models \psi$ , если при всех оценках, при которых истинны все формулы из множества  $\Gamma$ , истинна также и формула  $\psi$ . Таким образом,

$$\Gamma \models \psi \Leftrightarrow \forall v \in V (\Gamma(v) = u \Rightarrow \psi(v) = u).$$

Для пустого множества формул  $\emptyset$  удобно считать, что  $\emptyset(v) = u$  при любой оценке  $v$ , поэтому  $\emptyset \models \psi$  означает, что  $\forall v \in V \psi(v) = u$ , то есть, что формула  $\psi$  является тавтологией.

Вместо  $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \models \psi$  будем писать  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi$  и запись  $\emptyset \models \psi$  также будем заменять более короткой:  $\models \psi$ .

Проанализируем с точки зрения рассмотренных определений следующее рассуждение (пример 12 из § 14 книги [ 2 ]).

*« Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы.  
А не спроси она его, он бы и не сказал ей.  
Но она узнала.  
Значит, она его спросила. »*

Если ввести следующие обозначения

$$\begin{aligned} A &\Leftrightarrow \text{« Он ей сказал »}, \\ B &\Leftrightarrow \text{« Она узнала »}, \\ C &\Leftrightarrow \text{« Она его спросила »}, \end{aligned}$$

то истинность данного рассуждения будет равносильна (так естественно считать) такому семантическому следованию :

$$\neg A \supset \neg B, \neg C \supset \neg A, B \models C.$$

Чтобы проверить, справедливо ли это семантическое следование, составим (вычислив необходимые истинностные значения) таблицу подобную той, которая рассматривалась в § 2.

	$A$	$B$	$C$	$\neg A \supset \neg B$	$\neg C \supset \neg A$	$B$	$C$
$v_1$	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л и и л и</i>	<i>л и и л и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>
$v_2$	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л и и л и</i>	<i>и л л л и</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
$v_3$	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л и и и л</i>	<i>л и и л и</i>	<i>л</i>	<i>и</i>
$v_4$	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л и и и л</i>	<i>и л л л и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>
$v_5$	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и л л л и</i>	<i>л и и и л</i>	<i>и</i>	<i>и</i>
$v_6$	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>	<i>и л л л и</i>	<i>и л и и л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
$v_7$	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>	<i>и л и и л</i>	<i>л и и и л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>
$v_8$	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и л и и л</i>	<i>и л и и л</i>	<i>л</i>	<i>л</i>

Из таблицы видно, что

формула  $\neg A \supset \neg B$  истинна при оценках  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_7, v_8$ ,  
формула  $\neg C \supset \neg A$  истинна при оценках  $v_1, v_3, v_5, v_6, v_7, v_8$ ,  
формула  $B$  истинна при оценках  $v_1, v_2, v_5, v_6$ .

Все три эти формулы одновременно истинны только при оценке  $v_1$ . Но при этой оценке истинна и формула  $C$ , поэтому данное семантическое следование действительно имеет место и рассматриваемое рассуждение следует считать верным.

Заметим, что если из числа посылок исключить третью формулу  $B$ , то рассматриваемое семантическое следование перестанет быть верным. В самом деле, имеется оценка  $v_8$ , при которой обе формулы  $\neg A \supset \neg B$  и  $\neg C \supset \neg A$  истинны, но формула  $C$  ложна. Это значит, что вычеркивание третьей строки в записи исходного рассуждения на русском языке сделает его ложным.

Из определения семантического следования и истинностных таблиц для вычисления конъюнкции и импликации непосредственно следует

**Лемма.**  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi \Leftrightarrow \models \varphi_1 \& \varphi_2 \& \dots \& \varphi_n \supset \psi$ .

Эта лемма утверждает, что пропозициональное семантическое следование  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \models \psi$  имеет место тогда и только тогда, когда пропозициональная формула  $\varphi_1 \& \varphi_2 \& \dots \& \varphi_n \supset \psi$  является тавтологией. Таким образом, для исследования рассмотренного примера рассуждений можно было составить пропозициональную формулу

$$(\neg A \supset \neg B) \& (\neg C \supset \neg A) \& B \supset C.$$

Убедившись, что эта формула является тавтологией, можно было бы также заключить, что соответствующее рассуждение верно.

## § 5. Эквивалентность пропозициональных формул

Две пропозициональные формулы  $\varphi$  и  $\psi$  называются *эквивалентными*, если  $\varphi = \psi$  и  $\psi = \varphi$ . В соответствии с этим определением формулы эквивалентны, если их истинностные значения при любой оценке одинаковы. Эквивалентность формул обозначается знаком  $\sim$ . Таким образом,

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \forall v \in V ( \varphi(v) = \psi(v) ).$$

Все тавтологии эквивалентны друг другу, так как каждая из них при любой оценке истинна. Обозначим через  $\top$  какую-нибудь из них (для определенности положим  $\top \Leftrightarrow A \vee \neg A$ ), тогда любая тавтология будет эквивалентна  $\top$ .

Все противоречия эквивалентны друг другу, так как каждое из них при любой оценке ложно. Обозначим через  $\perp$  какое-нибудь из них (для определенности положим  $\perp \Leftrightarrow A \& \neg A$ ), тогда любое противоречие будет эквивалентно  $\perp$ .

Для произвольных пропозициональных формул  $\varphi$  и  $\psi$  положим

$$\varphi \equiv \psi \Leftrightarrow (\varphi \supset \psi) \& (\psi \supset \varphi).$$

Можно считать, что это соотношение определяет новую двухместную связку  $\equiv$ , которой отвечает своя истинностная таблица:

$\varphi$	$\psi$	$\varphi \equiv \psi$
<i>и</i>	<i>и</i>	<i>и</i>
<i>и</i>	<i>л</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>и</i>	<i>л</i>
<i>л</i>	<i>л</i>	<i>и</i>

(истинностные значения, стоящие в последнем столбце этой таблицы, вычислены по правилам, описанным в § 2). Так определенная пропозициональная связка  $\equiv$  называется *эквивалентностью*. Она (расширяя формальный язык классической логики высказываний) представляет

собой пример *производной связки*. Производными называются такие новые связки языка, которые определены через изначально имеющиеся *исходные* (или *основные*) пропозициональные связки (к основным связкам нашего языка следует относить отрицание  $\neg$ , конъюнкцию  $\&$ , дизъюнкцию  $\vee$  и импликацию  $\supset$ ).

Связка  $\equiv$  является *двухместной*: она связывает два аргумента. Связка  $\neg$  является *одноместной*, так как ей нужен только один аргумент. Можно рассматривать и *нульместные* связки, то есть связки вообще не требующие аргументов. Так, определенные выше формулы  $\top$  и  $\perp$  можно трактовать как производные нульместные связки:  $\top$  всегда принимает истинностное значение «истина», а  $\perp$  всегда принимает истинностное значение «ложь» вне зависимости от того, какие истинностные значения принимают какие бы то ни было пропозициональные переменные.

Эквивалентность как пропозициональная связка  $\equiv$  и эквивалентность как отношение  $\sim$  между пропозициональными формулами очень естественно между собой связаны. Эту связь отражает непосредственно вытекающая из сделанных определений

**Лемма.**  $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \models \varphi \equiv \psi$ .

Таким образом, пропозициональные формулы  $\varphi$  и  $\psi$  эквивалентны тогда и только тогда, когда пропозициональная формула  $\varphi \equiv \psi$  является тавтологией.

## § 6. Эквивалентные преобразования пропозициональных формул

*Эквивалентными преобразованиями пропозициональных формул* называют преобразования, переводящие пропозициональные формулы в эквивалентные пропозициональные формулы. Такие преобразования позволяют свести изучение истинности сложных пропозициональных формул к изучению истинности эквивалентных им более простых формул. Несколько лемм, рассмотренные в настоящем параграфе, определяют основу техники таких преобразований. В первой из этих лемм (доказательство которой сводится к непосредственной проверке) собраны наиболее полезные примеры эквивалентностей:

**Лемма 1.**

- |   |   |
|---|---|
| (e2) $A \& A \sim A$                                | (e1) $\neg\neg A \sim A$                              |
| (e4) $A \& B \sim B \& A$                           | (e3) $A \vee A \sim A$                                |
| (e6) $(A \& B) \& C \sim A \& (B \& C)$             | (e5) $A \vee B \sim B \vee A$                         |
| (e8) $A \& (A \vee B) \sim A$                       | (e7) $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$       |
| (e10) $A \& (B \vee C) \sim (A \& B) \vee (A \& C)$ | (e9) $A \vee (A \& B) \sim A$                         |
| (e12) $A \& (B \vee \neg B) \sim A$                 | (e11) $A \vee (B \& C) \sim (A \vee B) \& (A \vee C)$ |
| (e14) $A \sim (A \& B) \vee (A \& \neg B)$          | (e13) $A \vee (B \& \neg B) \sim A$                   |
| (e16) $\neg(A \& B) \sim \neg A \vee \neg B$        | (e15) $A \sim (A \vee B) \& (A \vee \neg B)$          |
|   | (e17) $\neg(A \vee B) \sim \neg A \& \neg B$          |

В рассмотренной лемме все (кроме одной) эквивалентности расположены парами. Это пары *двойственных* эквивалентностей: одна из них получается из другой одновременной заменой всех конъюнкций на дизъюнкции и всех дизъюнкций на конъюнкции. Эквивалентность (e1), позволяющая снимать двойное отрицание, стоит отдельно потому, что она не содержит конъюнкций и дизъюнкций.

Говорят, что в формуле  $\varphi$  выполнена *подстановка* вместо переменной  $A$  формулы  $\eta$ , если каждое вхождение переменной  $A$  в формулу  $\varphi$  заменено формулой  $\eta$ . Пропозициональная формула называется *подстановочным примером* формулы  $\varphi$ , если она получена из формулы  $\varphi$  подстановкой вместо некоторых пропозициональных переменных каких-либо пропозициональных формул (говорят также, что эта формула является *подстановкой в формулу  $\varphi$* ). Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — некоторые из переменных формулы  $\varphi$ , то эту формулу можно записывать также в виде  $\varphi(A_1, A_2, \dots, A_n)$ . В таком случае подстановочный пример этой формулы, полученный заменой переменных  $A_1, A_2, \dots, A_n$  соответственно на формулы  $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ , естественно записывать в виде  $\varphi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ . Непосредственно из рассмотренных определений вытекает

**Лемма 2.**

а) *Всякий подстановочный пример тавтологии есть также тавтология.*

б) *Если  $\varphi(A_1, A_2, \dots, A_n) \sim \psi(A_1, A_2, \dots, A_n)$ , то  $\varphi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) \sim \psi(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ .*

в) *Замена в формуле подформулы на эквивалентную приводит к эквивалентной формуле.*

При помощи леммы 2 может быть доказана



**Лемма 3.** Для всякой пропозициональной формулы существует эквивалентная ей пропозициональная формула, содержащая только две связки :

- а) отрицание  $\neg$  и конъюнкцию  $\&$ ,
- б) отрицание  $\neg$  и дизъюнкцию  $\vee$ ,
- в) отрицание  $\neg$  и импликацию  $\supset$ ,
- г) ложь  $\perp$  и импликацию  $\supset$ .

В основе доказательства леммы 3 лежит техника выражения одних пропозициональных связок через другие. Исходная пропозициональная формула может содержать все основные связки : отрицание  $\neg$ , конъюнкцию  $\&$ , дизъюнкцию  $\vee$ , импликацию  $\supset$ . Однако некоторые из этих связок могут быть выражены через другие (и затем применением леммы 2 исключены) :

а) выражение связок  $\vee$  и  $\supset$  через связки  $\neg$  и  $\&$  определяют эквивалентности

$$(i1) \quad A \vee B \sim \neg(\neg A \& \neg B),$$

$$(i2) \quad A \supset B \sim \neg(A \& \neg B);$$

б) выражение связок  $\&$  и  $\supset$  через связки  $\neg$  и  $\vee$  определяют эквивалентности

$$(i3) \quad A \& B \sim \neg(\neg A \vee \neg B),$$

$$(i4) \quad A \supset B \sim \neg A \vee B;$$

в) выражение связок  $\&$  и  $\vee$  через связки  $\neg$  и  $\supset$  определяют эквивалентности

$$(i5) \quad A \& B \sim \neg(A \supset \neg B),$$

$$(i6) \quad A \vee B \sim \neg A \supset B;$$

г) выражение связок  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$  через связки  $\perp$  и  $\supset$  определяют эквивалентности

$$(i7) \quad \neg A \sim A \supset \perp,$$

$$(i8) \quad A \& B \sim (A \supset (B \supset \perp)) \supset \perp,$$

$$(i9) \quad A \vee B \sim (A \supset \perp) \supset B.$$

Каждая из эквивалентностей (i1) – (i9) может быть непосредственно проверена при помощи истинностных таблиц. Применение этих эквивалентностей совместно с пунктом в) леммы 2 и доказывает лемму 3.

## Глава 2

## КЛАССИЧЕСКОЕ

## ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

## § 7. Формальные исчисления

Логика изучает рассуждения. Чтобы изучать рассуждение, его необходимо записать на каком-либо языке. Рассуждение, записанное на естественном языке (например, на русском), не всегда может быть истолковано однозначно. Между слов естественного языка, смысл которых дается не точным определением, а привычкой к их употреблению, часто проскальзывает двусмысленность или неточность мысли. Математическая логика использует для записи утверждений и рассуждений с ними *формальный* (или символический) язык.

