УДК 51(075.8)
ББК 22.1.я7

Рецензенты: кандидат физико-математических наук доцент кафедры информатики и прикладной математики ТвГТУ Пиджакова Л.М.; кандидат физико-математических наук доцент кафедры математических методов современного естествознания ТвГУ Чемарина Ю.В.

Балашов, А.Н. Практикум по математике для студентов заочной формы обучения / А.Н. Балашов, М.А. Шестакова. Ч. II. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2015. 120 с.

Предназначен для студентов заочной формы обучения и особенно для тех, кто самостоятельно изучает высшую математику и желает приобрести необходимые навыки в решении задач.

Для каждого раздела приведены краткие теоретические сведения и методические указания, необходимые для решения задач.

Разобраны примеры типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений.

ISBN 978-5-7995-0768-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 7. РЯДЫ

§ 1. Необходимый признак сходимости ряда. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами

Разве ты не заметил,
что способный к математике
изощрен во всех науках в природе?
Платон

Последовательность считается заданной, если известен закон, по которому можно вычислить любой ее член a_n при данном n.

Определение 1. Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \tag{7.1}$$

где a_1, a_2, …, a_n, …, называемые членами ряда, образуют числовую последовательность.

Определение 2. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется n-й частичной суммой ряда:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

Определение 3. Числовой ряд (7.1) называется *сходящимся*, если существует конечный предел частичных сумм:

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n,$$

называемый суммой сходящегося ряда. Если предел не существует, то ряд (7.1) называется *расходящимся*.

Свойства сходящихся рядов

1. На сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его членов.

2. Если ряд (7.1) сходится и его сумма равна S, то ряд $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$, где c – любое число, также сходится и его сумма равна cS.

3. Если ряды (7.1) и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ сходятся и их суммы равны S_1 и S_2 соответственно, то ряды $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$ и $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots + (a_n - b_n) + \ldots$ также сходятся и их суммы равны $S_1 + S_2$ и $S_1 - S_2$ соответственно.

Признаки сходимости числовых рядов

Необходимый признак сходимости. Ряд может сходиться лишь при условии, что общий член ряда a_n при $n \to +\infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Следствие. Если общий член ряда a_n при $n \to +\infty$ не стремится к нулю, то ряд расходится.

Признак Даламбера. Если в ряде (7.1) с положительными членами отношение (n + 1)-го к n-му члену при $n \to +\infty$ имеет предел ρ, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ или $\rho = \infty$ – расходится. При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда решается с использованием других признаков.

Примечание. Если $\rho = 1$, но отношение $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ для всех номеров n, начиная с некоторого, больше единицы, то ряд расходится.

Признак сравнения рядов. Если ряд с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (a) сравнить с другим рядом с положительными членами $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ (b), сходимость или расходимость которого известна, и если начиная с некоторого номера n:

1) $a_n \le b_n$ и ряд (b) сходится, то и ряд (a) также сходится;

2) $a_n \ge b_n$ и ряд (b) расходится, то и ряд (a) расходится.

Предельный признак сравнения рядов. Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}$, не равный нулю, то ряды (a) и (b) ведут себя одинаково, т. е. либо оба сходятся, либо расходятся.

При использовании признака сравнения исследуемый ряд (a) часто сравнивают или с бесконечной геометрической прогрессией $1 + q + q^2 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$, которая при $0 < q < 1$ сходится, при $q \ge 1$ расходится, или с расходящимся гармоническим рядом $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, или с рядом $\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \le 1$.

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$, где k – степень многочлена $P_k(n)$, m – степень многочлена $Q_m(n)$, сходится, если $m - k > 1$, и расходится, если $m - k \le 1$, что следует из предельного признака сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$, $p = m - k$.

Аналогично ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[i]{P_k(n)}}{\sqrt[j]{Q_m(n)}}$ с учетом области допустимых значений сходится при $\frac{m}{j}-\frac{k}{i}>1$ и расходится при $\frac{m}{j}-\frac{k}{i}\le 1$.

Радикальный признак Коши. Если для ряда с положительными членами (a) величина $\sqrt[n]{a_n}$ имеет конечный предел ρ при $n \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ – расходится. При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда решается с использованием других признаков.

Радикальный признак Коши обычно применяется, когда общий член ряда a_n содержит показательно-степенную функцию вида $(f(n))^{g(n)}$.

Интегральный признак Коши. Ряд с положительными убывающими членами $a_n = f(n)$ сходится или расходится, смотря по тому, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная убывающая функция; c – любое положительное число из области определения $f(x)$. Этим признаком можно пользоваться, когда выражение общего члена $a_n = f(n)$ имеет смысл не только для целых положительных значений n. Эффективность признака зависит от сложности вычисления несобственного интеграла.

Пример 1. Проверьте, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда:

1) $3+\frac{4}{3}+\frac{5}{5}+\frac{6}{7}+\ldots$; 2) $4+\frac{7}{4}+\frac{10}{9}+\frac{13}{16}+\ldots$

Решение. Необходимый признак сходимости будет выполняться, если предел общего члена ряда при $n \to +\infty$ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

1. Числитель первого члена ряда равен трем, а каждый последующий член ряда увеличивается на единицу, т. е. равен $n + 2$.

Знаменатель первого члена ряда равен единице, а каждый последующий член ряда увеличивается на две единицы, т. е. равен $2n - 1$. Следовательно, общий член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{n+2}{2n-1}.$$

Проверим:

$$a_1 = \frac{3}{1},\ a_2 = \frac{4}{3},\ a_3 = \frac{5}{5},\ a_4 = \frac{6}{7},\ldots$$

Используя правило Лопиталя, найдем предел общего члена ряда при неограниченном увеличении его номера:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{n+2}{2n-1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{(n+2)'}{(2n-1)'} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Необходимый признак сходимости не выполняется, следовательно, ряд расходится.

2. Числитель первого члена ряда равен четырем, а каждый последующий член ряда увеличивается на три единицы, т. е. равен $3n + 1$.

Знаменатель каждого члена ряда получается возведением в квадрат номера члена ряда, т. е. равен n^2. Следовательно, общий член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{3n+1}{n^2}.$$

Проверим:

$$a_1 = \frac{4}{1};\ a_2 = \frac{7}{4};\ a_3 = \frac{10}{9};\ a_4 = \frac{13}{16};\ldots$$

Используя правило Лопиталя, найдем предел общего члена ряда при неограниченном увеличении его номера:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n+1}{n^2} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{n\to+\infty}\frac{(3n+1)'}{(n^2)'} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2n} = 0.$$

Необходимый признак сходимости выполняется.

Ответ: для первого ряда необходимый признак сходимости не выполняется, а для второго ряда – выполняется.

Пример 2. Исследуйте сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3n-1}{5n+3}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{2^n}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^3}{3^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln^2 n}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение.

1. Найдем предел общего члена ряда при неограниченном увеличении его номера n:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{3n-1}{5n+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{(3n-1):n}{(5n+3):n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3-\frac{1}{n}}{5+\frac{3}{n}} = \frac{3}{5}.$$

Необходимый признак сходимости $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ не выполняется, значит, данный ряд расходится.

2. Общий член ряда $a_n = \dfrac{n!}{2^n}$ содержит факториал и показательную функцию, поэтому воспользуемся признаком Даламбера. Вычислим a_{n+1}, заменив в выражении n-го члена n на $n + 1$: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$. Затем найдем предел:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!\cdot 2^n}{n!\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!(n+1)\cdot 2^n}{n!\cdot 2^n \cdot 2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2} = +\infty,\ \rho = \infty.$$

Согласно признаку Даламбера данный ряд расходится.

3. Общий член ряда $a_n = \dfrac{n^3}{3^n}$ есть дробь, в числителе которой находится степенная функция, а в знаменателе – показательная функция, поэтому воспользуемся признаком Даламбера. Найдем a_{n+1}, заменяя в выражении n-го члена n на $n + 1$:

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}.$$

Предел

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3\cdot 3^n}{n^3 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{3^n}{3^n\cdot 3} = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3},\ \rho < 1.$$

Согласно признаку Даламбера ряд сходится.

4. Каждый член $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ данного ряда меньше соответствующего члена $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ сходящегося ряда, следовательно, согласно признаку сравнения данный ряд сходится.

5. Несобственный интеграл от непрерывной и убывающей функции $f(x)$ с бесконечным верхним пределом вычислить несложно. Воспользуемся интегральным признаком Коши при условии, что нижний предел равен двум или любому другому числу, большему единицы:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^A = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, т. е. согласно интегральному признаку Коши данный ряд сходится.

6. Общий член ряда содержит показательно-степенную функцию, значит, применим радикальный признак Коши:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Согласно радикальному признаку Коши ряд сходится.

Ответ: 3–6-й ряды сходятся, 1-й и 2-й – расходятся.

Пример 3. Укажите сходящиеся числовые ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2n^3+n}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[7]{n+2}}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^3+2n}}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^5-2n^4+4}}$.

Решение. Для рядов вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{P_k(n)}{Q_m(n)}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[i]{P_k(n)}}{\sqrt[j]{Q_m(n)}}$ воспользуемся предельным признаком сравнения рядов (см. с. 6).

Для первого ряда $m = 3$, $k = 1$, $m - k = 2 > 1$, ряд сходится.

Для второго ряда $m = 1/7$, $k = 0$, $m - k = 1/7 \le 1$, ряд расходится.