Формальный язык начинается с алфавита. *Алфавит* – это совокупность исходных символов (чаще всего конечная), которые только и могут использоваться в записи утверждений (предложений) языка. *Слова* в алфавите – это произвольные конечные последовательности символов алфавита, а *предложения* или *формулы* – это осмысленные слова, то есть слова, удовлетворяющие некоторым синтаксическим требованиям (выполнение которых можно эффективно проверить). Множество всех предложений (формул) формального языка мы будем обозначать через  $F$ . Предложения из множества  $F$  – это формально записанные утверждения, над которыми, собственно, мы и хотим выполнять рассуждения: из одних утверждений (которые мы предположим верными) выводить (или доказывать) другие (которые тогда тоже окажутся верными). Утверждения (предложения), которые изначально предполагаются верными, называются *аксиомами*. Чтобы доказывать или выводить из аксиом другие верные предложения, должны быть определены *правила вывода*:

$k$  - местное правило вывода  $R$  представляет собой  $(k+1)$ -местное отношение между формулами такое, что для любых формул  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  и формулы  $\varphi$  эффективно решается вопрос о том, находятся ли они в данном отношении или нет – и если да, то  $\varphi$  называется непосредственным следствием формул  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$  по правилу  $R$ .

*Формальное исчисление* считается заданным, если

1) из множества всех формул  $F$  выделено подмножество  $A$  – множество аксиом исчисления (множество аксиом может быть конечным или бесконечным, но для любой формулы должен эффективно решаться вопрос о том, является ли она аксиомой или нет),

2) определены правила вывода  $R_1, R_2, \dots, R_p$  (правило  $R_i$  предполагается  $k_i$ -местным, а натуральные числа  $k_1, k_2, \dots, k_p$  могут быть произвольными).

*Выводом* в исчислении называется всякая последовательность формул  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  такая, что любая ее формула  $\varphi_i$  есть либо аксиома исчисления, либо непосредственное следствие каких-либо предыдущих формул по одному из правил вывода исчисления.

Формула  $\varphi$  называется *теоремой* исчисления, если существует вывод в исчислении, в котором последней формулой является  $\varphi$ . Такой вывод называется *выводом (доказательством) формулы  $\varphi$* .

Пусть  $\Gamma$  – некоторое множество формул, то есть  $\Gamma \subseteq F$ . *Выводом из множества  $\Gamma$*  в рассматриваемом исчислении называется всякая последовательность формул такая, что любая ее формула представляет собой либо аксиому, либо элемент множества  $\Gamma$ , либо непосредственное следствие некоторых предыдущих формул по одному из правил вывода исчисления (элементы множества  $\Gamma$  называют при этом *гипотезами*).

Формула  $\varphi$  называется *следствием множества формул  $\Gamma$*  в рассматриваемом исчислении, если в этом исчислении существует вывод из множества гипотез  $\Gamma$ , оканчивающийся формулой  $\varphi$  (то есть *вывод формулы  $\varphi$  из множества гипотез  $\Gamma$* ). В этом случае говорят, что в исчислении из множества посылок  $\Gamma$  выводится формула  $\varphi$ , и пишут:  $\Gamma \vdash \varphi$ . Если  $\Gamma$  представляет собой конечное множество, состоящее из формул  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , то вместо  $\Gamma \vdash \varphi$  можно писать  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$ . Таким образом, запись  $\vdash \varphi$  означает выводимость в исчислении формулы  $\varphi$  из пустого множества посылок (в этом случае  $\varphi$  является теоремой исчисления).

В рамках математической логики рассматриваются и изучаются разнообразные формальные исчисления, здесь же мы опишем только одно из них – это классическое исчисление высказываний, которое прямо и непосредственно связано с классической логикой высказываний, рассмотренной в предыдущей главе. Описание формального исчисления следует начинать с описания формального языка.

## § 8. Формальный язык классического исчисления высказываний

Определение всякого формального языка начинается с описания *алфавита*. Алфавит формального языка логики высказываний состоит

из четырех пропозициональных связок :  $\neg$  &  $\vee$   $\supset$  ,  
двух скобок ( левой и правой ) : ( )  
и бесконечного числа пропозициональных букв .

Пропозициональными буквами являются заглавные буквы латинского алфавита и такие же буквы с числовыми индексами, например,

$$A, B, C, D, A_1, B_3, C_{12}, D_{172} .$$

Любая конечная последовательность слов алфавита называется *словом* в этом алфавите. Так, например, словами в описанном алфавите являются :

$$A \& B \supset C , \\ ( A \& \supset B_{15} \neg C_{257} , \\ (( A \& B ) \supset C ) .$$

Из множества всех слов в рассматриваемом алфавите выделяют те, которые называются *пропозициональными формулами*. Формальное определение пропозициональной формулы содержит три пункта :

- (1) всякая пропозициональная буква есть пропозициональная формула;
- (2) если  $\varphi$  и  $\psi$  – пропозициональные формулы, то  $(\neg\varphi)$ ,  $(\varphi \& \psi)$ ,  $(\varphi \vee \psi)$ ,  $(\varphi \supset \psi)$  – тоже пропозициональные формулы;
- (3) только те слова в описанном алфавите являются пропозициональными формулами, для которых это следует из пунктов (1) и (2).

Из этого определения следует, что всякая пропозициональная формула может быть построена из конечного числа пропозициональных букв последовательным применением (приписыванием) пропозициональных связок. Связка, которая при этом применялась последней, называется *главной связкой* пропозициональной формулы. Формулы, которые возникают в процессе построения данной пропозициональной формулы, представляют собой ее *подформулы*. Подформулами пропо-

зициональной формулы являются в том числе и она сама и каждая из входящих в нее пропозициональных букв.

Из трех слов, рассмотренных в начале параграфа, пропозициональной формулой является только последнее:  $((A \& B) \supset C)$ . В силу рассмотренного определения слово  $A \& B \supset C$  не является пропозициональной формулой потому, что оно не содержит требуемых скобок. Однако, если условиться в записи пропозициональных формул делать естественные сокращения, то и это слово можно будет считать пропозициональной формулой. Предлагаемые правила сокращения:

- 1) опускать внешние (окаймляющие) скобки;
- 2) опускать те скобки, которые легко восстановить исходя из приоритетов пропозициональных связок, определяемых следующим их порядком  $\neg, \&, \vee, \supset$  (чем раньше встречается связка в этом списке, тем выше ее приоритет и тем сильнее она связывает).

Эти правила сокращения записи пропозициональных формул (соглашения об опускании скобок) следует понимать так: при восстановлении в пропозициональной формуле недостающих скобок прежде всего ставятся скобки, определяющие наиболее короткие подформулы с главной связкой  $\neg$ , затем ставятся скобки, определяющие наиболее короткие подформулы с главной связкой  $\&$  и так далее, причем из двух вхождений одной и той же связки более высокий приоритет имеет то из них, которое расположено левее. В соответствии с этими правилами формулу

$$A \& B \supset \neg (C \vee D) \& A \vee B \supset \neg C \vee D \supset B$$

следует понимать так :

$$(((A \& B) \supset (((\neg (C \vee D)) \& A) \vee B)) \supset ((\neg C) \vee D)) \supset B),$$

а формулу  $\psi$  из § 2

$$(A \supset (B \vee C)) \supset ((A \& \neg B) \supset C),$$

которую без сокращений следует записывать так :

$$((A \supset (B \vee C)) \supset ((A \& (\neg B)) \supset C)),$$

можно записать короче следующим образом :

$$(A \supset B \vee C) \supset (A \& \neg B \supset C).$$

Последнюю формулу можно записать еще короче (но менее удобно) :

$$A \supset B \vee C \supset (A \& \neg B \supset C).$$

## § 9. Аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний

Аксиомами классического исчисления высказываний являются следующие формулы и все их подстановочные примеры :

- 1)  $A \supset (B \supset A)$ ,
- 2)  $(A \supset (B \supset C)) \supset ((A \supset B) \supset (A \supset C))$ ,
- 3)  $A \& B \supset A$ ,
- 4)  $A \& B \supset B$ ,
- 5)  $A \supset (B \supset A \& B)$ ,
- 6)  $A \supset A \vee B$ ,
- 7)  $B \supset A \vee B$ ,
- 8)  $(A \supset C) \supset ((B \supset C) \supset (A \vee B \supset C))$ ,
- 9)  $(A \supset B) \supset ((A \supset \neg B) \supset \neg A)$ ,
- 10)  $\neg \neg A \supset A$ .

Каждая из этих десяти формул не только сама является аксиомой, но определяет множество аксиом – множество своих подстановочных примеров. Таким образом, данные формулы это не просто аксиомы – это *схемы аксиом*.

Единственным правилом вывода классического исчисления высказываний является правило *modus ponens* :  $\varphi, \varphi \supset \psi \rightarrow \psi$ . Это правило следует понимать так: из формул  $\varphi$  и  $\varphi \supset \psi$  непосредственно следует формула  $\psi$  (здесь, как обычно,  $\varphi$  и  $\psi$  – это произвольные пропозициональные формулы).

Определение классического исчисления высказываний закончено. Это определение не является единственно возможным: так, другие аксиоматики этого исчисления (его также называют *классическим пропозициональным исчислением*) можно найти в книгах [ 3 ] – [ 7 ].

Теперь, опираясь на формальное определение, можно развивать теорию доказательств (и технику доказательства) в классическом исчислении высказываний, выясняя, какие формулы будут теоремами этого исчисления и как их следует доказывать. Первым результатом в этом направлении может служить следующая

**Лемма.** *Формула  $\varphi \supset \varphi$  является теоремой классического исчисления высказываний (какова бы ни была формула  $\varphi$ ).*

В качестве доказательства леммы можно предъявить вывод формулы  $\varphi \supset \varphi$  в классическом исчислении высказываний. Этим выводом является следующая последовательность формул:

- |  |                                |
|--|--------------------------------|
| 1) $(\varphi \supset ((\varphi \supset \varphi) \supset \varphi)) \supset ((\varphi \supset (\varphi \supset \varphi)) \supset (\varphi \supset \varphi))$ | <i>схема аксиом 2,</i>         |
| 2) $(\varphi \supset ((\varphi \supset \varphi) \supset \varphi))$   | <i>схема аксиом 1,</i>         |
| 3) $(\varphi \supset (\varphi \supset \varphi)) \supset (\varphi \supset \varphi)$   | <i>modus ponens : 1) и 2),</i> |
| 4) $\varphi \supset (\varphi \supset \varphi)$   | <i>схема аксиом 1,</i>         |
| 5) $\varphi \supset \varphi$   | <i>modus ponens : 3) и 4).</i> |

Для обозначения выводимости в классическом исчислении высказываний мы будем использовать символ  $\vdash$ . Таким образом, в силу доказанной леммы для любой формулы  $\varphi$  можно утверждать, что  $\vdash \varphi \supset \varphi$ .

## § 10. Теорема дедукции

Через  $\varphi, \psi, \eta$  будем обозначать произвольные пропозициональные формулы, а через  $\Gamma$  – произвольное множество пропозициональных формул. В соответствии с общими определениями из § 7 и § 8 известно, что значит  $\Gamma \vdash \varphi$ : *из множества формул  $\Gamma$  выводится формула  $\varphi$* . Более удобная запись  $\Gamma, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \vdash \varphi$  заменяет более формальную  $\Gamma \cup \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ .

**Теорема дедукции.** *Если  $\Gamma, \varphi \vdash \psi$ , то  $\Gamma \vdash \varphi \supset \psi$ .*

Доказательство этой теоремы приводится в [ 1 ], здесь же мы обсудим только, как она используется в рамках техники формальных доказательств.

В математических рассуждениях часто какое-нибудь утверждение  $\Psi$  доказывают в предположении, что выполнено другое утверждение  $\Phi$ , и затем заключают, что  $\Phi \Rightarrow \Psi$ . Для формального исчисления высказываний правомерность такого приема и устанавливает доказанная теорема дедукции. Два рассмотренных ниже следствия представляют собой простые примеры применения этой теоремы.

**Следствие 1.**  $\varphi \supset \psi, \psi \supset \eta \vdash \varphi \supset \eta$ .

Доказательство :

- 1)  $\varphi \supset \psi$  гипотеза,
- 2)  $\psi \supset \eta$  гипотеза,
- 3)  $\varphi$  гипотеза,
- 4)  $\psi$  *modus ponens* : 1) и 3),
- 5)  $\eta$  *modus ponens* : 2) и 4).

Таким образом,  $\varphi \supset \psi, \psi \supset \eta, \varphi \vdash \eta$ , и отсюда, по теореме дедукции,  $\varphi \supset \psi, \psi \supset \eta \vdash \varphi \supset \eta$ .

**Следствие 2.**  $\varphi \supset (\psi \supset \eta), \psi \vdash \varphi \supset \eta$ .

Доказательство :

- 1)  $\varphi \supset (\psi \supset \eta)$  гипотеза,
- 2)  $\psi$  гипотеза,
- 3)  $\varphi$  гипотеза,
- 4)  $\psi \supset \eta$  *modus ponens* : 1) и 3),
- 5)  $\eta$  *modus ponens* : 2) и 4).

Таким образом,  $\varphi \supset (\psi \supset \eta), \psi, \varphi \vdash \eta$ , и отсюда, по теореме дедукции,  $\varphi \supset (\psi \supset \eta), \psi \vdash \varphi \supset \eta$ .

## § 11. Теорема о полноте

Формальный язык, описанный в § 9, можно рассматривать как модель языка естественного, которой явно выделены и формализованы типичные конструкции образования предложений (утверждений) естественного языка. Далее, формальное исчисление с его аксиомами и правилами вывода можно представлять уже как модель тех естественных правил логики, которую использует человек (математик), рассуждая на естественном языке и доказывая одни предложения (утвержде-



ния) исходя из других. Сами по себе формальный язык и формальное исчисление – понятия чисто синтаксические. Их основу составляет заданный алфавит – набор вполне определенных знаков. Все предложения (утверждения) формального языка и все доказательства формального исчисления представляют собой в конечном итоге только последовательности этих знаков: предложения – это определенного вида слова в алфавите, а доказательства – это определенного вида конечные последовательности таких слов. Между тем, для естественного языка важно то, что все его синтаксические конструкции осмысленны (предложения естественного языка имеют тот или иной смысл, могут быть истинными или ложными), а это означает, что естественный язык имеет не только *синтаксис*, но и *семантику*. Соответственно этому и нашему формальному языку следует сопоставить семантику. Собственно говоря, эта семантика и была описана в предыдущей главе. Понятия истинности пропозициональной формулы (при той или иной оценке), тавтологии или семантического следования – всё это понятия семантические, в то время как аксиомы, правила вывода, теоремы и доказуемость – понятия синтаксические.

Итак, с одной стороны мы имеем синтаксис и понятие доказуемости, а с другой стороны – семантику и понятие семантического следования. Эта картина является типичной для математической логики, и обычной в этих случаях является так называемая *теорема о полноте*, которая утверждает, что синтаксическое следование (то есть доказуемость) и семантическое следование совпадают как операции, определённые на множестве всех формул. В нашем случае эта теорема будет выглядеть следующим образом.

### **Теорема о полноте классического исчисления высказываний**

*Для любых пропозициональных формулы  $\varphi$  и множества пропозициональных формул  $\Gamma$  выполнено:  $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow \Gamma \models \varphi$ .*

Если в этой теореме в качестве множества  $\Gamma$  взять пустое множество формул, то получится так называемая *слабая форма* теоремы о полноте, которая утверждает:

*Теоремами классического исчисления высказываний являются те и только те формулы, которые представляют собой тавтологии.*

Теорема о полноте классического исчисления высказываний, по существу, подтверждает то обстоятельство, что аксиомы и правила вывода этого исчисления подобраны правильно. Доказательство этой теоремы можно найти в [ 8 ], доказательство её слабой формы при-

водится в [ 1 ], здесь же мы рассмотрим только наиболее простую часть последнего доказательства.

Теорема о полноте классического исчисления высказываний в слабой форме может быть разбита на две части:

- 1) *Всякая теорема классического исчисления высказываний является тавтологией (если  $\vdash \varphi$ , то  $\models \varphi$ );*
- 2) *Всякая тавтология является теоремой классического исчисления высказываний (если  $\models \varphi$ , то  $\vdash \varphi$ ).*

Доказательство второй части требует развитой техники формального вывода и здесь не рассматривается. В то же время, для доказательства первой части достаточно двух вспомогательных лемм.

**Лемма 1.** *Каждая аксиома классического исчисления высказываний является тавтологией.*

То, что все десять формул, определяющие аксиомы классического исчисления высказываний, представляют собой тавтологии, можно непосредственно проверить. В силу леммы 2 а) из § 6 любой подстановочный пример тавтологии также является тавтологией. Таким образом, все аксиомы – это тавтологии, и лемма 1 доказана.

**Лемма 2.** *Если формулы  $\varphi$  и  $\varphi \supset \psi$  – тавтологии, то и формула  $\psi$  тоже тавтология.*

В самом деле, предположим, что формулы  $\varphi$  и  $\varphi \supset \psi$  являются тавтологиями, но формула  $\psi$  тавтологией не является. Тогда существует оценка  $v \in V$  такая, что  $\psi(v) = л$ . Поскольку  $\varphi$  – это тавтология, то  $\varphi(v) = и$ . Но тогда формула  $\varphi \supset \psi$  при оценке  $v$  оказывается ложной и потому не может быть тавтологией. Полученное противоречие и доказывает лемму 2.

Таким образом, в классическом исчислении высказываний из тавтологий можно выводить только тавтологии, и поскольку все аксиомы являются тавтологиями, то и все теоремы также являются тавтологиями. Первая часть теоремы доказана.

## Глава 3

## АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

## § 12. Операции над множествами

Понятие множества является исходным неопределяемым понятием: множеством считается всякая совокупность каких-либо элементов. Символы  $\in$  и  $\subseteq$  отношений принадлежности и включения имеют свой обычный смысл:

$x \in A$  означает, что элемент  $x$  принадлежит множеству  $A$  ;  
 $A \subseteq B$  означает, что множество  $A$  включено в множество  $B$  :

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

(перечеркнутый символ отношения принадлежности или включения означает, что соответствующее отношение не выполнено).

Обычным образом понимаются и схемы образования множеств:  $\{x \mid P(x)\}$  обозначает множество всех тех элементов  $x$ , для которых выполнено условие  $P(x)$ ;  $\{x \in X \mid P(x)\}$  обозначает множество всех тех принадлежащих множеству  $X$  элементов  $x$ , для которых выполнено условие  $P(x)$ .

Два множества  $A$  и  $B$  называются *равными*, если  $A \subseteq B$  и  $B \subseteq A$ . Таким образом, равные множества состоят из одних и тех же элементов :

$$A = B \Leftrightarrow \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B).$$

Наряду с отношением включения  $\subseteq$  часто используется также и *строгое* отношение включения  $\subset$ , которое определяется следующим образом :

$$A \subset B \Leftrightarrow A \subseteq B \text{ и } A \neq B.$$

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом  $\emptyset$  :

$$A = \emptyset \Leftrightarrow \forall x (x \notin A).$$

Для произвольных множеств  $A$  и  $B$  определены их *пересечение*, *объединение*, *разность* и *симметрическая разность*:

$$\begin{aligned} A \cap B &\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\} \quad (\text{пересечение}), \\ A \cup B &\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\} \quad (\text{объединение}), \\ A \setminus B &\Leftrightarrow \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\} \quad (\text{разность}), \\ A \div B &\Leftrightarrow (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (\text{симметрическая разность}). \end{aligned}$$

Чаще всего в качестве множеств, над которыми выполняются эти операции, выступают подмножества какого-то одного исходного множества  $M$  (это множество в таком случае называют *универсальным* множеством; даже если это множество изначально не задано, его легко образовать, взяв объединение всех тех множеств, которые участвуют в данном рассмотрении). Если имеется такое исходное множество  $M$ , то к описанным операциям может быть добавлена еще одна: *дополнение*. Дополнением множества  $A \subseteq M$  называется множество  $\bar{A} \Leftrightarrow M \setminus A$ . Таким образом, к четырем записанным выше строкам можно добавить еще и такую:

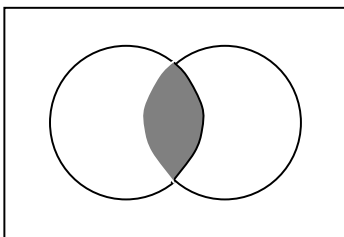
$$\bar{A} = \{x \in M \mid x \notin A\} \quad (\text{дополнение}).$$

Пусть  $M$  – произвольное множество. Множество всех его подмножеств обозначается через  $P(M)$ :

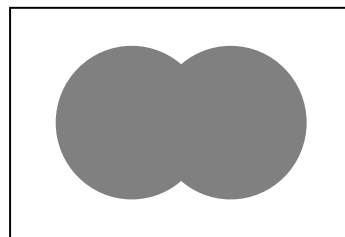
$$P(M) \Leftrightarrow \{X \mid X \subseteq M\}.$$

На множестве  $P(M)$  определены описанные операции: пересечение, объединение, дополнение, разность и симметрическая разность. Говорят, что  $P(M)$  вместе с этими операциями представляет собой *алгебру подмножеств* множества  $M$ .

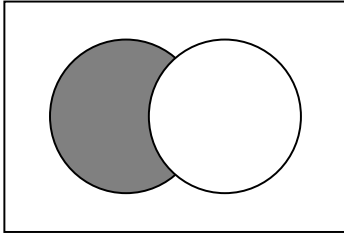
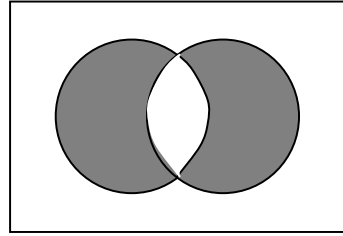
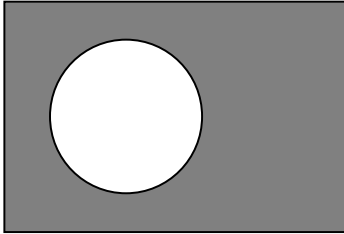
Если множество  $M$  представить как множество всех точек, принадлежащих прямоугольнику на плоскости, то рассмотренным операциям будут естественно соответствовать следующие иллюстрации:



Пересечение  $A \cap B$



Объединение  $A \cup B$

Разность  $A \setminus B$ Симметрическая  
разность  $A \div B$ Дополнение  $\bar{A}$ 

Для удобства в записях договоримся использовать в дальнейшем для обозначения пустого множества наряду с символом  $\emptyset$  также символ  $0$ , а для обозначения универсального множества  $M$  – символ  $1$ .

### § 13. Универсальные выражения и тождества

Пусть выбрано некоторое множество  $M$ , объявленное универсальным. Тогда из множеств  $A, B, C, \dots$  (представляющих собой подмножества универсального множества  $M$ ) при помощи операций, определенных в предыдущем параграфе, можно получать новые множества, например:

$$\begin{aligned} & (A \cup B) \setminus C, \\ & (\bar{A} \cup A) \cup ((\bar{B} \setminus C) \div \overline{A \cap B}), \\ & \overline{A \setminus A}, \\ & ((1 \setminus A) \cap B) \div (C \cup 0). \end{aligned}$$

Каждая из этих четырех записей представляет собой *выражение*. Символы  $0$  и  $1$  в последнем выражении (как и было объявлено в конце предыдущего параграфа) служат обозначениями пустого и универсального множеств. Буквы  $A, B, C, \dots$ , входящие в состав выражений, можно рассматривать как *переменные*, значениями которых являются множества: если значения переменных зафиксировать, то и каждое выражение также определяет некоторое множество.

Какое множество определяет первое из рассмотренных выражений, очевидно, зависит от того, какие множества сопоставлены его переменным; то же самое можно сказать и о последнем выражении. Но второе и третье выражения всегда (какие бы множества ни взять для сопоставления его переменным) определяют универсальное множество  $M$ . Такие выражения, которые независимо от значений своих переменных (и независимо от того, каково универсальное множество  $M$ ) всегда определяют универсальное множество  $M$ , мы будем называть *универсальными выражениями*.

Равенство двух выражений называется *тождеством* (или *тождественно истинным равенством*), если при любом выборе универсального множества  $M$  и при любых значениях переменных эти выражения определяют равные множества. Так например, равенство  $A \cup A = A \cap A$  является тождеством, в то время как равенство  $A \cup A = A \cap B$  тождеством не является.

Буквами  $p, q$  мы будем обозначать произвольные выражения, и, соответственно, равенство  $p = q$  может являться (или не являться) тождеством.

**Теорема.** *Равенство  $p = q$  является тождеством в том и только в том случае, когда выражение  $\overline{p - q}$  является универсальным.*

Доказательство. Из определения операции *симметрическая разность* легко получить следующее свойство этой операции:

$$A \div A = \emptyset \Leftrightarrow A = A.$$

Отсюда и из определения операции *дополнение* вытекает, что

$$\overline{A - A} = M \Leftrightarrow A = A.$$

Это соотношение делает утверждение теоремы очевидным.

## § 14. Тождественные преобразования выражений

**Лемма 1.** Следующие равенства представляют собой тождества:

- |  |  |
|--|--|
| (a2) $A \cap A = A$  | (a1) $\overline{\overline{A}} = A$                           |
| (a4) $A \cap B = B \cap A$                                   | (a3) $A \cup A = A$  |
| (a6) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$                 | (a5) $A \cup B = B \cup A$                                   |
| (a8) $A \cap (A \cup B) = A$                                 | (a7) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$                 |
| (a10) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$       | (a9) $A \cup (A \cap B) = A$                                 |
| (a12) $A \cap (B \cup \overline{B}) = A$                     | (a11) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$       |
| (a14) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$            | (a13) $A \cup (B \cap \overline{B}) = A$                     |
| (a16) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ | (a15) $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$            |
|  | (a17) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ |

Эти тождества могут быть доказаны исходя непосредственно из определений операций. Рассмотрим, например, доказательство тождества (a16).

Требуется доказать, что для произвольных множеств  $A, B$  и для всякого элемента  $x$  верно:  $x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Пусть  $x \in \overline{A \cap B}$ . Это значит, что  $x \in M$  и  $x \notin A \cap B$ . Отсюда следует, что  $x \notin A$  или  $x \notin B$ . Если  $x \notin A$ , то  $x \in \overline{A}$  и, следовательно,  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ . Если  $x \notin B$ , то  $x \in \overline{B}$ , и точно так же  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ . Этим доказано, что  $x \in \overline{A \cap B} \Rightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ .

Пусть теперь  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ . Если  $x \in \overline{A}$ , то  $x \in M$  и  $x \notin A$  и, следовательно,  $x \notin A \cap B$ , а поэтому  $x \in \overline{A \cap B}$ . Если  $x \in \overline{B}$ , то  $x \in M$  и  $x \notin B$  и, следовательно,  $x \notin A \cap B$ , а потому снова  $x \in \overline{A \cap B}$ . Этим доказано, что  $x \in \overline{A} \cup \overline{B} \Rightarrow x \in \overline{A \cap B}$ .

Таким образом, тождество (a16) доказано. Подобным же образом могут быть доказаны и другие тождества из леммы 1. Следует иметь в виду, однако, что более удобный способ устанавливать справедливость подобных тождеств будет описан в § 15.

Тождества (a1) – (a17) из данной леммы естественно сравнить с эквивалентностями (e1) – (e17) из леммы 1, рассмотренной в § 6. Если в тождествах (a1) – (a17) заменить символы операций *пересечение*, *объединение* и *дополнение* на пропозициональные связки *конъюнкция*, *дизъюнкция* и *отрицание* соответственно, а знак равенства заменить знаком эквивалентности, то получатся как раз соотношения (e1) – (e17) (замеченная связь между выражениями и пропозициональными формулами не является случайной, она ещё будет рассматриваться в § 16). Поскольку эквивалентности (e1) – (e17) использовались в главе 2 для выполнения *эквивалентных преобразований* над пропозициональными формулами, то естественно найти аналогичное применение и тождествам (a1) – (a17).