Для третьего ряда $m = 3/3 = 1$, $k = 0$, $m - k = 1 \le 1$, ряд расходится.

Для четвертого ряда $m = 5/4$, $k = 0$, $m - k = 5/4 > 1$, ряд сходится.

Ответ: 1) и 4).

Пример 4. Укажите сходящийся числовой ряд:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^3$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} 5n$.

Решение. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ является суммой бесконечно возрастающей геометрической прогрессии $\left(\dfrac{3}{2} > 1\right)$, следовательно, ряд расходится.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ является суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\left(\dfrac{2}{3} < 1\right)$, следовательно, ряд сходится.

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{n+2}\right)^3$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} 5n$ расходятся, так как для них не выполняется необходимое условие сходимости числового ряда:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+2}\right)^3 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+2/n}\right)^3 = 1 \ne 0; \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{arctg} 5n = \frac{\pi}{2} \ne 0.$$

Ответ: 2).

§ 2. Абсолютная и неабсолютная сходимость знакопеременного ряда. Признак сходимости знакочередующегося ряда

Из двух ссорящихся более
виновен тот, кто умнее.
Иоганн Гете

Определение 4. Знакочередующимся числовым рядом (знаки членов которого строго чередуются) называется ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n ,$$

или

$$-a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n , \qquad (7.2)$$

где $a_1, a_2, a_3, \ldots$ – положительные числа.

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (7.2) члены таковы, что $a_1 > a_2 > a_3 \ldots$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то данный ряд сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Признак Лейбница справедлив, если неравенства выполняются, начиная с некоторого номера N.

Ошибка при замене суммы ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, суммой нескольких его первых членов меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Определение 5. Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Определение 6. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов.

Определение 7. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный знакопеременный ряд называется условно или неабсолютно сходящимся рядом.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов

1. Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов, при этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

2. Если ряд сходится условно, то, какое бы мы ни задали число M, члены этого ряда можно переставить так, что его сумма окажется в точности равной M. Более того, возможна такая перестановка членов условно сходящегося ряда, что ряд, полученный после перестановки, будет расходящимся.

Пример 5. Исследуйте сходимость знакопеременного ряда. Определите, является ли он абсолютно сходящимся, неабсолютно сходящимся или расходящимся:

1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{3n+1}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n}{5^n}$.

Решение.

1. Члены данного знакочередующегося ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $a_n>a_{n+1}$ и $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{3n+1}=0$. Поэтому согласно признаку Лейбница данный ряд сходится. Чтобы установить, сходится ли он абсолютно или неабсолютно (условно), исследуем ряд с положительными членами $\left|(-1)^n a_n\right|=\dfrac{1}{3n+1}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда.

Применим интегральный признак Коши:

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{3x+1}=\frac{1}{3}\lim_{\alpha\to+\infty}\int\limits_1^{\alpha}\frac{d(3x+1)}{3x+1}=\frac{1}{3}\lim_{\alpha\to+\infty}\ln(3x+1)\Big|_1^{\alpha}=\frac{1}{3}\lim_{\alpha\to+\infty}\big(\ln(3\alpha+1)-\ln 4\big)=+\infty.$$

Поскольку несобственный интеграл расходится, то согласно интегральному признаку Коши расходится и ряд с положительными членами.

Следовательно, данный ряд является условно сходящимся.

2. Заменим члены данного знакопеременного ряда их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\left|a_n\right|=\dfrac{|\cos n|}{5^n}$ с положительными членами. Сравним его с геометрической бесконечно убывающей прогрессией $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{5^n}$, которая представляет собой сходящийся ряд $\left(\dfrac{1}{5}<1\right)$. Каждый член полученного ряда не превосходит соответствующего члена геометрической прогрессии: $\dfrac{|\cos n|}{5^n}\le\dfrac{1}{5^n}$. Значит, согласно признаку сравнения, ряд с положительными членами также сходится, а заданный знакопеременный ряд сходится абсолютно.

Пример 6. Установите соответствие между знакопеременными рядами:

А) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n 5^n$; *Б*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n+3}$; *В*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(n+2)!}$

и видами сходимости:

1) абсолютно сходится; 2) условно сходится; 3) расходится.

Решение. Для ряда *А* не выполняется необходимый признак сходимости: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n 5^n \neq 0$. Вследствие этого данный ряд расходится.

Члены знакочередующегося ряда *Б* убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю: $\frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6} > \ldots$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+3} = 0$. Следовательно, согласно признаку Лейбница данный ряд сходится. Для того чтобы установить, сходится ли он абсолютно или условно, исследуем ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+3}$, составленный из абсолютных значений членов данного ряда. Общий член ряда – дробно-рациональная функция (см. предельный признак сравнения, с. 6), $m = 1$, $k = 0$, $m - k = 1 \leq 1$, ряд расходится.

Следовательно, ряд *Б* сходится условно.

Заменим члены знакочередующегося ряда *В* их абсолютными значениями и исследуем полученный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!}$ с положительными членами.

По известному члену ряда a_n, заменяя в нем n на $n + 1$, находим следующий за ним член a_{n+1}:

$$a_n = \frac{1}{(n+1)!}; \quad a_{n+1} = \frac{1}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!\cdot(n+2)}.$$

Согласно признаку Даламбера

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!\cdot(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = 0, \quad \rho < 1,$$

поэтому данный ряд сходится, а ряд *В* сходится абсолютно.

Ответ: $A - 3$; $Б - 2$; $В - 1$.

§ 3. Функциональные ряды

Жизнь – не те дни, что прошли,
а те, что запомнились.
П.А. Павленко

Определение 8. Функциональным рядом называется выражение

$$a_1(x)+a_2(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x), \tag{7.3}$$

члены которого являются функциями от переменной x.

При различных значениях x из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися. Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости. Суммой функционального ряда называется функция $S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)$, а разность $R_n(x)=S(x)-S_n(x)$ – остатком ряда.

Определение 9. Ряд (7.3) называется равномерно сходящимся на отрезке $[a; b]$, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такой номер N, что при $n>N$ и любом $x\in[a; b]$ будет выполнено неравенство $|R_n(x)|<\varepsilon$.

Для определения области сходимости функциональных рядов обычно вначале используется признак Даламбера, а те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда, исследуются особо, посредством других признаков сходимости рядов.

Определение 10. Степенным рядом называется функциональный ряд

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n+\ldots=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, \tag{7.4}$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Определение 11. Интервалом сходимости степенного ряда (7.4) называется такой интервал от $-R$ до $+R$, что для всякой точки x, лежащей внутри него, ряд сходится (причем абсолютно), а для точек x, лежащих вне этого интервала, ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости R степенного ряда можно определить по признаку Даламбера, согласно которому

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

либо по признаку Коши:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

Теорема Абеля. Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x|<|x_0|$.

Если ряд расходится при некотором значении x_0, то он расходится при всяком x, для которого $|x|>|x_0|$.

Степенной ряд в своем интервале сходимости по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования ведет себя так же, как многочлен с конечным числом членов.

Определение 12. *Рядом Те́йора* для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена $x-a$:

$$f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots \tag{7.5}$$

При $a=0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной x (ряд Ма́кло́рена):

$$f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Примеры разложения функции в ряды:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\qquad x\in \boldsymbol{R};$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\qquad x\in \boldsymbol{R};$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad x\in \boldsymbol{R};$$

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ -1<x<1;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\ldots,\qquad -1<x\le 1;$$

$$\operatorname{arctg} x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots+(-1)^{n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,\qquad -1\le x\le 1.$$

Пример 7. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nx^n$:

1) $a_n=\dfrac{n^2}{n!}$; 2) $a_n=\dfrac{2^n}{n(n+1)}$.

Решение.

1. Определим радиус сходимости R степенного ряда:

$$R=\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot(n+1)!}{(n+1)^2\cdot n!}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\frac{n!\cdot(n+1)}{n!}=+\infty,$$

следовательно, $x\in \boldsymbol{R}$.

2. Определим радиус сходимости R степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot(n+2)}{n\cdot 2^n\cdot 2} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Радиус сходимости R = 0,5. Следовательно, интервалом сходимости данного степенного ряда является интервал $-0{,}5 < x < 0{,}5$.

Согласно признаку Даламбера при любых значениях x из найденного интервала ряд абсолютно сходится, а при $|x| > 0{,}5$ – расходится. Граничные точки $x = \pm\, 0{,}5$ исследуем особо.

При $x = -\,0{,}5$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+1)}$, который сходится согласно признаку Лейбница (члены этого ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю).

При x = 0,5 получим числовой ряд с положительными членами $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)}$, который сходится, что следует из сравнения его со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (каждый член исследуемого ряда меньше соответствующего члена сравниваемого ряда).

Следовательно, областью сходимости ряда является отрезок [–0,5; 0,5].

Ответ: 1) $x \in \boldsymbol{R}$; 2) $x \in [-0{,}5;\ 0{,}5]$.

Пример 8. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$.

Решение. По известному члену ряда u_n, заменяя в нем n на $n + 1$, находим следующий за ним член u_{n+1}:

$$u_n = \frac{x^n}{3^n};\quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{x^n\cdot x}{3^n\cdot 3}.$$

Используя признак Даламбера, найдем предел:

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n\cdot x\cdot 3^n}{3^n\cdot 3\cdot x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x}{3}\right| = \frac{|x|}{3}.$$

Определим, при каких значениях x этот предел будет меньше единицы, т. е. решим неравенство $\frac{|x|}{3} < 1;\ |x| < 3;\ -3 < x < 3$.