*Тождественными преобразованиями выражений* будем называть преобразования, переводящие выражения в тождественно равные выражения (два выражения *тождественно равны*, если соответствующее равенство является тождеством). Технику тождественных преобразований выражений можно развивать так же, как и технику эквивалентных преобразований пропозициональных формул. Следующая лемма подобна лемме 3 из § 6.

**Лемма 2.** *Для всякого выражения существует тождественно равное ему выражение, построенное из переменных только при помощи*

- а) операций пересечение и дополнение,*
- б) операций объединение и дополнение,*
- в) операций разность и дополнение,*
- г) универсального множества и операции разность,*
- д) универсального множества и операций пересечение и симметрическая разность,*
- е) универсального множества и операций объединение и симметрическая разность.*

Доказательство леммы (подобно рассмотренному в § 6 доказательству леммы 3) можно провести, выражая одни операции через другие. Исходное выражение может содержать все операции, определенные в § 12, а также константы 0, 1 (которые можно трактовать как *нульместные операции*). Однако некоторые из операций могут быть *выражены через другие* (и затем при помощи очевидных тождественных преобразований *исключены*):

а) операции *объединение, разность, симметрическая разность* и константы 0 и 1 можно выразить через операции *пересечение* и *дополнение* при помощи тождеств

$$(j1) \quad A \cup B = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}},$$

$$(j2) \quad A \setminus B = A \cap \overline{B},$$

$$(j3) \quad A \div B = \overline{A \cap \overline{B}},$$

$$(j4) \quad 0 = A \cap \overline{A},$$

$$(j5) \quad 1 = \overline{A \cap \overline{A}};$$

б) операции *пересечение, разность, симметрическая разность* и константы 0 и 1 можно выразить через операции *объединение* и *дополнение* при помощи тождеств

$$(j6) \quad A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}},$$



$$(j7) \quad A \setminus B = \overline{\overline{A} \cup B},$$

$$(j8) \quad A \div B = \overline{A \setminus B},$$

$$(j9) \quad 0 = \overline{A \cup \overline{A}},$$

$$(j10) \quad 1 = A \cup \overline{A};$$

в) операции *пересечение*, *объединение*, *симметрическая разность* и константы 0 и 1 можно выразить через операции *разность* и *дополнение* при помощи тождеств

$$(j11) \quad A \cap B = A \setminus \overline{B},$$

$$(j12) \quad A \cup B = \overline{\overline{A} \setminus B},$$

$$(j13) \quad A \div B = \overline{A \setminus B},$$

$$(j14) \quad 0 = A \setminus A,$$

$$(j15) \quad 1 = \overline{A \setminus A};$$

г) операции *пересечение*, *объединение*, *симметрическая разность*, *дополнение* и константу 0 можно выразить через константу 1 и операцию *разность* при помощи тождеств

$$(j16) \quad A \cap B = A \setminus (A \setminus B),$$

$$(j17) \quad A \cup B = 1 \setminus ((1 \setminus A) \setminus B),$$

$$(j18) \quad A \div B = 1 \setminus ((1 \setminus A) \setminus B) \setminus (A \setminus (A \setminus B)),$$

$$(j19) \quad \overline{A} = 1 \setminus A,$$

$$(j20) \quad 0 = \overline{1};$$

д) операции *объединение*, *разность*, *дополнение* и константу 0 можно выразить через операции *пересечение*, *симметрическая разность* и константу 1 при помощи тождеств

$$(j21) \quad A \cup B = (A \div B) \div (A \cap B),$$

$$(j22) \quad A \setminus B = A \div (A \cap B),$$

$$(j23) \quad \overline{A} = 1 \div A,$$

$$(j24) \quad 0 = A \div A;$$

е) операции *пересечение* и *разность* можно выразить через операции *объединение* и *симметрическая разность* при помощи тождеств

$$(j25) \quad A \cap B = (A \cup B) \div (A \div B),$$

$$(j26) \quad A \setminus B = (A \cup B) \div B.$$

Эти тождества вместе с тождествами (j23) – (j24) доказывают утверждение e). Этим доказательство леммы закончено.

Разницу в свойствах операций *разность* и *симметрическая разность* подчеркивает следующая

**Лемма 3.** а) Для любых множеств  $A, B, C$

$$(s1) \quad A \div B = B \div A ,$$

$$(s2) \quad (A \div B) \div C = A \div (B \div C) .$$

б) Для некоторых множеств  $A, B, C$

$$(r1) \quad A \setminus B \neq B \setminus A ,$$

$$(r2) \quad (A \setminus B) \setminus C \neq A \setminus (B \setminus C) .$$

Лемма 3 утверждает, что равенства (s1) и (s2) являются тождествами, в то время как подобные равенства, отвечающие соотношениям (r1) и (r2), тождествами не являются. Это значит, что операция *симметрическая разность* обладает свойствами *коммутативности* и *ассоциативности*, в то время как операция *разность* этими свойствами не обладает. В этой связи можно заметить, что для операций *пересечение* и *объединение* свойство коммутативности вытекает из тождеств (a4) и (a5), а свойство ассоциативности – из тождеств (a6) и (a7). Доказать справедливость тождеств (s1) и (s2) можно при помощи рассуждений, подобных тем, которые применялись при доказательстве леммы 1 (удобнее, однако, воспользоваться методом, который будет описан ниже в § 33). Доказать же соотношения (r1) и (r2) – то есть доказать, что соответствующие равенства опровергаются – можно, указав конкретные множества  $A, B$  и  $C$ . Так, для соотношения (r1) подойдут в качестве  $A$  пустое множество и в качестве  $B$  универсальное множество, а в соотношении (r2) достаточно каждой переменной сопоставить универсальное множество.

## § 15. Формальный язык и семантика для алгебры множеств

Рассмотрение выражений (которые могут быть универсальными) и равенств (которые могут быть тождествами) может быть переведено на более точный и формальный уровень. Для этого должен быть опи-

сан формальный язык алгебры множеств (подобно тому, как в § 8 был описан формальный язык логики высказываний).

Алфавит формального языка алгебры множеств состоит из

пяти символов операций алгебры множеств :  $\bar{\phantom{x}} \cap \cup \setminus \div$  ,  
 двух скобок (левой и правой) :  $( )$  ,  
 двух символов-констант :  $0 \ 1$   
 и бесконечного числа переменных .

Переменными (которые необходимы для обозначения множеств) являются заглавные буквы латинского алфавита и такие же буквы с числовыми индексами (таким образом, эти переменные выглядят так же, как и пропозициональные переменные, описанные в § 8).

Формальное определение *выражения* (аналогичное определению пропозициональной формулы из § 8) содержит следующие пункты:

- (1) *каждый символ-константа есть выражение* ,
- (2) *всякая переменная есть выражение* ,
- (3) *если  $p$  и  $q$  – выражения, то*  
 $\bar{p}$  ,  $(p \cap q)$  ,  $(p \cup q)$  ,  $(p \setminus q)$  ,  $(p \div q)$  – *тоже выражения* .

Разумеется, здесь предполагается, что никаких других выражений, кроме определяемых пунктами (1) – (3), в данном формальном языке нет. Следует заметить, что третий пункт этого определения содержит некоторую вольность, поскольку выражение, имеющее черту сверху, формально словом не является. Этой коллизии легко избежать, поставив знак операции *дополнение* впереди соответствующего выражения, однако мы, следуя определенной традиции, оставим черту сверху. При записи выражений мы будем позволять себе (подобно тому, как мы это делали при записи пропозициональных формул) опускать некоторые скобки из тех, которые очевидным образом восстанавливаются (например, внешние окаймляющие).

Для того, чтобы формально определить равенство выражений, достаточно к алфавиту формального языка добавить символ  $=$  и объявить *равенством выражений* слово  $p = q$  .

Для того, чтобы определить семантику описанного формального языка, рассмотрим произвольное множество  $M$  и алгебру всех его подмножеств  $P(M)$  . *Оценкой  $v$  в алгебре подмножеств множества  $M$*  назовем всякое отображение множества  $\{A, B, C, \dots\}$  всех переменных языка в множество  $P(M)$  . Таким образом, оценка  $v$  ставит в соответствие каждой переменной какое-нибудь подмножество множества  $M$  . Множество всех оценок в алгебре подмножеств множества  $M$  обозначим через  $V(M)$  . Для всякого выражения  $p$  и любой оценки

$v \in V(M)$  естественным образом определено значение  $p(v)$  выражения  $p$  при оценке  $v$ , которое представляет собой элемент множества  $P(M)$ , то есть является подмножеством множества  $M$  (это значение вычисляется по правилам, описанным в § 12 и § 13). Таким образом, в соответствии с определениями из предыдущего параграфа

выражение  $p$  является универсальным  $\Leftrightarrow \forall M \neq \emptyset \forall v \in V(M) (p(v) = 1)$ ;  
 равенство  $p = q$  является тождеством  $\Leftrightarrow \forall M \neq \emptyset \forall v \in V(M) (p(v) = q(v))$ .

В соответствии с этими соотношениями для проверки, является ли данное выражение универсальным или является ли данное равенство тождеством, следует перебирать всевозможные множества  $M$ , выясняя как ведут себя данные выражение или равенство в соответствующей алгебре  $P(M)$ . Между тем, на самом деле достаточно в качестве  $M$  рассмотреть только одно непустое множество (и притом всё равно какое). Лучше всего в качестве  $M$  взять множество, состоящее из единственного элемента. Об этом подробно рассказано в главе 4 пособия [ 1 ], здесь же мы рассмотрим без доказательства только одну теорему, которая определяет алгоритм распознавания универсальных выражений и тождеств. Через  $M_0$  обозначаем одноэлементное множество.

**Теорема.** Для любых выражений  $p$  и  $q$  выполнено

- а) выражение  $p$  является универсальным  $\Leftrightarrow \forall v \in V(M_0) (p(v) = 1)$ ;  
 б) равенство  $p = q$  является тождеством  $\Leftrightarrow \forall v \in V(M_0) (p(v) = q(v))$ .

Для одноэлементного множества  $M_0$  алгебра его подмножеств  $P(M_0)$  состоит только из двух элементов  $0$  (пустое множество) и  $1$  (само множество  $M_0$ ). Поэтому, в силу рассмотренной теоремы, чтобы проверить, является ли данное выражение универсальным или является ли данное равенство тождеством, нужно перебрать все ограниченные оценки в алгебре подмножеств множества  $M_0$  (которых конечное число). Эта процедура проверки подобна процедуре распознавания тавтологий (применявшейся в главе 1), в основе которой лежит метод истинностных таблиц. При распознавании тавтологий основу всех вычислений составляли таблицы истинности, определяющие смысл основных пропозициональных связок. Точно так же при проверке универсальности выражения или справедливости тождества основу вычислений должны составить следующие таблицы, определяющие действие операций *дополнение*, *пересечение*, *объединение*, *разность*, и *симметрическая разность* в самой простой алгебре множеств, содержащей только два элемента  $0$  и  $1$ :

$A$	$\bar{A}$
1	0
0	1

$A$	$B$	$A \cap B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

$A$	$B$	$A \cup B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$A$	$B$	$A \setminus B$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

$A$	$B$	$A \div B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Эти таблицы естественно сравнить с таблицами истинности из § 1 (первые три из рассмотренных таблиц превратятся в первые три таблицы из § 1, если  $A$  и  $B$  заменить на  $\varphi$  и  $\psi$ ,  $и$  и  $л$  заменить на 1 и 0, и, наконец, *дополнение*, *пересечение* и *объединение* заменить на *отрицание*, *конъюнкцию* и *дизъюнкцию* соответственно). Применение таблиц истинности для распознавания тавтологий уже было подробно описано в главе 1, аналогичное применение рассмотренных здесь таблиц позволяет таким же образом распознавать универсальные выражения и тождества.

## § 16. Выражения и пропозициональные формулы

Связь между выражениями и пропозициональными формулами, отмеченная еще в § 14, может быть описана более отчетливо. Если сравнить таблицы, рассмотренные в предыдущем параграфе, с таблицами истинности для пропозициональных связок, то станет очевидным следующее соответствие:

множество 0 – ложь  $\perp$  ,  
 множество 1 – истина  $\top$  ,  
 дополнение – отрицание ,  
 пересечение – конъюнкция ,  
 объединение – дизъюнкция ,  
 разность – отрицание импликации ,  
 симметрическая разность – отрицание эквивалентности .

Далее, имея в виду это принципиальное соответствие, мы определим два формальных перевода : перевод  $\gamma$  , переводящий выражения в пропозициональные формулы, и перевод  $\delta$  , переводящий пропозициональные формулы в выражения. Естественные теоремы об этих переводах и сделают связь между выражениями и пропозициональными формулами ясной и понятной.

Формальный перевод  $\gamma$  , сопоставляющий каждому выражению  $q$  пропозициональную формулу  $\gamma(q)$ , определяется следующим образом:

- 1)  $\gamma(0) \Leftrightarrow \perp$  ,  $\gamma(1) \Leftrightarrow \top$  ;
- 2) для всякой переменной  $P$   $\gamma(P) \Leftrightarrow P$  ;
- 3)  $\gamma(\bar{q}) \Leftrightarrow \neg \gamma(q)$  ,  
 $\gamma(q_1 \cap q_2) \Leftrightarrow \gamma(q_1) \& \gamma(q_2)$  ,  
 $\gamma(q_1 \cup q_2) \Leftrightarrow \gamma(q_1) \vee \gamma(q_2)$  ,  
 $\gamma(q_1 \setminus q_2) \Leftrightarrow \neg(\gamma(q_1) \supset \gamma(q_2))$  ,  
 $\gamma(q_1 \div q_2) \Leftrightarrow \neg(\gamma(q_1) \equiv \gamma(q_2))$  .

Пункты этого индуктивного определения следуют пунктам формального определения выражения из § 15. В связи с пунктом 2) данного определения следует иметь в виду, что множества переменных двух формальных языков (языка алгебры множеств и пропозиционального языка) совпадают.