Согласно признаку Даламбера при любом значении x из найденного интервала ряд сходится. Граничные точки $x \pm 3$ интервала исследуем особо.

При x = –3 получим знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$, у которого необходимый признак сходимости $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ не выполняется, значит, ряд расходится. Аналогично при x = 3.

Следовательно, областью сходимости данного степенного ряда является интервал $-3 < x < 3$ или $x \in (–0,5;\ 0,5)$.

Ответ: $x \in (–0,5;\ 0,5)$.

Пример 9. Радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ равен 6. Тогда интервал сходимости имеет вид:

1) (0; 6); 2) (–6; 0); 3) (–6; 6); 4) (–3; 3).

Решение. Интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ является интервал $(–R;\ R)$, где R – радиус сходимости данного ряда.

Если радиус сходимости степенного ряда равен 6, то интервал сходимости имеет вид (–6; 6).

Ответ: 3) (–6; 6).

Пример 10. Найдите интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(x-1)^n$.

Решение. Интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$, а радиус сходимости может быть найден по формуле $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$. Для нашего примера здесь $x_0 = 1$; $a_n = \frac{1}{n}$; $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, тогда

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1/n}{1/(n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n} + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Интервал сходимости $(1-1;\ 1+1) = (0; 2)$.

Ответ: (0; 2).

Пример 11. Найдите разложение в ряд по степеням x функции $y = xe^{x^2}$.

Решение. Заменив в ряду Маклорена для e^x x на x^2, получим:

$$e^{x^2} = 1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots,\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Умножим полученный ряд на x:

$$xe^{x^2} = x + \frac{x^3}{1!} + \frac{x^5}{2!} + \frac{x^7}{3!} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{n!} + \ldots,\ x \in \boldsymbol{R}.$$

Ответ: $xe^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!},\ x \in \boldsymbol{R}$.

Пример 12. Найдите первый отличный от нуля коэффициент разложения функции $y = 4xe^{-2x}$ в ряд Маклорена.

Решение. Коэффициенты ряда Маклорена вычисляются по формуле $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$; $a_0 = f(0)$.

Найдем значение функции $y = f(x) = 4xe^{-2x}$ и ее производной при $x = 0$:

$$f(0) = 0; \quad f'(x) = 4e^{-2x} + 4x(-2e^{-2x}), \quad f'(0) = 4.$$

Подставив в формулу вычисления коэффициентов ряда Маклорена $n = 1$, получим:

$$a_1 = \frac{f^{(1)}(0)}{1!} = \frac{f'(0)}{1!} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 13. Найдите три первых члена ряда Тейлора для функции $\dfrac{1}{x+1}$ при $a = 2$.

Решение. Вычислим значения функции и ее производных при $x = a = 2$:

$$y(x) = \frac{1}{x+1} = (x+1)^{-1},\ y(2) = \frac{1}{3};\ y'(x) = -(x+1)^{-2},\ y'(2) = \frac{-1}{3^2};$$

$$y''(x) = 2(x+1)^{-3},\ y''(2) = \frac{2}{27}.$$

Подставив эти значения в ряд Тейлора (7.5), получим:

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2}(x-2) + \frac{2}{3^3 2!}(x-2)^2 + \ldots = \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(x-2) + \frac{1}{27}(x-2)^2 + \ldots$$

Ответ: $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{9}(x-2) + \dfrac{1}{27}(x-2)^2 + \ldots$

Пример 14. Найдите коэффициент a_4 в разложении функции $f(x) = x^3 + 5x$ в ряд Тейлора по степеням $(x - 1)$.

Решение. Коэффициенты ряда Тейлора вычисляются по формуле $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Продифференцируем функцию $f(x) = x^3 + 5x$ четыре раза:

$$f'(x) = 3x^2 + 5; \quad f''(x) = 6x; \quad f'''(x) = 6; \quad f^{\mathrm{IV}}(x) = f^{(4)}(x) = 0.$$

Подставив в формулу вычисления коэффициентов ряда Тейлора $n = 4$ и $x_0 = 1$, получим:

$$a_4 = \frac{f^{(4)}(1)}{4!} = 0.$$

Ответ: 0.

§ 4. Применение рядов к приближенным вычислениям

Улыбка не стоит ничего, а сколько она дает? Она притягивает счастье в дом и увеличивает количество друзей.

Дейл Карнеги

Числовые и функциональные ряды широко применяются в приближенных вычислениях. Рассмотрим это на примерах.

Пример 15. Вычислите определенный интеграл $\int_0^b f(x)$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

1) $f(x) = \sin x^3$, $b = 1$; 2) $f(x) = xe^{2x}$, $b = 0{,}25$.

Решение.

1. Пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$ (см. § 3), заменяя в нем x на x^3, имеем:

$$\sin x^3 = x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \ldots (x \in \boldsymbol{R}).$$

Интегрируя в пределах от 0 до 1, получим знакочередующийся ряд:

$$J_1 = \int_0^1 \sin x^3 dx = \int_0^1 \left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \ldots \right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{3! \cdot 10} + \frac{x^{16}}{5! \cdot 16} - \ldots \right) \Bigg|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{60} + \frac{1}{1920} - \ldots,$$

удовлетворяющий признаку Лейбница: члены его убывают по абсолютному значению, и общий член ряда стремится к нулю. Поскольку третий член этого ряда меньше 0,001, то для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму двух первых членов ряда:

$$J_1 \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{60} \approx 0{,}233.$$

2. Пользуясь рядом Маклорена для e^x (см. § 3), заменяя в нем x на $2x$, имеем:

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \ldots (x \in \boldsymbol{R}).$$

Умножив полученный ряд на x, интегрируя в пределах от 0 до 0,25, получим:

$$J_2 = \int_0^{0,25} xe^{2x} dx = \int_0^{0,25} \left(x + \frac{2x^2}{1!} + \ldots \frac{2^{n-1} x^n}{(n-1)!} + \ldots \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{1! \cdot 3} + \ldots \frac{2^{n-1} x^{n+1}}{(n-1)! \cdot (n+1)} + \ldots \right) \Bigg|_0^{0,25} =$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+\frac{2\cdot 2x^3}{3!}+\ldots+\frac{2^{n-1}\cdot n\cdot x^{n+1}}{(n+1)!}+\ldots\right)\Bigg|_0^{0,25}=\frac{1}{2\cdot 2^4}+\frac{2}{2^5\cdot 3!}+\ldots\frac{n}{2^{n+3}\cdot(n+1)!}+\ldots.$$

Исследуем сходимость полученного числового ряда по признаку Даламбера:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+1)\cdot(n+1)!\cdot 2^{n+3}}{(n+2)!\cdot 2^{n+4}\cdot n}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n+1}{2n(n+2)}=0,\ \rho<1.$$

Согласно признаку Даламбера полученный числовой ряд сходится, причем абсолютно, поэтому можно представить a_n-й член в виде

$$a_n=\frac{n}{(n+1)!\cdot 2^{n+3}}=\frac{n+1}{(n+1)!\cdot 2^{n+3}}-\frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{n+3}}.$$

Тогда $J_2=\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{192}+\frac{1}{384}-\frac{1}{1536}+\ldots.$

Шестой член этого знакочередующегося ряда меньше 0,001, поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму пяти первых членов ряда:

$$J_2\approx\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\frac{1}{64}-\frac{1}{192}+\frac{1}{384}\approx 0{,}044.$$

Ответ: 1) $J_1\approx 0{,}233$; 2) $J_2\approx 0{,}044$.

Пример 16. Найдите три первых отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$:

1) $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$; 2) $y' = xy$, $y(0) = 2$.

Решение.

1. Пусть искомая функция $y(x)$ разложена в ряд Маклорена:

$$y(x)=y(0)+\frac{y'(0)}{1!}x+\frac{y''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots,$$

где $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)\ldots$ – значения функции $y(x)$ и ее производных при $x = 0$.

Согласно начальному условию первый коэффициент $y(0) = 1$. Второй получим при подстановке известных величин в данное уравнение: $y'(0) = 1$. Третий коэффициент найдем путем дифференцирования данного уравнения: $y'' = 1 + 2yy'$. Отсюда при $x = 0$ получим: $y''(0) = 3$.

Подставим эти значения коэффициентов в ряд Маклорена:

$$y = 1 + x + 1{,}5x^2 + \ldots$$

2. Применив тот же способ, что и в решении предыдущей задачи, получим:

$$y(0) = 2;\quad y'(0) = 0;\quad y'' = y + xy';\quad y''(0) = 2;\quad y''' = 2y' + xy'';$$
$$y'''(0) = 0;\quad y^{\mathrm{IV}} = 3y'' + xy''';\quad y^{\mathrm{IV}} = 6.$$

Подставим эти значения коэффициентов в ряд Маклорена:

$$y = 2 + x^2 + 0{,}25x^4 + \ldots$$

Ответ: 1) $y = 1 + x + 1{,}5x^2 + \ldots$; 2) $y = 2 + x^2 + 0{,}25x^4 + \ldots$

§ 5. Тригонометрические ряды

Кто хочет работать – ищет
средства, кто не хочет – причины.
С. Королев

Определение 13. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots=$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right) \qquad (7.6)$$

называется тригонометрическим рядом. Постоянные числа a_0, a_n и b_n (n = 1, 2, …) называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд (7.6) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π, $f(x+2\pi)=f(x)$.

Определение 14. *Рядом Фурье* для функции $f(x)$ на промежутке $[-\pi\,;\,\pi]$ называется тригонометрический ряд (7.6), если его коэффициенты a_n и b_n вычислены по формулам Фурье:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx\,;\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx\,.$$

Для четной функции $f(x)=f(-x)$ ряд Фурье не содержит синусов:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx\,;\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx dx\,, \qquad (7.7)$$

а для нечетной функции $f(x)=-f(-x)$ ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx\,,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx dx\,. \qquad (7.8)$$

Для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ на промежутке $[-l;\,l]$ ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

где $a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$, $a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$. (7.9)

При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[0;\,2l]$ пределы интегралов в формулах (7) будут 0 и $2l$, а в случае произвольного промежутка $[a;\,b]$ длины $2l$ эти пределы будут a и $a+2l$.

Пример 17. Разложите функцию $f(x) = 5$ в интервале от 0 до 1 в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы.

Решение. Для разложения данной функции в ряд Фурье, содержащий только синусы, продолжим ее на соседний слева полуинтервал (–1; 0] нечетным образом:

$$f(x) = \begin{cases} -5 \text{ при } -1 < x \le 0, \\ 5 \text{ при } \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Тогда $a_n = 0$, а согласно (7.8) с учетом (7.9) при $l = 1$

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin\frac{n\pi x}{1}dx = 2\int_0^1 5\sin n\pi x dx = \frac{-10}{n\pi}\cos n\pi x\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{-10}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) = \frac{10}{n\pi}(1 - \cos n\pi).$$

Искомое разложение данной функции в неполный ряд Фурье, содержащий только синусы, по формуле (7.9) имеет вид

$$5 = \frac{10}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1-\cos n\pi}{n}\sin n\pi x = \frac{20}{\pi}\left(\sin \pi x + \sin 3\pi x + \sin 5\pi x + \ldots\right).$$

Пример 18. Дана функция $f(x) = x^2 - 2$, $x \in [-\pi; \pi]$. Тогда коэффициент b_3 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен:

1) $\frac{5}{\pi}$; 2) $\frac{2\pi}{5}$; 3) π; 4) 0; 5) –2.

Решение. Функция $f(x) = x^2 - 2$ является четной, так как $f(-x) = f(x)$.

Ряд Фурье четной функции при $x \in [-\pi; \pi]$ не содержит синусов. Поэтому все коэффициенты $b_n = 0$.

Ответ: 4) 0.

Пример 19. Разложите функцию $f(x) = x + 5$ в ряд Фурье в интервале (–5; 5). Постройте графики функции $f(x)$ и частичных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$, $S_2(x)$ ряда Фурье в указанном интервале.

Решение. Данная функция не является ни четной, ни нечетной, поэтому вычислим ее коэффициенты Фурье по формуле (7.9):

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x+5)dx = \frac{x^2}{10} + x\Big|_{-5}^{5} = 10;$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x+5)\cos\frac{\pi n x}{5}dx = \frac{1}{\pi n}\left[(x+5)\sin\frac{\pi n x}{5}\Big|_{-5}^{5} - \int_{-5}^{5}\sin\frac{\pi n x}{5}dx\right] =$$

$$= \frac{5}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi n x}{5}\Big|_{-5}^{5} = 0;$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x+5)\sin\frac{\pi n x}{5}dx = \frac{1}{\pi n}\left[-(x+5)\cos\frac{\pi n x}{5}\Bigg|_{-5}^{5} + \int_{-5}^{5}\cos\frac{\pi n x}{5}dx\right] =$$

$$= \frac{-10\cos\pi n}{\pi n} + \frac{5}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi n x}{5}\Bigg|_{-5}^{5} = \frac{-10\cos\pi n}{\pi n} = (-1)^{n+1}\frac{10}{\pi n}.$$

При вычислении интеграла применена формула интегрирования по частям. Искомое разложение данной функции в ряд Фурье в интервале (–5; 5) имеет вид

$$x+5 = 5 + 10\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{5} = 5 + \frac{10}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} - \ldots\right).$$

Графики функций $f(x) = x + 5$, $S_0(x) = 5$, $S_1(x) = 5 + \frac{10}{\pi}\sin\frac{\pi x}{5}$ и $S_2(x) = 5 + \frac{10}{\pi}\sin\frac{\pi x}{5} - \frac{5}{\pi}\sin\frac{2\pi x}{5}$ в интервале (–5; 5) показаны на рис. 1.

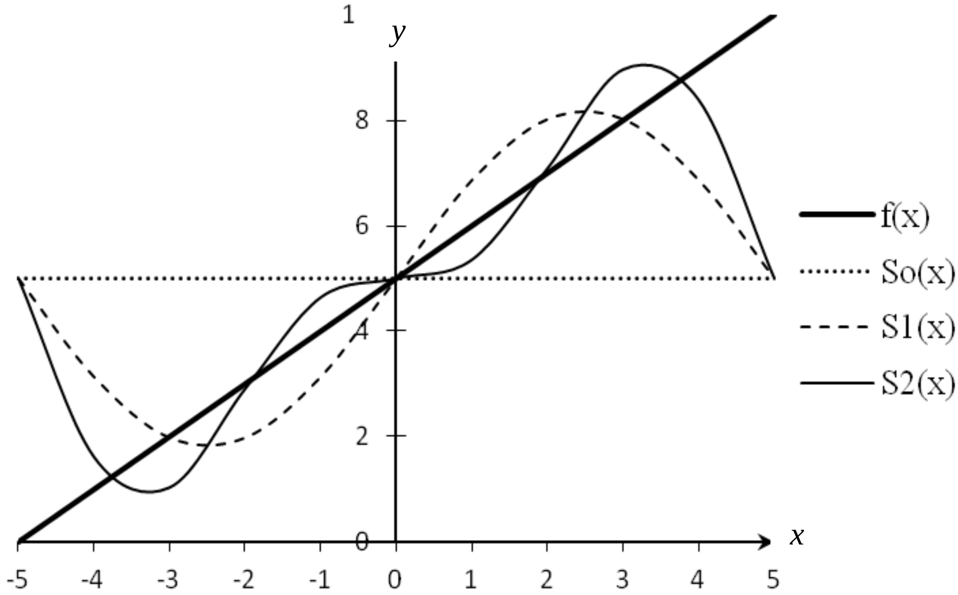


Рис. 1

ГЛАВА 8. ЭЛЕМЕНТЫ ГАРМОНИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 1. Периодические функции

Три пути ведут к знанию:
путь размышления – это путь самый благородный,
путь подражания – это путь самый легкий,
и путь опыта – это путь самый горький.

Конфуций

Функция $F(x)$ называется периодической, если есть такое положительное число T, при котором для любого x выполняется условие $F(x + T) = F(x)$. Это число T и называется периодом функции.

Обычно интересует наименьший не равный нулю период функции. Его для краткости называют просто периодом.

Классический пример периодических функций – тригонометрические функции: синус, косинус и тангенс. Период (наименьший) $\sin(x)$ и $\cos(x)$ равен 2π, т. е. $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$. Период $\mathrm{tg}(x)$ и $\mathrm{ctg}(x)$ равен π.

Если $F(x)$ – периодическая функция с периодом T и для нее определена производная, то эта производная $f(x) = F'(x)$ – тоже периодическая функция с периодом T. Например, производная от функции $\sin(x)$ равна $\cos(x)$, и она периодична. Беря производную от $\cos(x)$, получим $-\sin(x)$. Периодичность сохраняется неизменной. Однако обратное не всегда верно.

Если $F(x)$ – периодическая функция с периодом T, то $G(x) = aF(kx + b)$, где a, k и b – константы, a и $k \neq 0$, – тоже периодическая функция и ее период равен T/k. Например, $\sin(2x)$ – периодическая функция, период которой равен π.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – периодические функции и их периоды равны T_1 и T_2 соответственно, то сумма этих функций тоже может быть периодической, однако ее период не будет простой суммой периодов T_1 и T_2. Если результат деления T_1/T_2 – рациональное число, то сумма функций периодична, и ее период равен наименьшему общему кратному (НОК) периодов T_1 и T_2. Например, если период первой функции равен 12, а период второй – 15, то период их суммы будет равен НОК(12, 15) = 60.

Наглядно это можно представить так: функции идут с разной «шириной шага», но если отношение их ширин рационально, то через НОК шагов они снова сравняются, и их сумма начнет новый период.

Однако если соотношение периодов иррационально, то суммарная функция не будет периодической вовсе.

Если функция g имеет период T, то при любой функции f сложная функция $y = f(g(x))$ также имеет период T. Если функция f монотонная, то наименьший период сложной функции $y = f(g(x))$ будет равен T. Обратное утверждение неверно.

Более того, наименьший период сложной функции не всегда совпадает с наименьшим периодом функции $g(x)$.

Пример 1. Установите соответствие между периодической функцией:

1) $y = \sin 5\pi x$; 2) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{5\pi x}{4}$; 3) $y = \cos\dfrac{\pi x}{5}$

и значением ее периода

А) 4/5; *Б*) 5; *В*)10; *Г*) 2/5; *Д*) 5/4.