### **Теорема 1.**

а) Выражение  $q$  является универсальным тогда и только тогда, когда пропозициональная формула  $\gamma(q)$  является тавтологией.

б) Равенство  $p = q$  является тождеством тогда и только тогда, когда пропозициональная формула  $\gamma(p) \equiv \gamma(q)$  является тавтологией.

Теперь определим формальный перевод  $\delta$ , сопоставляющий каждой пропозициональной формуле  $\varphi$  выражение  $\delta(\varphi)$ . Мы будем допускать возможность использования в записи формулы  $\varphi$  производных пропозициональных связок  $\perp$  (ложь),  $\top$  (истина) и  $\equiv$  (эквивалентность). Формальное определение перевода  $\delta$  таково:

- 1)  $\delta(\perp) \Leftrightarrow 0$ ,  $\delta(\top) \Leftrightarrow 1$ ;
- 2) для всякой переменной  $\Pi$   $\delta(\Pi) \Leftrightarrow \Pi$ ;
- 3)  $\delta(\neg\varphi) \Leftrightarrow \overline{\delta(\varphi)}$ ,  
 $\delta(\varphi_1 \& \varphi_2) \Leftrightarrow \delta(\varphi_1) \cap \delta(\varphi_2)$ ,  
 $\delta(\varphi_1 \vee \varphi_2) \Leftrightarrow \delta(\varphi_1) \cup \delta(\varphi_2)$ ,  
 $\delta(\varphi_1 \supset \varphi_2) \Leftrightarrow \overline{\delta(\varphi_1) \setminus \delta(\varphi_2)}$ ,  
 $\delta(\varphi_1 \equiv \varphi_2) \Leftrightarrow \overline{\delta(\varphi_1) \div \delta(\varphi_2)}$ .

### Теорема 2.

а) Пропозициональная формула  $\varphi$  является тавтологией тогда и только тогда, когда выражение  $\delta(\varphi)$  является универсальным.

б) Пропозициональная формула  $\varphi \equiv \psi$  является тавтологией тогда и только тогда, когда равенство  $\delta(\varphi) = \delta(\psi)$  является тождеством.

Доказательства теорем 1 и 2 легко получить, сравнив таблицы из § 1 и § 15 (подробно эти доказательства обсуждаются в [1]).

В заключение отметим, что рассмотренные переводы  $\gamma$  и  $\delta$  составляют примеры погружения одной формальной системы в другую (или интерпретации одного формального языка в другом). Подобные конструкции (часто встречающиеся в математической логике) помогают сводить задачи, поставленные для одной формальной системы, к задачам для другой формальной системы.

## Глава 4

## БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ

## § 17. Универсальные алгебры

*Прямое (декартовое) произведение* множеств  $A$  и  $B$  называется множеством  $A \times B$ , состоящее из всевозможных пар  $(a, b)$ , где  $a \in A$  и  $b \in B$ , то есть

$$A \times B \Leftrightarrow \{ (a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B \}.$$

*Прямой (декартовой) степенью* множества  $A$  называется прямое произведение множества  $A$  на множество  $A$ . *Вторая декартова степень* множества  $A$  определяется следующим соотношением:

$$A^2 \Leftrightarrow A \times A, \text{ то есть, } A^2 = \{ (a_1, a_2) \mid a_1, a_2 \in A \}.$$

Подобным же образом можно определить  $k$ -тую декартову степень множества  $A$ :

$$A^k = \{ (a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_1, a_2, \dots, a_k \in A \}.$$

*Операцией на множестве  $A$  местности  $k$  ( $k$ -местной операцией)* называется всякое отображение  $f: A^k \rightarrow A$ , ставящее в соответствие каждому упорядоченному набору  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  из  $k$  элементов множества  $A$  снова элемент множества  $A$ . Этот элемент обозначается  $f(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , а в обозначении самой операции  $f$  часто добавляется (в скобках) верхний индекс, указывающий её местность:  $f^{(k)}$ .

Значение индекса  $k$  может быть равно единице, в этом случае  $f$  является *одноместной* операцией. Поскольку  $A^1$  совпадает с  $A$ , то одноместная операция  $f^{(1)}$  представляет собой отображение множества  $A$  в множество  $A$ . Если значение индекса  $k$  равно двум, то соответствующая *двуместная* (или *бинарная*) операция  $f^{(2)}$  является отображением множества  $A^2$  в множество  $A$ .

Операцию  $f^{(k)}$  можно рассматривать как функцию, зависящую от  $k$  аргументов: эти аргументы принимают всевозможные значения из множества  $A$  и значениями функции  $f^{(k)}$  тоже являются элементы множества  $A$ . Функция, принимающая всегда одно и то же значение, называется *константой*. Значение такой функции не зависит от зна-



чений каких бы то ни было аргументов, а потому можно считать, что число её аргументов равно нулю. В этой связи естественно допускать в качестве значения индекса  $k$  и число ноль. Этому случаю отвечает нульместная операция  $f^{(0)}$ , которая представляет собой константу. Принято отождествлять эту постоянную функцию  $f^{(0)}$  с тем единственным значением, которое она принимает. Таким образом, константа  $f^{(0)}$  – это один элемент, выделенный в множестве  $A$ .

Множество  $A$  с определёнными на этом множестве операциями  $f_1^{(k_1)}, f_2^{(k_2)}, \dots, f_n^{(k_n)}$  называется *универсальной алгеброй сигнатуры*  $\langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle$ . Если обозначить эту алгебру через  $\tilde{A}$ , то можно записать:

$$\tilde{A} = \langle A, f_1^{(k_1)}, f_2^{(k_2)}, \dots, f_n^{(k_n)} \rangle.$$

Множество  $A$  называется *носителем* универсальной алгебры  $\tilde{A}$ . Часто в тех случаях, когда определённые на множестве  $A$  операции известны, обозначение  $\tilde{A}$  заменяется обозначением  $A$ , и, таким образом, универсальная алгебра отождествляется с её носителем. Сигнатура универсальной алгебры указывает, сколько операций и какой именно местности в ней определены. Иногда, задавая сигнатуру, записывают не только значения  $k_1, k_2, \dots, k_n$ , но и символы, обозначающие соответствующие операции.

В математическом обиходе встречается огромное множество примеров универсальных алгебр. Так, множество натуральных чисел с операциями сложение и умножение представляет собой универсальную алгебру сигнатуры  $\langle 2, 2 \rangle$ , множество квадратных матриц порядка  $n$  с операциями транспонирование и сложение является универсальной алгеброй сигнатуры  $\langle 1, 2 \rangle$ , множество геометрических векторов с нулевым вектором, сложением и векторным произведением представляет собой универсальную алгебру сигнатуры  $\langle 0, 2, 2 \rangle$ , и так далее. Заметим, что в каждом из выше приведённых примеров для записи двуместной операции сложения вместо символа  $f^{(2)}$  используется знак  $+$  и результат сложения элементов  $a$  и  $b$  записывается не в виде  $f(a, b)$ , а более удобно:  $a + b$ . Подобным же образом дело обстоит и с другими примерами универсальных алгебр: для обозначения и записи их операций обыкновенно выбирают наиболее удобные способы (что, разумеется, не меняет дела по существу).

Алгебра подмножеств множества  $M$ , введённая в § 12, тоже представляет собой пример универсальной алгебры. В самом деле, если в качестве носителя универсальной алгебры выбрать множество  $P(M)$  всех подмножеств некоторого множества  $M$ , то на этом носителе окажутся определены следующие операции, описанные в § 12 (их называют *теоретико-множественными операциями*): две нульместные

операции (константы) 0 и 1, одноместная операция *дополнение*  $\bar{\phantom{x}}$  и четыре двуместные операции – *пересечение*  $\cap$ , *объединение*  $\cup$ , *разность*  $\setminus$  и *симметрическая разность*  $\div$ . Таким образом, множество  $P(M)$  с этими операциями представляет собой универсальную алгебру сигнатуры  $\langle 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2 \rangle$ . Между тем, среди теоретико-множественных операций удобно выделить как основные следующие три: *дополнение*, *пересечение* и *объединение*. Как утверждает лемма 2 из § 14, через эти операции могут быть выражены все другие теоретико-множественные операции. В этой связи алгебру подмножеств множества  $M$  чаще рассматривают как алгебру именно с этими тремя операциями, то есть, как универсальную алгебру сигнатуры  $\langle 1, 2, 2 \rangle$ .

## § 18. Аксиомы булевой алгебры

Итак, алгебра подмножеств множества  $M$  представляет собой множество  $P(M)$  всех подмножеств множества  $M$  с операциями *дополнение*  $\bar{\phantom{x}}$ , *пересечение*  $\cap$ , *объединение*. Как утверждает лемма 1 из § 15, эти операции обладают свойствами (a1) – (a17).

Пусть имеется произвольное непустое множество  $A$ , и пусть на этом множестве каким-либо образом определены одна одноместная и две двуместные операции, которые обозначены теми же символами, что и *дополнение*, *пересечение*, *объединение*. Если эти операции обладают свойствами (a1) – (a17), то множество  $A$  вместе с рассматриваемыми операциями называется *булевой алгеброй*. В совокупности свойств (a1) – (a17) можно выделить ядро, состоящее из соотношений (a4) – (a13), из которого вытекают все остальные свойства данной совокупности. Поэтому булеву алгебру

$$\alpha = \langle A, \bar{\phantom{x}}, \cap, \cup \rangle$$

можно определить как множество  $A$  вместе с тремя такими определенными на этом множестве операциями, для которых выполнены требования (a4) – (a13). Таким образом, в силу этого определения булевой алгеброй является всякая универсальная алгебра  $\alpha$  сигнатуры  $\langle 1, 2, 2 \rangle$ , для которой выполнены условия (a4) – (a13). Это означает, что соотношения (a4) – (a13) представляют собой *аксиомы булевой алгебры*. Выпишем ещё раз эти аксиомы, пронумеровав их заново и обозначая через  $x, y, z$  произвольные элементы из множества  $A$ :

- |   |   |
|---|---|
| (b1) $x \cap y = y \cap x$                            | (b2) $x \cup y = y \cup x$                            |
| (b3) $(x \cap y) \cap z = x \cap (y \cap z)$          | (b4) $(x \cup y) \cup z = x \cup (y \cup z)$          |
| (b5) $x \cap (x \cup y) = x$                          | (b6) $x \cup (x \cap y) = x$                          |
| (b7) $x \cap (y \cup z) = (x \cap y) \cup (x \cap z)$ | (b8) $x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap (x \cup z)$ |
| (b9) $x \cap (y \cup \bar{y}) = x$                    | (b10) $x \cup (y \cap \bar{y}) = x$                   |

Хотя не все аксиомы из этого списка независимы (некоторые из них выводятся из остальных), он удобен тем, что отчетливо указывает свойства, которыми должны обладать операции булевой алгебры. Так, аксиомы (b1) и (b2) требуют от операций пересечение и объединение *коммутативности*, аксиомы (b3) и (b4) – *ассоциативности*, аксиомы (b5) и (b6) постулируют *законы поглощения*, а аксиомы (b7) и (b8) – свойства *дистрибутивности*. Аксиомы (b9) и (b10) не только описывают свойства операции дополнение, но и определяют существование нуля и единицы. В самом деле, из аксиом (b1) и (b9) вытекает, что все элементы вида  $(y \cup \bar{y})$  равны между собой и потому можно определить *единицу булевой алгебры* соотношением  $1 \Leftrightarrow (y \cup \bar{y})$ . Подобным же образом, из аксиом (b2) и (b10) вытекает, что все элементы вида  $(y \cap \bar{y})$  также равны между собой и потому можно определить *ноль булевой алгебры* соотношением  $0 \Leftrightarrow (y \cap \bar{y})$ . Таким образом, ноль и единица булевой алгебры оказываются нульместными производными операциями. Ещё две производные операции в булевой алгебре можно определить соотношениями из алгебры множеств:

$$x \setminus y \Leftrightarrow x \cap \bar{y} \quad \text{и} \quad x \div y \Leftrightarrow (x \setminus y) \cup (y \setminus x).$$

Другие две производные операции в булевой алгебре можно определить соотношениями из логики высказываний:

$$x \supset y \Leftrightarrow \bar{x} \cup y \quad \text{и} \quad x \equiv y \Leftrightarrow (x \supset y) \cap (y \supset x).$$

Следует отметить, что константы 0 и 1 часто включают в сигнатуру булевой алгебры. Это значит, что булеву алгебру определяют как универсальную алгебру сигнатуры  $\langle 0, \cup, \cap, \bar{\phantom{x}}, \setminus, \div, \supset, \equiv \rangle$ , в которой вместе с операциями *дополнение*, *пересечение* и *объединение* заданы ещё и нульместные операции 0 и 1. Аксиомами в этом случае служат соотношения (b1)–(b8) вместе с двумя следующими, заменяющими прежние (b9) и (b10):

$$(b9^\circ) \quad x \cap \bar{x} = 0 \quad \text{и} \quad (b10^\circ) \quad y \cup \bar{y} = 1.$$

Очевидно, что алгебра подмножеств множества  $M$  с носителем  $P(M)$  представляет собой пример булевой алгебры. Это *булева алгебра множеств*. Наиболее простая булева алгебра – это двухэлементная булева алгебра  $\alpha_0$ , которая может быть представлена как алгебра подмножеств одноэлементного множества  $M_0$ . Эта алгебра содержит два элемента:  $0$  (пустое множество) и  $1$  (само множество  $M_0$ ). Как именно определены булевы операции в этой алгебре, можно видеть из таблиц, приведённых в конце § 15. Элементы алгебры  $\alpha_0$  могут быть интерпретированы и как истинностные значения:  $1$  соответствует значению *и* (истина), а  $0$  – значению *л* (ложь).