Решение. При решении воспользуемся таблицей:

Функция	*Период*	*Функция*	*Период*
$\sin(\omega x + \varphi)$	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$	$\operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$	$T = \dfrac{\pi}{\omega}$
$\cos(\omega x + \varphi)$	$T = \dfrac{2\pi}{\omega}$	$\operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$	$T = \dfrac{\pi}{\omega}$

1. Период функции $y = \sin 5\pi x$ $T = \dfrac{2\pi}{5\pi} = \dfrac{2}{5}$.

2. Период функции $y = \operatorname{ctg}\dfrac{5\pi x}{4}$ $T = \dfrac{\pi}{\frac{5\pi}{4}} = \dfrac{4}{5}$.

3. Период функции $y = \cos\dfrac{\pi x}{5}$ $T = \dfrac{2\pi}{\frac{\pi}{5}} = 10$.

Ответ: 1 – *Г*; 2 – *А*; 3 – *В*.

Пример 2. Найдите наименьший период функции $y = \sin 7\pi x + \operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{5}$.

Решение. Период функции $y_1 = \sin 7\pi x$ $T = \dfrac{2\pi}{7\pi} = \dfrac{2}{7}$. Период функции $y_2 = \operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{5}$ $T = \dfrac{\pi}{\frac{3\pi}{5}} = \dfrac{5}{3}$. $\text{НОК}\left(\dfrac{2}{7}, \dfrac{5}{3}\right) = \text{НОК}(2, 5) = 10$.

Следовательно, период функции $y = \sin 7\pi x + \operatorname{tg}\dfrac{3\pi x}{5}$ $T = 10$.

Ответ: 10.

§ 2. Гармонические колебания

О деле суди по исходу.
Овидий

Движение является периодическим, если уравнение движения $x(t)$ описывается периодической функцией. Движение считается *гармоническим*, если уравнение движения $x(t)$ может быть преобразовано в выражение одной функции косинуса:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi),$$

где A – амплитуда гармонических колебаний; ω – частота колебаний; φ – начальная фаза колебаний.

Движение считается *негармоническим*, если уравнение движения не удается записать в виде одной гармонической функции.

Пример 3. Амплитуда гармонических колебаний равна 0,2, период равен 2 и начальная фаза равна $\frac{\pi}{4}$. Найдите смещение колеблющейся точки от нулевого положения при $t = 0$.

Решение. Частота колебаний $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$, начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{4}$, амплитуда $A = 0{,}2$, уравнение движения $f(t) = 0{,}2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Подставив в функцию $f(t)$ численное значение $t = 0$, получим:

$$f(t) = 0{,}2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0{,}2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}1\sqrt{2}.$$

Ответ: $0{,}1\sqrt{2}$.

Пример 4. Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 2$, угловой частотой $\omega = 3$, начальная фаза $\varphi = \frac{\pi}{6}$ в момент времени $t = 0$. Найдите модуль скорости точки в момент времени $t = 0$.

Решение. Уравнение движения $f(t) = 2\cos\left(3t + \frac{\pi}{6}\right)$.

Найдем производную функции $f(t)$, т. е. мгновенную скорость:

$$v(t) = \frac{df(t)}{dt} = -6\sin\left(3t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Подставив в производную функции $f(t)$ численное значение $t = 0$, получим:

$$v(0) = -6\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -3, \quad |v(0)| = 3.$$

Ответ: 3.

§ 3. Ортогональные функции

Мы доказываем при помощи логики,
но открываем благодаря интуиции.
Анри Пуанкаре

Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a;\ b]$, если $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$.

Ортогональные функции имеют важное значение в теории рядов Фурье, в теории линейных операторов, квантовой физике.

Функции $f(x) = \sin kx$ и $g(x) = \sin nx$ являются ортогональными на любом промежутке длиной 2π (при $k \neq n$ и $k, n \in N$):

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \sin kx \cdot \sin nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^{a+2\pi}\left(\cos(n-k)x - \cos(n+k)x\right)dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \pi, & k = n \end{cases}$$

Функции $f(x) = \cos kx$ и $g(x) = \cos nx$ являются ортогональными на любом промежутке длиной 2π (при $k \neq n$ и $k, n \in N$):

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \cos kx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^{a+2\pi}\left(\cos(n-k)x + \cos(n+k)x\right)dx = \begin{cases} 0, & k \neq n \\ \pi, & k = n \end{cases}.$$

Функции $f(x) = \sin kx$ и $g(x) = \cos nx$ являются ортогональными на любом промежутке длиной 2π ($k, n \in N$):

$$\int\limits_a^{a+2\pi} \sin kx \cdot \cos nx dx = \frac{1}{2}\int\limits_a^{a+2\pi}\left(\sin(n-k)x + \sin(n+k)x\right)dx = 0.$$

Пример 5. Функцией, ортогональной к функции $f(x) = x$, $x \in [0; 2]$, является:

1) $g(x) = x$; 2) $g(x) = x - 1$; 3) $g(x) = x^2$; 4) $g(x) = 2 - x^2$.

Решение. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются ортогональными на отрезке $[a;\ b]$, если $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$. Проверим это условие для каждой функции:

1) $\int\limits_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3} \neq 0$; 2) $\int\limits_0^2 \left(x^2 - x\right)dx = \left.\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\right|_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3} \neq 0$;

3) $\int\limits_0^2 x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = \frac{16}{4} = 4 \neq 0$; 4) $\int\limits_0^2 \left(2x - x^3\right)dx = \left.\left(x^2 - \frac{x^4}{4}\right)\right|_0^2 = 4 - 4 = 0$.

Следовательно, функцией, ортогональной к функции $f(x) = x$ при $x \in [0; 2]$, является $g(x) = 2 - x^2$.

Ответ: 4) $g(x) = 2 - x^2$.

Пример 6. Функциями, ортогональными к функции $f(x) = x$, $x \in [-1;\ 1]$, являются:

1) $g(x) = \sin x$; 2) $g(x) = 2 - x^2$; 3) $g(x) = \cos x$; 4) $g(x) = e^x$.

Решение. Найдем ортогональные функции, не вычисляя интеграл $\int_a^b f(x)g(x)dx$. Воспользуемся свойством определенного интеграла, заданного на симметричном отрезке относительно начала координат.

Если $f(x) \ge 0$ на отрезке $[-a;\ a]$ и $f(x) = 0$ в некоторых точках данного отрезка, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0.$$

Для нечетной функции $f(x)$ имеем:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Если на полуинтервале $(0;\ a]$ $f(x) > |f(-x)|$, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx > 0.$$

1. Функция $f(x)\cdot g(x) = x\cdot\sin x \ge 0$ на отрезке $[-1;\ 1]$ и равна нулю только при $x = 0$, поэтому $\int_{-1}^{1} x\sin x dx > 0$.

2. Функция $f(x)\cdot g(x) = 2x - x^3$ является нечетной функцией, так как $f(-x) = -f(x)$, поэтому $\int_{-1}^{1}\left(2x - x^3\right)dx = 0$.

3. Функция $f(x)\cdot g(x) = x\cdot\cos x$ является нечетной функцией, так как $f(-x) = -f(x)$, поэтому $\int_{-1}^{1} x\cos x dx = 0$.

4. Функция $g(x) = xe^x$ на полуинтервале $(0;\ 1]$ больше нуля и модуля этой функции, поэтому $\int_{-1}^{1} xe^x dx > 0$.

Следовательно, функциями, ортогональными к функции $f(x) = x$ при $x \in [-1;\ 1]$, являются $g(x) = 2 - x^2$ и $g(x) = \cos x$.

Ответ: 2) и 3).

§ 4. Ряд Фурье. Теорема Дирихле

Ничего не откладывать на завтра –
вот секрет того, кто знает цену времени.
Э. Лабуле

Рядом Фурье для функции $f(x)$ на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ называется тригонометрический ряд

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),$$

если его коэффициенты a_n и b_n вычислены по формулам Фурье:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Теорема Дирихле (*достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье*). Если на промежутке $[-\pi;\ \pi]$ функция $f(x)$ кусочно-монотонная и ограниченная, то ее ряд Фурье сходится во всех точках этого промежутка, т. е. имеет сумму $S(x)$. При этом в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к самой функции:

$$S(x) = f(x);$$

в каждой точке разрыва x_k функции – к полусумме односторонних пределов функции слева и справа:

$$S(x_k)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to x_k-0}f(x)+\lim_{x\to x_k+0}f(x)\right);$$

в обеих граничных точках промежутка $[-\pi;\ \pi]$ – к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к этим точкам изнутри интервалов:

$$S(-\pi)=S(\pi)=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to-\pi+0}f(x)+\lim_{x\to\pi-0}f(x)\right).$$

Для четной функции $f(x) = f(-x)$ ряд Фурье не содержит синусов:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx,\qquad a_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx.$$

Для нечетной функции $f(x) = -f(-x)$ ряд Фурье содержит только синусы:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}b_n\sin nx,\qquad b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx.$$

Для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ на промежутке $[-l;\ l]$ ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right),$$

где $a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx$, $\quad a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$, $\quad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$.

При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье на промежутке $[0;\ 2l]$ пределы интегралов в формулах будут 0 и $2l$, а в случае произвольного промежутка $[a;\ b]$ длины $2l$ эти пределы будут a и $a + 2l$.

Пример 7. Дана функция $f(x) = x^3 - 2x$, $x \in [-\pi; \pi]$. Тогда коэффициент a_2 разложения $f(x)$ в ряд Фурье равен:

1) $\frac{2}{\pi}$; 2) $\frac{2\pi}{3}$; 3) 0; 4) $\pi^3 - 2\pi$; 5) 2π.

Решение. Функция $f(x) = x^3 - 2x$ является нечетной, так как $f(-x) = -f(x)$. Ряд Фурье нечетной функции при $x \in [-\pi; \pi]$ не содержит косинусов, поэтому все коэффициенты $a_n = 0$.

Ответ: 3) 0.

Пример 8. Дана функция $f(x) = x^2$, $x \in (-\pi; \pi)$. Найдите коэффициент a_0 разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье.

Решение. Найдем коэффициент по формуле Фурье:

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi}\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}.$$

Ответ: $\frac{2\pi^2}{3}$.

Пример 9. График функции $f(x)$ при $x \in [0; 2\pi]$ и его периодическое продолжение заданы на рис. 2. Тогда ряд Фурье для этой функции имеет вид:

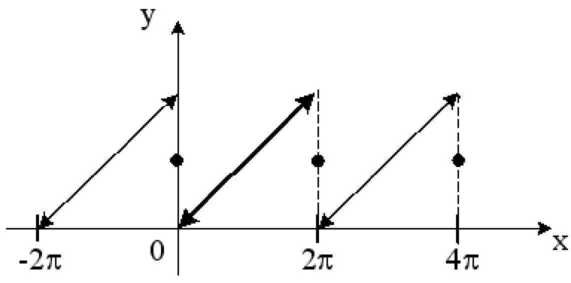


Рис. 2

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$; 2) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$;

3) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$; 4) $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$.

Решение. Если график функции сместить на постоянную величину $f(0)$ вниз вдоль оси OY, то функция будет нечетной. Следовательно, ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx.$$

Ответ: 4).

ГЛАВА 9. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В учении нельзя останавливаться.
Сюнь-дзы

§ 1. Двойные интегралы

1.1. Понятие двойного интеграла и его основные свойства

Пусть на замкнутой области S плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область S на n частей S_i, площади которых обозначим ΔS_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Выберем произвольные точки $M_i(x_i, y_i) \in S_i$ (рис. 3). Составим сумму $V_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$. Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области S. Обозначим через d наибольший из диаметров частей S_i.

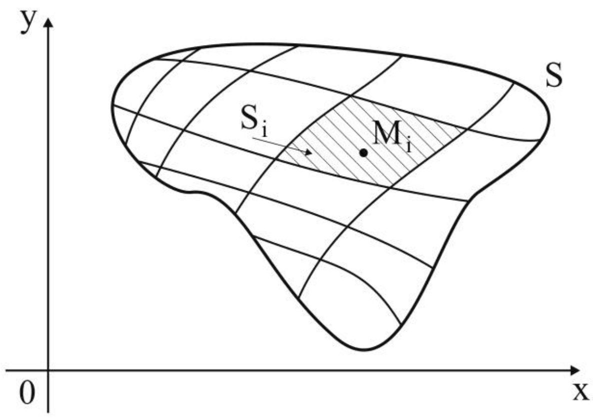


Рис. 3

Двойным интегралом

$$\iint_S f(x, y) dS \quad \left(\iint_S f(x, y) dxdy \right) \tag{9.1}$$

от функции $f(x, y)$, распространенным на область S, называется предел интегральной суммы $\lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta S_i$, если этот предел существует и не зависит ни от способа дробления области S на элементарные ячейки S_i, ни от выбора точек $M_i(x_i, y_i)$ в них. При этом $f(x, y)$ называется подынтегральной функцией, S – областью интегрирования, x, y – переменными интегрирования, dS ($dxdy$) – элементом площади.

Геометрический смысл двойного интеграла. Двойной интеграл (9.1) по области S от непрерывной неотрицательной функции $z = f(x, y)$ равен объему тела, ограниченного снизу конечной замкнутой областью S плоскости Oxy, сверху – поверхностью $z = f(x, y)$, а с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит граница области S. Назовем основные свойства двойного интеграла, аналогичные свойствам определенного интеграла при условии интегрируемости подынтегральных функций.

Аддитивность. Если область интегрирования S представляется в виде объединения двух областей S_1 и S_2, не имеющих общих внутренних точек, то

$$\iint_S f(x, y)dS = \iint_{S_1} f(x, y)dS + \iint_{S_2} f(x, y)dS .$$

Линейность. Двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от функций слагаемых:

$$\iint_S \left(f(x, y) + g(x, y)\right)dS = \iint_S f(x, y)dS + \iint_S g(x, y)dS ;$$

постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла:

$$\iint_S a \cdot f(x, y)dS = a\iint_S f(x, y)dS .$$

Монотонность. Если в области S функции $f(x, y)$ и $g(x, y)$ удовлетворяют неравенству $f(x, y) \geq g(x, y)$, то

$$\iint_S f(x, y)dS \geq \iint_S g(x, y)dS .$$

В частности, если $f(x, y) \geq 0$, то

$$\iint_S f(x, y)dS \geq 0 .$$

1.2. Методы вычисления

А. Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах

Двойные интегралы вычисляются сведением к *повторным* – обычным определенным интегралам по переменным x и y. Различают два основных вида области интегрирования.

1. Область интегрирования S – правильная относительно оси Oy. Область называется *правильной (x-трапецией)* относительно оси Oy, если она представляет собой криволинейную трапецию (рис. 4), заданную неравенствами: $a \leq x \leq b$, $\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – однозначные, непрерывные на отрезке $[a; b]$ функции. Любая прямая, параллельная оси Oy, пересекает границу области только в двух точ-

ках – M_1 и M_2, которые называются точкой входа и точкой выхода соответственно. Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y)dS=\int\limits_a^b\left(\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int\limits_a^b dx\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy\,. \qquad (9.2)$$

При вычислении сначала следует брать внутренний интеграл $\int\limits_{y=\varphi_1(x)}^{y=\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ по переменной y, считая при этом переменную x постоянной. Затем вычисляется внешний интеграл. Как правило, пределы при первом интегрировании являются переменными. Пределы при втором интегрировании всегда постоянны. Каждый из интегралов вычисляется с использованием формулы Ньютона – Лейбница для определенных интегралов.

Если окажется, что нижняя или верхняя линия границы области S состоит из нескольких участков, имеющих различные уравнения, то область S необходимо разбить прямыми, параллельными оси Oy, на части, в каждой из которых нижняя и верхняя линии границы определяются каждая только одним уравнением.

2. Область интегрирования S – правильная относительно оси Ox. Область S называется *правильной (y-трапецией)* относительно оси Ox, если она представляет собой криволинейную трапецию (рис. 5), заданную неравенствами: $c\le y\le d$, $\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)$, где $\psi_1(y)$, $\psi_2(y)$ – однозначные непрерывные на отрезке $[c;\,d]$ функции. Любая прямая, параллельная оси Ox, проходящая через точку $y\in[a;\,b]$, пересекает границу области S только в двух точках. Тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy=\int\limits_c^d dy\int\limits_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)dx\,, \qquad (9.3)$$

при этом сначала находят внутренний интеграл $\int\limits_{x=\psi_1(y)}^{x=\psi_2(y)} f(x,y)dx$, в котором y считается постоянной, затем полученный результат интегрируют по переменной y.

Если левая или правая линия границы области S состоит из нескольких участков с различными уравнениями, то область S необходимо разбить прямыми, параллельными оси Ox, на части, где левая и правая линии границы определяются каждая только одним уравнением.

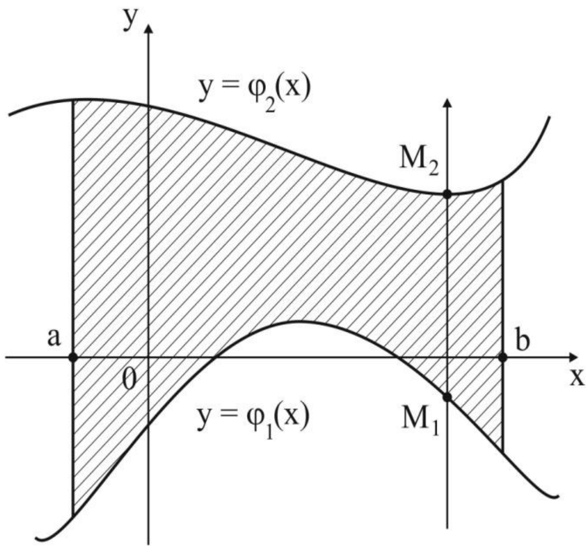


Рис. 4

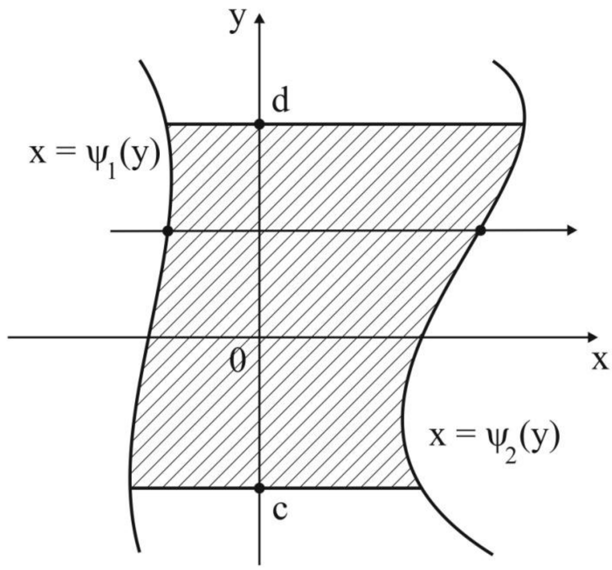


Рис. 5

Правые части формул (9.2) и (9.3) называются *повторными (двукратными)* интегралами.