Тривиальную алгебру, состоящую из одного элемента, обычно к числу булевых алгебр не относят, поскольку для булевой алгебры считается естественным соотношение  $0 \neq 1$ .

## § 19. Булева семантика для выражений и тождеств

В § 15 был описан формальный язык алгебры множеств. Теперь, изучая произвольные булевы алгебры, мы вполне можем пользоваться этим языком (с поправкой только на обозначение переменных: вместо  $A, B, C, \dots$  мы теперь пишем  $x, y, z, \dots$ ).

Напомним, что оценкой в булевой алгебре подмножеств множества  $M$  является всякое отображение множества всех переменных в множество  $P(M)$ . Множество всех таких оценок было обозначено через  $V(M)$ . *Оценкой в булевой алгебре  $\alpha$*  назовем всякое отображение множества всех переменных в множество  $A$  (*носитель* булевой алгебры  $\alpha$ ). Такая оценка сопоставляет каждой переменной определённый элемент булевой алгебры  $\alpha$ . Множество всех оценок в булевой алгебре  $\alpha$  обозначим через  $V(\alpha)$ . Если имеется некоторое выражение  $p$  (зависящее от переменных  $x, y, z, \dots$ ) и некоторая оценка  $v$  из множества  $V(\alpha)$ , то очевидным образом может быть вычислено значение  $p(v)$  выражения  $p$  при оценке  $v$ . Это значение будет представлять собой элемент булевой алгебры  $\alpha$ .

Напомним, что в соответствии с определениями из § 14

выражение  $p$  является универсальным  $\Leftrightarrow \forall M \neq \emptyset \forall v \in V(M) (p(v) = 1)$ ,  
 равенство  $p = q$  является тождеством  $\Leftrightarrow \forall M \neq \emptyset \forall v \in V(M) (p(v) = q(v))$ .

Таким образом, для этих определений важны значения выражений при всевозможных оценках в булевых алгебрах множеств. Между тем, если в соответствующих соотношениях булевы алгебры множеств

заменить произвольными булевыми алгебрами, то определения по существу не изменятся – именно это утверждает теорема, рассмотренная ниже (через  $A$  в формулировке этой теоремы обозначен класс всех булевых алгебр).

**Теорема 1.** *Для любых выражений  $p$  и  $q$  выполнено*  
*а) выражение  $p$  является универсальным  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in A \forall v \in V(\alpha)$*   
 *$(p(v)=1)$ ,*  
*б) равенство  $p=q$  является тождеством  $\Leftrightarrow \forall \alpha \in A \forall v \in V(\alpha)$*   
 *$(p(v)=q(v))$ .*

Доказательство этой теоремы здесь не рассматривается (его можно найти, например, в книге [ 9 ] ). Между тем, для того, чтобы определить, является ли выражение универсальным или является ли равенство двух выражений тождеством, не нужно перебирать все булевы алгебры, но достаточно взять одну, любую из них:

**Теорема 2.** *Для любых выражений  $p, q$  и произвольной булевой алгебры  $\alpha$  выполнено*  
*а) выражение  $p$  является универсальным  $\Leftrightarrow \forall v \in V(\alpha) (p(v) = 1)$ ,*  
*б) равенство  $p=q$  является тождеством  $\Leftrightarrow \forall v \in V(\alpha) (p(v) = q(v))$ .*

Эта теорема является следствием предыдущей теоремы 1 и теоремы из § 15, которую мы переформулируем в следующем виде:

**Теорема 3.** *Для любых выражений  $p$  и  $q$  выполнено*  
*а) выражение  $p$  является универсальным  $\Leftrightarrow \forall v \in V(\alpha_0) (p(v) = 1)$ ,*  
*б) равенство  $p=q$  является тождеством  $\Leftrightarrow \forall v \in V(\alpha_0) (p(v) = q(v))$ .*

Последняя теорема утверждает: для того, чтобы определить, является ли выражение универсальным или является ли равенство двух выражений тождеством, достаточно только проверить их на самой простой двухэлементной булевой алгебре. О том, что такую процедуру проверки всегда возможно практически осуществить, подробнее говорилось в конце § 15.

## § 20. Отношение порядка

Отношением  $\rho$  на множестве  $A$  называется всякое подмножество множества  $A^2 = A \times A$ . Таким образом,  $\rho$  представляет собой некоторое множество упорядоченных пар  $(x, y)$ , состоящих из элементов  $x, y \in A$ . В случае, когда  $(x, y) \in \rho$ , обычно пишут  $x \rho y$  и говорят, что для элементов  $x$  и  $y$  выполнено отношение  $\rho$ .

Строго говоря, определённое таким образом на множестве  $A$  отношение  $\rho$  является *двуместным* отношением. Помимо двуместных отношений на множестве  $A$  могут быть определены  $k$ -местные отношения как подмножества множества  $A^k$  (такие отношения фактически уже рассматривались в § 7 при определении правил вывода формального исчисления). Однако, поскольку теперь мы будем иметь дело только с двуместными отношениями, то прилагательное «двуместное» допустимо опускать.

В математическом обиходе встречаются самые разные отношения, однако, наиболее употребительным представляется отношение порядка, которое и рассматривается в настоящем параграфе. С этим отношением связаны привычные обозначения, одно из которых мы и будем использовать: вместо символа  $\rho$  будем писать символ  $\leq$  и запись  $x \leq y$  будем читать « $x$  меньше или равно  $y$ ». Перейдём теперь к соответствующим определениям.

Отношение  $\leq$  на множестве  $A$  называется отношением *частичного порядка*, если для любых элементов  $x, y, z \in A$  выполнены следующие требования:

- |      |  |                       |
|------|--|-----------------------|
| (p1) | $x \leq x$                                   | (рефлексивность),     |
| (p2) | $x \leq y$ и $y \leq x \Rightarrow x = y$    | (антисимметричность), |
| (p3) | $x \leq y$ и $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ | (транзитивность).     |

Множество  $A$  с определённым на этом множестве отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством*. Соотношения (p1) – (p3) называют *аксиомами частичного порядка*. Если к этим трём аксиомам добавить четвертую

- |      |                           |               |
|------|---------------------------|---------------|
| (p4) | $x \leq y$ или $y \leq x$ | (линейность), |
|------|---------------------------|---------------|

то получится список аксиом *линейного порядка* (соответствующее множество называется *линейно упорядоченным*).

Легко проверить, что множество натуральных чисел, множество целых чисел, множество рациональных чисел, множество действительных чисел с естественным отношением порядка представляют собой линейно упорядоченные множества.

С другой стороны, множество  $P(M)$  всех подмножеств множества  $M$  с отношением включения  $\subseteq$  является частично упорядоченным,

но, если множество  $M$  содержит больше одного элемента, уже не является линейно упорядоченным.

Последний пример показывает, что у булевой алгебры подмножеств множества  $M$  помимо булевых операций имеется ещё и отношение частичного порядка  $\subseteq$ . Между тем, отношение частичного порядка с аналогичными свойствами может быть определено и для произвольной булевой алгебры  $\alpha$  следующим образом: для любых элементов  $x$  и  $y$  алгебры  $\alpha$  отношение  $x \leq y$  считается выполненным в том случае, когда  $x \cap y = x$ , то есть

$$x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x.$$

Можно проверить, что это отношение для любой булевой алгебры будет отношением частичного порядка (а для двухэлементной булевой алгебры  $\alpha_0$  оно будет также и отношением линейного порядка). Можно также установить, что

$$x \leq y \Leftrightarrow x \cup y = y.$$

Легко видеть, что в булевой алгебре подмножеств множества  $M$  так определённое отношение  $\leq$  окажется в точности отношением включения  $\subseteq$ .

Пусть теперь  $A$  – произвольное частично упорядоченное множество и  $x$  – некоторый его элемент, тогда

элемент  $x$  называется *наименьшим*, если  $\forall y \in A (x \leq y)$ ;

элемент  $x$  называется *наибольшим*, если  $\forall y \in A (y \leq x)$ ;

элемент  $x$  называется *минимальным*, если  $\forall y \in A (y \leq x \Rightarrow y = x)$ ;

элемент  $x$  называется *максимальным*, если  $\forall y \in A (x \leq y \Rightarrow x = y)$ .

Легко установить, что в любой булевой алгебре имеются наименьший и наибольший элементы: наименьшим элементом является ноль этой алгебры, а наибольшим – единица.

Если булева алгебра имеет носителем множество  $A$ , то *атомами* этой алгебры называются минимальные элементы множества  $A \setminus \{0\}$ , то есть того множества, которое получается из множества  $A$  исключением нуля (частичный порядок на этом множестве очевидным образом сохраняется). Понятие атома булевой алгебры может быть определено и по-другому, при помощи отношения строгого неравенства  $<$ . Для любых элементов  $x$  и  $y$  произвольного частично упорядоченного множества  $A$  положим

$$x < y \Leftrightarrow (x \leq y \text{ и } x \neq y),$$

тогда элемент  $x$  булевой алгебры с носителем  $A$ , будет её *атомом*, если

$$\forall y \in A (y < x \Rightarrow y = 0).$$

Таким образом, атомами булевой алгебры являются те её элементы, меньше которых может быть только ноль этой алгебры. Не всякая булева алгебра имеет атомы. Булева алгебра, имеющая атомы, называется *атомной*, булева алгебра, не имеющая атомов, называется *безатомной*. Легко проверить, что булева алгебра всех подмножеств множества  $M$  является атомной: атомами этой алгебры служат одноэлементные подмножества множества  $M$ .

## § 21. Булевы решётки

Пусть  $B$  является подмножеством частично упорядоченного множества  $A$ . Элемент  $x \in A$  называется *нижней гранью множества  $B$* , если  $\forall y \in B (x \leq y)$ , элемент  $x \in A$  называется *верхней гранью множества  $B$* , если  $\forall y \in B (y \leq x)$ . Наибольшая нижняя грань множества  $B$  называется *точной нижней гранью множества  $B$*  (или *инфинумом множества  $B$* ) и обозначается  $\inf B$ , наименьшая верхняя грань множества  $B$  называется *точной верхней гранью множества  $B$*  (или *супремумом множества  $B$* ) и обозначается  $\sup B$ . Таким образом, для элемента  $x$  множества  $A$

$$\begin{aligned} x = \inf B &\Leftrightarrow \forall y \in B (x \leq y) \text{ и } \forall z \in A (\forall y \in B (z \leq y) \Rightarrow z \leq x), \\ x = \sup B &\Leftrightarrow \forall y \in B (y \leq x) \text{ и } \forall z \in A (\forall y \in B (y \leq z) \Rightarrow x \leq z). \end{aligned}$$

Точная нижняя грань (инфинум) множества  $B$  может не существовать (множество всех нижних граней множества  $B$  может не иметь наибольшего элемента), но если она существует, то единственна. Точная верхняя грань (супремум) множества  $B$  может не существовать (множество всех верхних граней множества  $B$  может не иметь наименьшего элемента), но если она существует, то единственна.

Частично упорядоченное множество называется *решёткой*, если каждое его двухэлементное подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани. Для любых двух элементов  $x$  и  $y$  решётки  $A$  элемент  $\inf\{x, y\}$  называется их *пересечением* и обозначается  $x \cap y$ , а элемент  $\sup\{x, y\}$  называется их *объединением* и обозначается  $x \cup y$ :



$$x \cap y \Leftrightarrow \inf\{x, y\} \quad \text{и} \quad x \cup y \Leftrightarrow \sup\{x, y\} .$$

Легко проверить, что множество  $P(M)$  всех подмножеств множества  $M$  с отношением включения  $\subseteq$  является решёткой, в которой пересечением и объединением оказываются теоретико-множественные пересечение и объединение. Вообще, булева алгебра с отношением порядка  $\leq$ , введённым в предыдущем параграфе, является решёткой, в которой пересечением и объединением оказываются соответствующие операции булевой алгебры (соответствующие доказательства можно найти, например, в книге [ 10 ]).

Решётка называется *полной*, если любое её подмножество имеет точную нижнюю и точную верхнюю грани. Очевидно, что всякая полная решётка должна иметь наименьший элемент (он называется *нулём решётки*) и наибольший элемент (он называется *единицей решётки*). Легко установить, что любая конечная решётка является полной. Очевидно также, что решётка всех подмножеств какого-либо множества всегда является полной.

Как видно из сделанных определений, всякая решётка может рассматриваться как универсальная алгебра сигнатуры  $\langle 2, 2 \rangle$  с двумя бинарными операциями *пересечение*  $\cap$  и *объединение*  $\cup$ . Можно установить, что эти решёточные операции всегда обладают свойствами (b1) – (b6), то есть они *коммутативны*, *ассоциативны* и подчиняются *законам поглощения*. Как показано в [ 10 ] (упражнение 22 и теорема 1 из §1 главы 1) всякая универсальная алгебра сигнатуры  $\langle 2, 2 \rangle$  с двумя бинарными операциями *пересечение*  $\cap$  и *объединение*  $\cup$ , которые коммутативны, ассоциативны и подчиняются законам поглощения, может быть превращена в решётку введением отношения порядка следующим соотношением:  $x \leq y \Leftrightarrow x \cap y = x$  (или же равносильным ему:  $x \leq y \Leftrightarrow x \cup y = y$ ). Таким образом, первые шесть аксиом булевой алгебры (b1) – (b6) представляют собой *алгебраические аксиомы решётки*. Между тем, последние четыре аксиомы из списка аксиом булевой алгебры не выполняются в произвольной решётке. Аксиомы (b9) и (b10) не выполняются потому, что в произвольной решётке ещё нет операции *дополнение*. Аксиомы же (b7) и (b8), постулирующие закон дистрибутивности, в некоторых решётках могут выполняться. Такие решётки называются *дистрибутивными*.

Решётка называется *ограниченной*, если в ней имеется наименьший элемент (который называется *нулём решётки*) и наибольший элемент (который называется *единицей решётки*). Элемент  $\bar{x}$  ограниченной решётки с нулём  $0$  и единицей  $1$  называется *дополнением* элемента  $x$ , если  $x \cap \bar{x} = 0$  и  $x \cup \bar{x} = 1$ . Вообще говоря, для элемента ограниченной решётки может найтись одно или несколько допол-

нений, но может не найтись и ни одного. Ограниченная решётка, в которой каждый элемент имеет дополнение, называется *решёткой с дополнениями*. Дистрибутивная решётка с дополнениями называется *булевой решёткой*.

Поскольку в ограниченной дистрибутивной решётке любой элемент имеет не более одного дополнения (это утверждает лемма 1 из § 6 главы 1 книги [ 10 ]), то в булевой решётке каждый элемент  $x$  имеет единственное дополнение  $\bar{x}$ . Таким образом, в булевой решётке помимо двуместных операций *пересечение*  $\cap$  и *объединение*  $\cup$  определена ещё одна одноместная операция *дополнение*  $\bar{\phantom{x}}$ . Булева решётка, рассматриваемая как множество с определёнными на нём операциями *пересечение*, *объединение* и *дополнение*, представляет собой булеву алгебру в смысле определения из § 18 (легко проверить, что аксиомы булевой алгебры (b1) – (b10) оказываются выполнены). Разумеется, верно и обратное: всякая булева алгебра с отношением порядка, введённым в § 20, является булевой решёткой.

## § 22. Булевы кольца

Из всех универсальных алгебр чаще других в математическом обиходе встречаются группы. *Группой* называется алгебра сигнатуры  $\langle 0, 2 \rangle$  с константой 0 и бинарной операцией  $+$  такими, что для любых её элементов  $x, y, z$  выполнено соотношение, определяющее свойство *ассоциативности*

$$(c1) \quad (x + y) + z = x + (y + z),$$

а также следующие условия:

$$(c2) \quad \forall x (x + 0 = 0 + x = 0),$$

$$(c3) \quad \forall x \exists y (x + y = y + x = 0).$$

Последнее условие определяет существование обратного элемента: можно установить (см., например, [ 11 ]), что для всякого элемента  $x$  должен существовать единственный элемент  $y$ , требуемый соотношением (c3). Этот элемент  $y$  называется *обратным элементом для элемента  $x$*  и обозначается через  $(-x)$ , а производная операция *вычитание* вводится следующим соотношением:

$$x - y \Leftrightarrow x + (-y).$$

Следует отметить, что описанная здесь группа является *аддитивной* потому, что бинарная операция обозначена символом  $+$  (и называется *сложением*), а константа обозначена  $0$  (и называется *нулём*). В классической алгебре чаще рассматриваются *мультипликативные* группы, в которых вместо сложения используется *умножение* (обозначаемое точкой), а вместо константы ноль – константа *единица* (в этом случае аксиомы (с1) – (с3) очевидным образом переписываются в новых обозначениях, обратный элемент для элемента  $x$  записывается как  $x^{-1}$ , а операция вычитание заменяется операцией *деление*:  $x / y = x \cdot y^{-1}$ ).

Между тем, аддитивные группы в классической алгебре чаще всего бывают *абелевыми*, то есть обладают дополнительно свойством *коммутативности*:

$$(c4) \quad x + y = y + x$$

(предполагается, что это соотношение так же, как и соотношение (с1), выполняется для любых элементов группы).

Итак, соотношения (с1) – (с3) являются аксиомами группы, а соотношения (с1) – (с4) – аксиомами абелевой группы. Примеров групп в математике имеется огромное множество. Очевидным примером абелевой группы может служить и множество всех целых чисел, и множество всех рациональных чисел, и множество всех действительных чисел с естественным сложением и нулём.

Рассмотрим универсальную алгебру сигнатуры  $\langle 0, 0, 2, 2 \rangle$  с двумя константами  $0$  (*ноль*) и  $1$  (*единица*) и двумя бинарными операциями  $+$  (*сложение*) и  $\cdot$  (*умножение*). Эта алгебра называется *коммутативным кольцом*, если она удовлетворяет аксиомам (с1) – (с4) (и, таким образом, представляет собой абелеву группу относительно сложения), а кроме того для любых её элементов  $x, y, z$  выполнены следующие равенства:

$$\begin{aligned} (c5) \quad (x \cdot y) \cdot z &= x \cdot (y \cdot z) && \text{(ассоциативность умножения),} \\ (c6) \quad x \cdot 1 &= 1 \cdot x = x && \text{(постулат единичного элемента),} \\ (c7) \quad (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z && \text{(закон дистрибутивности),} \\ (c8) \quad x \cdot y &= y \cdot x && \text{(коммутативность умножения).} \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (с1) – (с8) представляют собой аксиомы коммутативного кольца (заметим, что при определении кольца не обязательно коммутативного последняя аксиома (с8) исключается, однако вместе с этим добавляется ещё один закон дистрибутивности

для умножения с другой стороны; иногда также рассматривают неассоциативные кольца; наши определения следуют книге [ 11 ]).

Можно привести большое число примеров колец. Так, коммутативными кольцами будут и множество всех целых чисел, и множество всех рациональных чисел, и множество всех действительных чисел с их естественными операциями сложения и умножения, нулём и единицей. При этом рациональные и действительные числа образуют даже *поле*, поскольку для них выполнена ещё одна аксиома

$$\forall x \neq 0 \exists y (x \cdot y = 1),$$

утверждающая существование обратного элемента по умножению для любого элемента за исключением нуля. Понятие поля стоит рядом с понятием группы по своей значимости для классической алгебры и для математики в целом. Однако, здесь нас интересуют коммутативные кольца, связанные с булевыми алгебрами, так называемые булевы кольца. *Булевым кольцом* называется коммутативное кольцо, для любого элемента  $x$  которого выполнено следующее условие

$$(c9) \quad x \cdot x = x \quad (\text{идемпотентность умножения}).$$

(заметим кстати, что свойством идемпотентности обладают также операции пересечение и объединение любой булевой алгебры).

Итак, соотношения (c1) – (c9) представляют собой аксиомы булева кольца. Из них вытекает, что для любого элемента  $x$  булева кольца обратным ему (по сложению) является он сам. В самом деле, используя свойства идемпотентности и дистрибутивности, получаем

$$x + x = (x + x)^2 = x^2 + x \cdot x + x \cdot x + x^2 = x + x + x + x = (x + x) + (x + x)$$

и теперь, прибавляя к обеим частям полученного равенства обратный элемент для  $x + x$  (каким бы он ни был), получаем:  $x + x = 0$ . Этим же свойством обладает и симметрическая разность булевой алгебры: для всякого элемента  $x$  произвольной булевой алгебры выполнено соотношение  $x \div x = 0$  (напомним, что симметрическая разность была введена как производная операция булевой алгебры в § 18).

Последнее наблюдение может быть развито следующим образом: если в произвольной булевой алгебре симметрическую разность объявить сложением, а пересечение – умножением, то окажется, что для этих сложения и умножения требования (c1) – (c9) будут выполнены и, таким образом, булева алгебра превратится в булево кольцо. С другой стороны, произвольное булево кольцо можно превратить в булеву алгебру, если ввести булевы операции следующими соотноше-

ниями:  $x \cap y \Leftrightarrow x \cdot y$ ,  $x \cup y \Leftrightarrow x + y + x \cdot y$ ,  $\bar{x} \Leftrightarrow 1 + x$  (аксиомы булевой алгебры (b1) – (b10) для так определённых пересечения, объединения и дополнения действительно окажутся выполненными). Эта естественная связь между булевыми кольцами и булевыми алгебрами утверждается следующей теоремой (её доказательство можно найти в книге [ 12 ]).

**Теорема.** а) Если в булевой алгебре определить операции сложения и умножения соотношениями  $x + y \Leftrightarrow x \div y$  и  $x \cdot y \Leftrightarrow x \cap y$ , то множество элементов этой алгебры вместе с её константами 0 и 1 и введёнными сложением и умножением будет представлять собой булево кольцо.

б) Если в булевом кольце с нулём 0 и единицей 1 определить операции пересечение, объединение и дополнение, соотношениями  $x \cap y \Leftrightarrow x \cdot y$ ,  $x \cup y \Leftrightarrow x + y + x \cdot y$ ,  $\bar{x} \Leftrightarrow 1 + x$  то множество элементов этого кольца вместе с нулём, единицей и введёнными пересечением, объединением, дополнением будет представлять собой булеву алгебру.

## § 23. Принцип двойственности

Ещё в § 6 при обсуждении эквивалентностей (e2) – (e17) было отмечено, что они расположены парами так, что каждое соотношение с чётным номером получается из соседнего соотношения с нечётным номером одновременной заменой всех конъюнкций на дизъюнкции и всех дизъюнкций на конъюнкции. Подобным же образом (по отношению к операциям пересечение и объединение) устроены тождества (a2) – (a17) из § 14 и аксиомы булевой алгебры (b1) – (b10) из § 18. Это наблюдение может быть развито и в конечном итоге оформлено в виде так называемого *принципа двойственности*. Мы сформулируем здесь этот принцип в двух вариантах – для пропозициональных формул (теорема 1) и для тождеств (теорема 2).

Через  $\varphi$  и  $\psi$  будем обозначать пропозициональные формулы, которые не содержат других пропозициональных связок, кроме следующих:  $\perp$ ,  $\top$ ,  $\neg$ ,  $\&$ ,  $\vee$ . *Двойственной формулой для формулы  $\varphi$*  будем называть формулу  $\varphi^*$ , полученную одновременной заменой в формуле  $\varphi$  всех конъюнкций на дизъюнкции, всех дизъюнкций на конъюнкции, всех символов  $\perp$  на символы  $\top$  и всех символов  $\top$  на символы  $\perp$ .

**Лемма.** Если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – все пропозициональные переменные формулы  $\varphi$ , то имеет место следующая эквивалентность

$$\neg\varphi(A_1, A_2, \dots, A_n) \sim \varphi^*(\neg A_1, \neg A_2, \dots, \neg A_n).$$

Эта лемма (в записи которой использованы обозначения из § 6) говорит о том, как проносится связка отрицание через все пропозициональные связки формулы  $\varphi$  непосредственно до переменных. Она следует из соотношений (e16) и (e17), известных под названием *законы де Моргана*, и по сути дела представляет собой их обобщение. Из рассмотренной леммы легко вытекает следующее

**Следствие.** *Формула  $\varphi$  является тавтологией тогда и только тогда, когда формула  $\varphi^*$  является противоречием.*

Принцип двойственности для пропозициональных формул выражает собой следующая

**Теорема 1.**  $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \varphi^* \sim \psi^*$ .

Эта теорема вытекает из рассмотренной выше леммы. В самом деле, если  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – все пропозициональные переменные формул  $\varphi$  и  $\psi$  (некоторые переменные могут быть *фиктивными*), то

$$\begin{aligned} & \varphi(A_1, A_2, \dots, A_n) \sim \psi(A_1, A_2, \dots, A_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \neg\varphi(A_1, A_2, \dots, A_n) \sim \neg\psi(A_1, A_2, \dots, A_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \varphi^*(\neg A_1, \neg A_2, \dots, \neg A_n) \sim \psi^*(\neg A_1, \neg A_2, \dots, \neg A_n) \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \varphi^*(A_1, A_2, \dots, A_n) \sim \psi^*(A_1, A_2, \dots, A_n). \end{aligned}$$

Через  $p$  и  $q$  будем обозначать выражения, которые не содержат других символов операций, кроме следующих:  $0$ ,  $1$ ,  $\neg$ ,  $\cap$ ,  $\cup$ . *Двойственным выражением для выражения  $p$*  будем называть выражение  $p^*$ , полученное одновременной заменой в выражении  $p$  всех пересечений на объединения, всех объединений на пересечения, всех символов  $0$  на символы  $1$  и всех символов  $1$  на символы  $0$ .

**Теорема 2.** *Равенство  $p = q$  является тождеством тогда и только тогда, когда равенство  $p^* = q^*$  является тождеством.*

Теорема 2 следует из теоремы 1 и теорем, рассмотренных в § 16. Тождества в этой теореме можно понимать и как тождества алгебры множеств и как тождества, выполненные в любой булевой алгебре (это следует из теорем § 19). Таким образом, теорема 2 выражает собой принцип двойственности для булевых алгебр (в § 21 булевы алгебры рассматривались как частично упорядоченные множества; рас-

пространение принципа двойственности на произвольные частично упорядоченные множества можно найти в книге [ 10 ]).

## § 24. Конечные булевы алгебры

Две универсальные алгебры  $\langle A, f_1^{(k_1)}, f_2^{(k_2)}, \dots, f_n^{(k_n)} \rangle$  и  $\langle B, g_1^{(k_1)}, g_2^{(k_2)}, \dots, g_n^{(k_n)} \rangle$  сигнатуры  $\langle k_1, k_2, \dots, k_n \rangle$  называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение  $\xi$  множества  $A$  на множество  $B$  такое, что для каждого значения индекса  $i=1, 2, \dots, n$  и любых элементов  $x_1, x_2, \dots, x_{k_i} \in A$  выполнено

$$\xi(f_i(x_1, x_2, \dots, x_{k_i})) = g_i(\xi(x_1), \xi(x_2), \dots, \xi(x_{k_i})).$$

В соответствии с этим общим определением две *булевы алгебры*  $\langle A, \bar{\phantom{x}}, \cap, \cup \rangle$  и  $\langle B, \bar{\phantom{x}}, \cap, \cup \rangle$  *изоморфны*, если существует взаимно однозначное отображение  $\xi$  множества  $A$  на множество  $B$  такое, что для любых элементов  $x, y \in A$  выполнено

$$\begin{aligned} \xi(\bar{x}) &= \overline{\xi(x)}, \\ \xi(x \cap y) &= \xi(x) \cap \xi(y), \\ \xi(x \cup y) &= \xi(x) \cup \xi(y). \end{aligned}$$

Как видно из этих определений, изоморфные алгебры могут отличаться одна от другой по сути дела только обозначением их элементов и операций (а потому такие алгебры часто вообще не различают). Следующая теорема (доказательство которой можно найти в книге [ 10 ]) предлагает удобное описание конечных булевых алгебр.