Примечание 1. Пределы внутреннего интеграла будут постоянными только тогда, когда областью интегрирования будет прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.

Примечание 2. Если область S не является правильной ни относительно оси Oy, ни относительно оси Ox (существуют прямые, параллельные координатным осям, пересекающие границу области более чем в двух точках), то двойной интеграл по области S нельзя представить в виде двукратного. В этом случае, проводя прямые, параллельные координатным осям (рис. 6), область интегрирования разбивают (если это возможно) на конечное число областей, правильных или относительно оси Oy, или относительно оси Ox. Затем для каждой из полученных областей вычисляют интеграл с помощью двукратного. Складывая полученные результаты, в силу свойства аддитивности находят интеграл по всей области S.

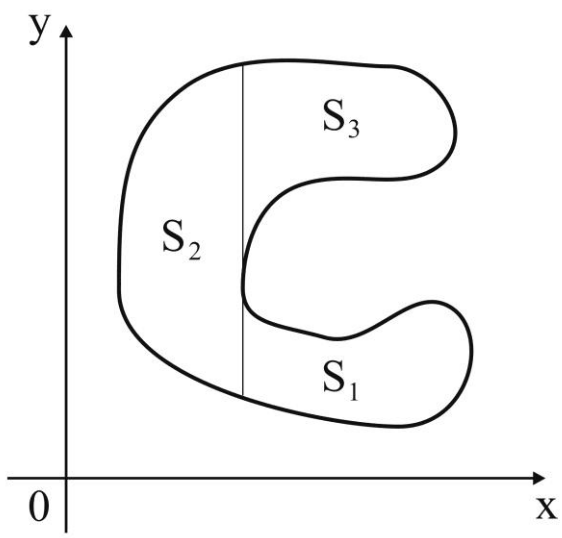


Рис. 6

На практике встречаются области интегрирования, которые являются правильными либо относительно оси Oy, либо относительно оси Ox, либо их можно разбить на несколько непересекающихся областей такого вида.

Примечание 3. Если область S правильная относительно любой координатной оси, то двойной интеграл можно вычислять как по формуле (9.2), так и по формуле (9.3), получая при этом один и тот же результат. В каждом конкретном случае выбирают ту или иную формулу для вычисления в зависимости от вида области S или подынтегральной функции. Об этом следует помнить, так как иногда один из вариантов оказывается более трудным для практического вычисления, чем другой. Например, выбирают такой порядок интегрирования, при котором не возникает необходимости разбивать область интегрирования на части.

Алгоритм сведения двойного интеграла к повторному:

1) построить область интегрирования;

2) установить порядок интегрирования (по какой переменной будет производиться внутреннее, а по какой – внешнее интегрирование);

3) расставить пределы интегрирования.

Б. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Введение новых переменных в двойных интегралах, как и в определенных, часто приводит к более простым вычислениям. Наиболее важной для практических приложений является замена декартовых координат x и y полярными координатами ρ и φ. Для преобразования двойного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, в *двойной интеграл в полярных координатах,* нужно в подынтегральном выражении прямоугольные координаты x и y заменить полярными координатами по формулам: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, а вместо $dxdy$ подставить $\rho d\varphi\, d\rho$. При этом уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, также следует преобразовать к полярным координатам.

Двойной интеграл в полярных координатах, так же как и в декартовых, вычисляют сведением к повторному. Рассмотрим два основных вида области интегрирования.

1. Полюс не принадлежит области интегрирования S, заключенной между лучами, выходящими из полюса $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, а любой луч $\varphi = const$ пересекает границу области не более чем в двух точках. Если $\rho = \rho_1(\varphi)$ и $\rho = \rho_2(\varphi)$ – значения радиус-вектора соответственно на входе и выходе из области S на луче $\varphi = const$ (рис. 7), тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\, d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{\rho=\rho_1(\varphi)}^{\rho=\rho_2(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho d\rho\,. \tag{9.4}$$

Примечание. Интегрирование в обратном порядке (сначала по φ, а затем по ρ) встречается крайне редко.

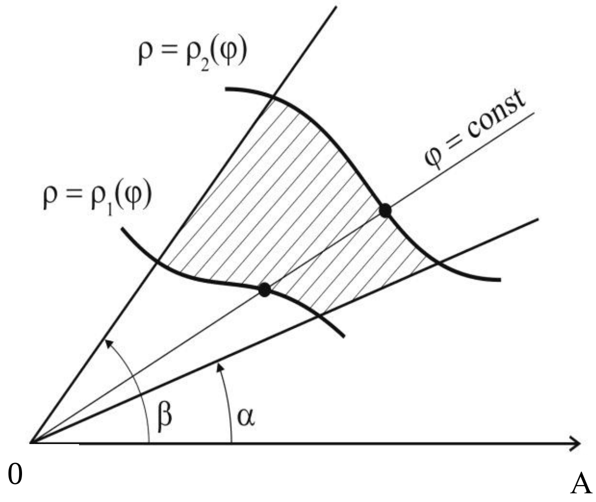


Рис. 7

2. Полюс принадлежит области интегрирования S, а любой луч $\varphi = const$ пересекает границу области только в одной точке, тогда двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint\limits_S f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho=\rho(\varphi)} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\, d\rho\,.$$

Примечание. Переход к полярным координатам полезен, если либо подынтегральная функция имеет вид $f(x^2 + y^2)$, либо область интегрирования S является кругом, кольцом или частью таковых.

1.3. Приложения двойного интеграла

Приведем примеры применения двойного интеграла.

Объем тела

Объем V цилиндрического тела, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – неотрицательная функция, снизу конечной замкнутой областью S плоскости Oxy, а с боков – цилиндрической поверхностью, с образующими, параллельными оси Oz, и с направляющей в виде границы области S, вычисляется по формуле

$$V = \iint\limits_S f(x, y)dxdy\,.$$

Площадь плоской фигуры

Площадь S плоской области D в прямоугольных координатах равна двойному интегралу:

$$S = \iint\limits_D dxdy\,;$$

в полярных координатах

$$S=\iint_D \rho\, d\varphi\, d\rho .$$

Масса плоской фигуры

Масса m плоской фигуры, занимающей область S с поверхностной плотностью $\eta=\eta(x,y)$, находится по формуле

$$m=\iint_S \eta(x,y)\,dxdy . \qquad (5)$$

Статические моменты и координаты центра тяжести

Статические моменты m_x и m_y относительно осей Ox и Oy соответственно, координаты центра тяжести $C(x_c;y_c)$ плоской фигуры, занимающей область S с поверхностной плотностью $\eta=\eta(x,y)$, вычисляются по формулам:

$$m_x=\iint_S y\eta(x,y)\,dxdy,\ m_y=\iint_S x\eta(x,y)\,dxdy,\quad x_c=\frac{m_y}{m},\ \ y_c=\frac{m_x}{m}.$$

Моменты инерции плоской фигуры

Моменты инерции плоской фигуры, занимающей область S с поверхностной плотностью $\eta=\eta(x,y)$, относительно осей Ox и Oy (I_x и I_y) и начала координат I_0 вычисляются по формулам:

$$I_x=\iint_D y^2\eta(x,y)\,dxdy,\ I_y=\iint_D x^2\eta(x,y)\,dxdy;$$

$$I_0=I_x+I_y=\iint_D (x^2+y^2)\eta(x,y)\,dxdy$$

соответственно.

Площадь поверхности

Пусть поверхность T задана уравнением $z=f(x,y)$. При этом $f(x,y)$ и ее частные производные первого порядка непрерывны в области S плоскости Oxy, в которую проецируется данная поверхность. Площадь S_T поверхности T вычисляется по формуле

$$S_T=\iint_S \sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}\,dxdy . \qquad (9.6)$$

Пример 1. Запишите двойной интеграл $\iint_S f(x,y)dS$ в виде повторных интегралов двумя способами:

1) S – область, ограниченная линиями $y=0$, $x^2+y^2=9$, $y\ge 0$;

2) S – область, ограниченная линиями $y=x^2-4x,\ \ y=x$.

Решение.