**Теорема.** *Всякая конечная булева алгебра изоморфна алгебре всех подмножеств некоторого конечного множества.*

Если число элементов конечного множества равно  $n$ , то число всех его подмножеств, как известно [ 10 ], составляет  $2^n$ . В соответствии с рассмотренной теоремой это значит, что число элементов конечной булевой алгебры всегда представляет собой степень двойки (то есть может быть равно только одному из чисел  $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ ).

Элементами булевой алгебры всех подмножеств конечного множества  $A$  являются подмножества множества  $A$ , то есть элементы множества  $P(A)$ . Если  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ , то каждый элемент  $B$  множества  $P(A)$  может быть представлен  *$n$ -мерным булевым вектором  $b$*  следующим образом:

$$\mathbf{b} = (e_1, e_2, \dots, e_n), \text{ где } e_i = \begin{cases} 0, & \text{если } a_i \notin V \\ 1, & \text{если } a_i \in V \end{cases}$$

(координатами вектора  $\mathbf{b}$  являются нули и единицы, причём его  $i$ -тая координата  $e_i$  равна единице тогда, когда элемент  $a_i$  принадлежит подмножеству  $V$ , и равна нулю тогда, когда элемент  $a_i$  подмножеству  $V$  не принадлежит).

Таким образом, в силу рассмотренной в настоящем параграфе теоремы, элементы всякой конечной булевой алгебры могут быть представлены в виде  $n$ -мерных булевых векторов (размерность  $n$  равна логарифму по основанию 2 от числа элементов алгебры). Если координаты этих  $n$ -мерных векторов трактовать как координаты точек в  $n$ -мерном евклидовом пространстве, то окажется, что эти точки будут вершинами  $n$ -мерного куба, ребро которого имеет единичную длину. Одна из вершин этого куба (соответствующая нулевому вектору) совпадает с началом координат.

Случаю  $n=1$  отвечает *одномерный куб*, имеющий единственное ребро и две вершины, соответствующие нулю и единице двухэлементной булевой алгебры (алгебры всех подмножеств множества, состоящего из одного элемента). Эта наиболее простая булева алгебра представлена на рисунке 1.

Случаю, когда размерность  $n$  равна двум, соответствует *двухмерный куб*, который представляет собой квадрат с четырьмя вершинами. Именно столько элементов имеет булева алгебра всех подмножеств множества, состоящего из двух элементов. Эта четырёхэлементная булева алгебра представлена на рисунке 2.

В случае, когда размерность  $n$  равна трём, рассматриваемый  $n$ -мерный куб оказывается обычным *трёхмерным кубом*, у которого восемь вершин. Именно столько элементов имеет булева алгебра всех подмножеств множества, состоящего из трёх элементов. Эта восьмиэлементная булева алгебра представлена на рисунке 3.

На рисунке 4 показана шестнадцатиэлементная булева алгебра. Это алгебра всех подмножеств множества, состоящего из четырёх элементов. Размерность  $n$  в этом случае равна четырём и потому можно сказать, что на рисунке 4 представлен *четырёхмерный куб*.

Следует отметить, что на этих рисунках все четыре куба развёрнуты так, чтобы удобнее воспринималось отношение порядка  $\leq$ , определённое на представленных ими булевых алгебрах в соответствии с определениями из § 20 (как отмечено в § 20, это отношение совпадает с отношением включения  $\subseteq$  для соответствующих подмножеств). Так, отношение  $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$  выполнено тогда, когда элементу  $\mathbf{a}$  отвечает на рисунке вершина, лежащая ниже той, которая соответствует элементу  $\mathbf{b}$ , причём эти вершины соединены одним или несколькими



рёбрами (это условие вообще характерно для диаграмм, изображающих решётки и частично упорядоченные множества).



Рис. 1  
Двухэлементная  
булева алгебра  
(одномерный куб)

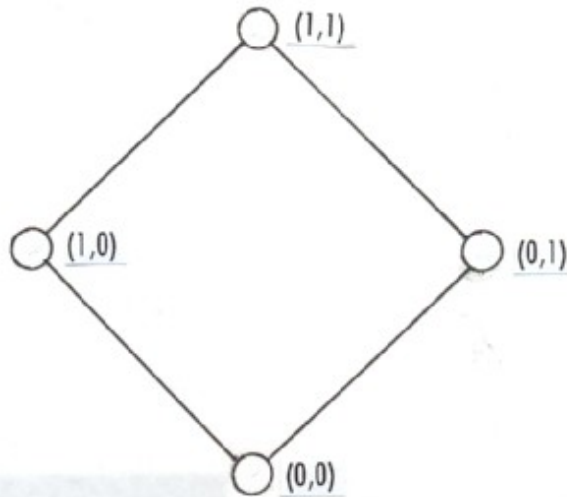


Рис. 2  
Четырёхэлементная  
булева алгебра  
(двухмерный куб)

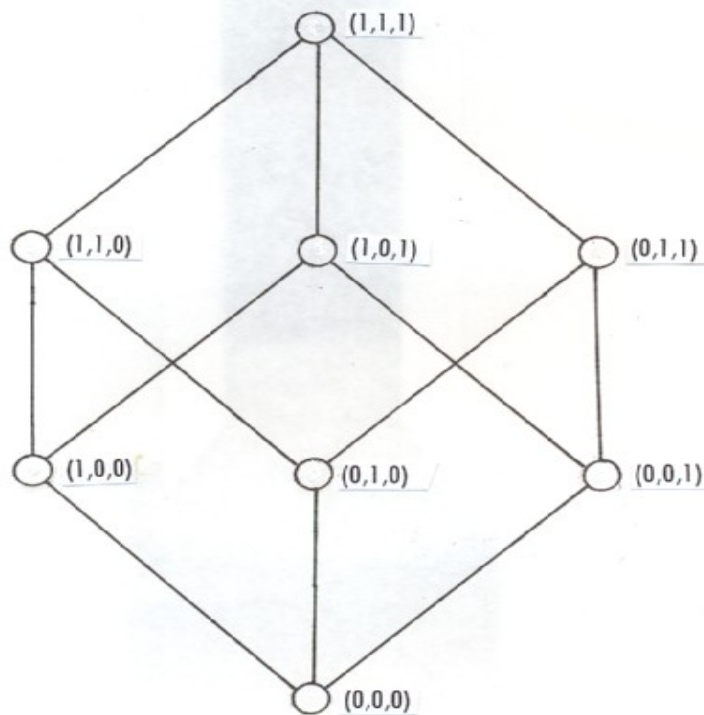


Рис. 3  
Восьмиэлементная

булева алгебра  
(трёхмерный куб)

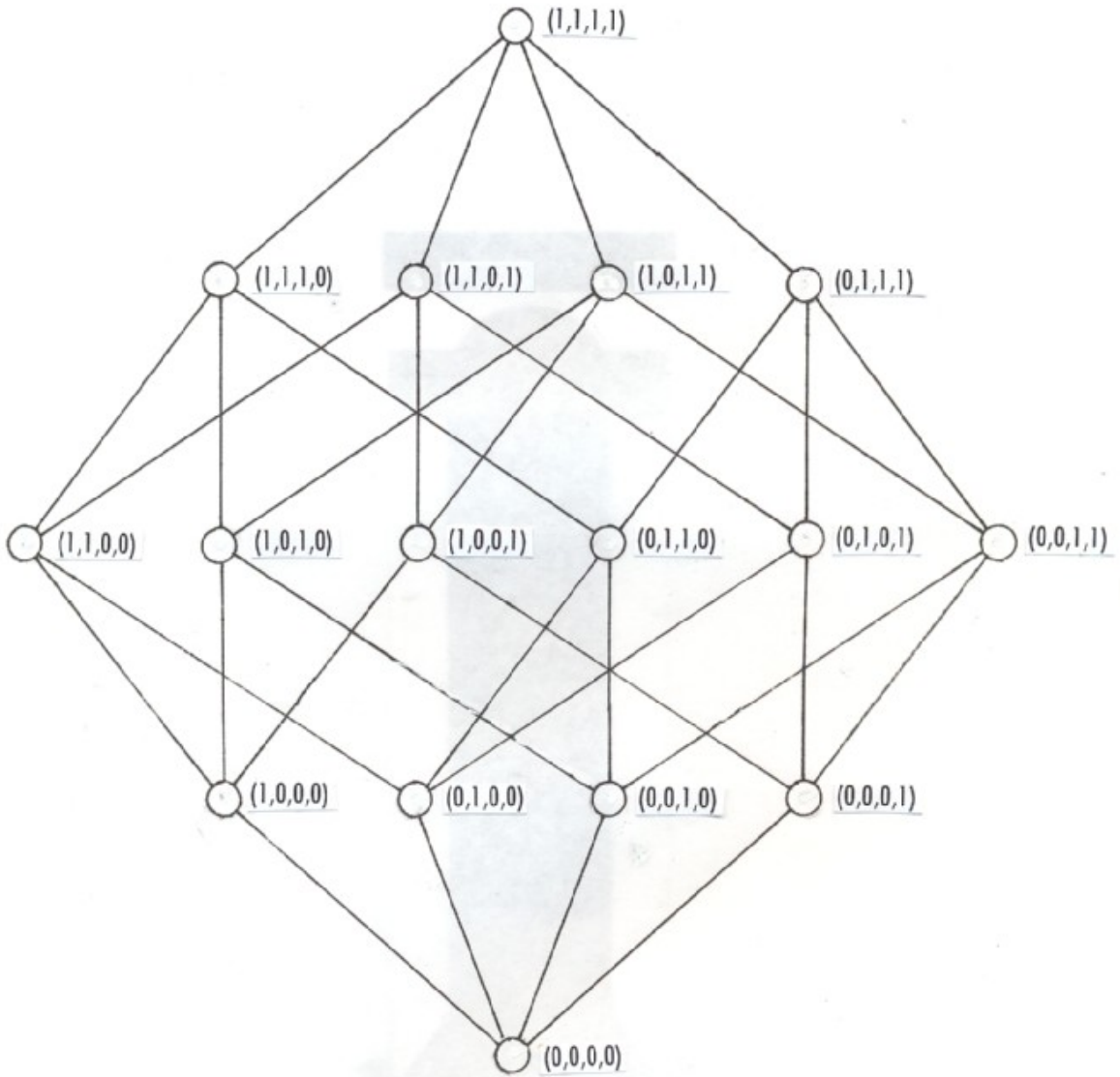


Рис. 4  
Шестнадцатиэлементная  
булева алгебра  
(четырёхмерный куб)

## Библиографический список

1. Шум А. А. *Элементы математической логики*. Издательство ТГТУ, 2003.
2. Клини С. К. *Математическая логика*. М. : Мир, 1973.
3. Колмогоров А. Н. , Драгалин А. Г. *Введение в математическую логику*. Издательство МГУ, 1982.
4. Лавров И. А. , Максимова Л. Л. *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов*. М. : Наука, 1984.
5. Марков А. А. *Элементы математической логики*. М. : Издательство МГУ, 1984.
6. Мендельсон Э. *Введение в математическую логику*. М. : Наука, 1976.
7. Новиков П. С. *Элементы математической логики*. М. : Наука, 1973.
8. Шум А. А. *Пропозициональные семантические системы // Семиотика и информатика*. 1979. № 11. С. 88 - 116.
9. Расева Е. , Сикорский Р. *Математика метаматематики*. М. : Наука, 1972.
10. Гретцер Г. *Общая теория решёток*. М. : Мир, 1982.
11. Ленг С. *Алгебра*. М. : Мир, 1968.
12. Биркгоф Г. *Теория решёток*. М. : Наука, 1984.

## Содержание

<i>Предисловие</i> .....	3
Глава 1. Классическая логика высказываний .....	4
§ 1. Высказывания и пропозициональные связки .....	4
§ 2. Пропозициональные формулы .....	6
§ 3. Тавтологии и противоречия .....	8
§ 4. Семантическое следование .....	10
§ 5. Эквивалентность пропозициональных формул .....	13
§ 6. Эквивалентные преобразования пропозициональных формул .....	14
Глава 2. Классическое исчисление высказываний .....	17
§ 7. Формальные исчисления .....	17
§ 8. Формальный язык классического исчисления высказываний .....	19
§ 9. Аксиомы и правила вывода классического исчисления высказываний .....	21
§ 10. Теорема дедукции .....	22
§ 11. Теорема о полноте .....	23
Глава 3. Алгебра множеств .....	26
§ 12. Операции над множествами .....	26
§ 13. Универсальные выражения и тождества .....	28
§ 14. Тождественные преобразования выражений .....	29
§ 15. Формальный язык и семантика для алгебры множеств .....	33
§ 16. Выражения и пропозициональные формулы .....	36

Глава 4 . Булевы алгебры .....	39
§ 17 . Универсальные алгебры .....	39
§ 18 . Аксиомы булевой алгебры .....	41
§ 19 . Булева семантика для выражений и тождеств .....	43
§ 20 . Отношение порядка .....	44
§ 21 . Булевы решётки .....	47
§ 22 . Булевы кольца .....	49
§ 23 . Принцип двойственности .....	52
§ 24 . Конечные булевы алгебры .....	54
<i>Библиографический список</i> .....	58
<i>Содержание</i> .....	59

Александр Анатольевич Шум

## Логика высказываний и булевы алгебры

*Учебное пособие*

*Редактор :*

*Корректор :*

*Технический редактор :*

---

Подписано в печать

Формат 60x84 1/16.

Физ. печ. л.

Тираж 150 экз.

Усл. печ. л.

Заказ №

Бумага писчая.

уч.-изд. л.

С

---

Издательство и типография

Тверского государственного технического университета,  
170026, Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22