1. Изобразим область S на чертеже (рис. 8а, 8б). Область S правильная и относительно оси Oy, и относительно оси Ox, так как любая прямая, параллельная оси Oy (рис. 8а) или оси Ox (рис. 8б), пересекает

границу области только в двух точках. В первом случае постоянны пределы по переменной x, которые находим как абсциссы самой левой и самой правой точек области S: $x \in [-3; 3]$. Для каждого значения $x \in [-3; 3]$ переменная y принимает значения от 0 до $\sqrt{9-x^2}$, поэтому согласно (9.2)

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{y=0}^{y=\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dy.$$

Во втором случае постоянны пределы по переменной y. Находим их как наименьшее и наибольшее значения y во всей области S: $y \in [0; 3]$. Разрешив уравнение окружности $x^2 + y^2 = 9$ относительно x, получим, что для каждого значения $y \in [0; 3]$ переменная x принимает значения от $-\sqrt{9-y^2}$ 0 до $\sqrt{9-y^2}$, поэтому согласно (9.3)

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_{0}^{3} dy \int\limits_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx.$$

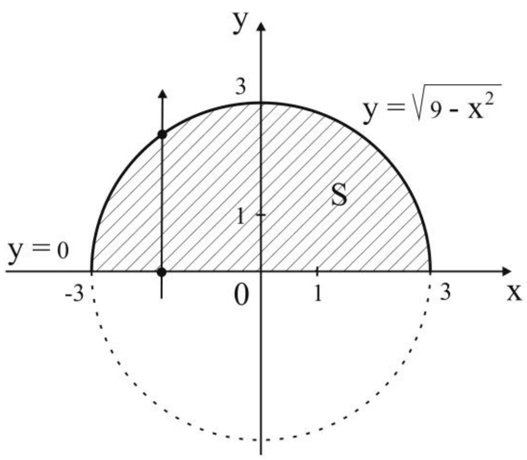


Рис. 8а

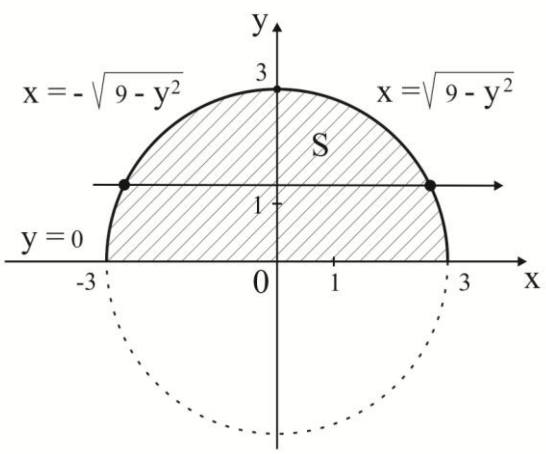


Рис. 8б

2. Изобразим область S на чертеже (рис. 9). Область S правильная и относительно оси Oy, и относительно оси Ox, так как любая прямая, параллельная оси Oy (рис. 9а) или оси Ox (рис. 9б), пересекает границу области только в двух точках. Решая совместно уравнения $y = x^2 - 4x$ и $y = x$, определим координаты точек пересечения линий, ограничивающих область S: $O(0,0)$ и $A(5,5)$. Если считать область S криволинейной трапецией (рис. 9а), заданной неравенствами: $0 \le x \le 5$, $x^2 - 4x \le y \le x$ (правильной относительно оси Oy), то по формуле (9.2)

$$\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_{0}^{5} dx \int\limits_{y=x^2-4x}^{y=x} f(x,y)dy.$$

Расставим пределы интегрирования в другом порядке. При входе в область S прямые, параллельные оси Ox, пересекают границу области по разным линиям (по параболе и по прямой), поэтому разобьем область S прямой $y=0$ на две области, S_1 и S_2 (рис. 9б). Область S_1 ограничена параболой $y=x^2-4x$ и прямой $y=0$. Пределы внешнего интеграла находим как наименьшее и наибольшее значения y во всей области S_1. Вершина параболы имеет координаты $(2;-4)$, поэтому постоянные (внешние) пределы интегрирования для области S_1 (по y) изменяются от -4 до 0. Для того чтобы найти переменные (внутренние) пределы интегрирования, разрешим уравнение $y=x^2-4x$ относительно x, выполнив несложные преобразования: $y+4=x^2-4x+4$, $y+4=(x-2)^2$, $x-2=\pm\sqrt{y+4}$, $x=2\pm\sqrt{y+4}$. Следовательно, для каждого значения $y\in[-4;0]$ переменная x принимает значения от $2-\sqrt{y+4}$ до $2+\sqrt{y+4}$.

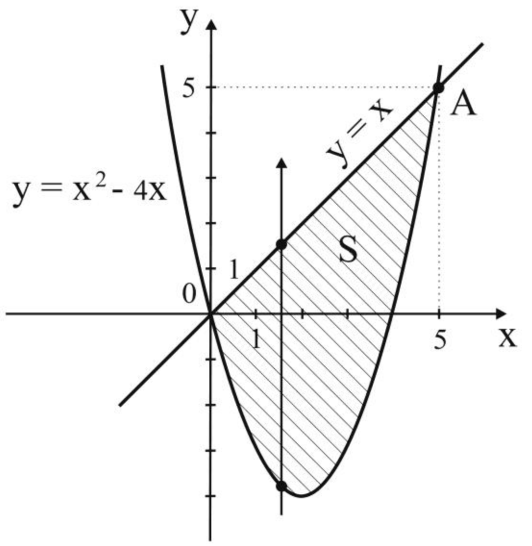


Рис. 9а

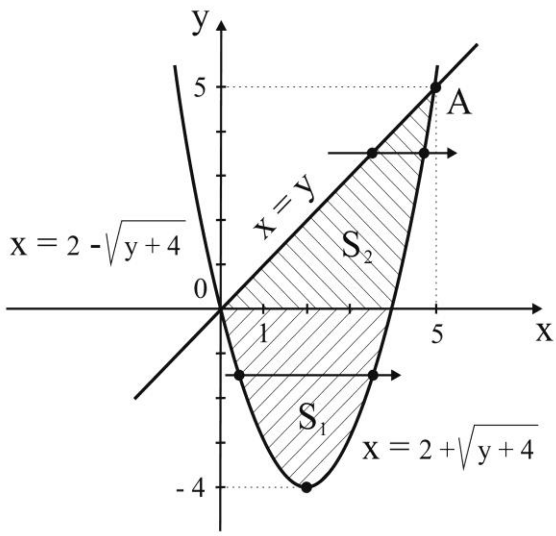


Рис. 9б

Область S_2 ограничена параболой $y=x^2-4x$ и прямыми $y=x$, $y=0$. Пределы внешнего интеграла находим как наименьшее и наибольшее значения y во всей области S_2: $y\in[0;3]$. Для каждого значения $y\in[0;3]$ переменная x принимает значения от y до $2+\sqrt{y+4}$. В итоге, используя свойство аддитивности интеграла и формулу (9.3), получим:

$$\iint\limits_S f(x,y)dS=\int\limits_{-4}^{0}dy\int\limits_{x=2-\sqrt{y+4}}^{x=2+\sqrt{y+4}}f(x,y)dx+\int\limits_{0}^{5}dy\int\limits_{x=y}^{x=2+\sqrt{y+4}}f(x,y)dx.$$

Ответ: 1) $\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_0^3 dy \int\limits_{x=-\sqrt{9-y^2}}^{x=\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dx$;

2) $\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_{-4}^0 dy \int\limits_{x=2-\sqrt{y+4}}^{x=2+\sqrt{y+4}} f(x,y)dx + \int\limits_0^5 dy \int\limits_{x=y}^{x=2+\sqrt{y+4}} f(x,y)dx$.

Пример 2. Вычислите интеграл $\iint\limits_S (8x^3y+6xy^2)dxdy$, взятый по прямоугольнику $S=\{(x,y): 1\le x\le 2, 3\le y\le 4\}$.

Решение. Заменим данный двойной интеграл повторным. Данная область интегрирования S – прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям, – является правильной и относительно оси Ox, и относительно оси Oy. Будем считать область S правильной относительно оси Oy. Расставим пределы интегрирования, используя формулу (9.2):

$$I=\iint\limits_S (8x^3y+6xy^2)dxdy=\int\limits_1^2 dx\int\limits_3^4 (8x^3y+6xy^2)dy.$$

Сначала вычислим внутренний интеграл. При этом подынтегральную функцию $8x^3y+6xy^2$ будем рассматривать как функцию от y при постоянной x:

$$I=\int\limits_1^2\left(8x^3\cdot\frac{y^2}{2}+6x\cdot\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_3^4 dx=\int\limits_1^2\left(\left(8x^3\cdot\frac{4^2}{2}+6x\cdot\frac{4^3}{3}\right)-\left(8x^3\cdot\frac{3^2}{2}+6x\cdot\frac{3^3}{3}\right)\right)dx=$$

$$=\int\limits_1^2(64x^3+128x-36x^3-54x)dx=\int\limits_1^2(28x^3+74x)dx=\left(28\cdot\frac{x^4}{4}+74\cdot\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^2=$$

$$=\left(28\cdot\frac{2^4}{4}+74\cdot\frac{2^2}{2}\right)-\left(28\cdot\frac{1^4}{4}+74\cdot\frac{1^2}{2}\right)=112+148-7-37=216.$$

Ответ: $I=216$.

Пример 3. Измените порядок интегрирования в повторном интеграле $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)dy$.

Решение.

1-й этап. Восстановим область интегрирования S и сделаем рисунок.

Внутренний интеграл взят по переменной y, поэтому его пределы получены из уравнений: $y=2x$, $y=3-x$. Это уравнения прямых, которые составляют часть границы области интегрирования S (рис. 10а). Решая совместно уравнения $y=2x$ и $y=3-x$, найдем координаты точки пересечения данных прямых:

$$\begin{cases} y = 2x, \\ 2x = 3 - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ 3x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x, \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2, \\ x = 1. \end{cases}$$

Внешний интеграл взят по переменной x; по условию абсцисса точек области S изменяется в пределах от 0 до 1. Следовательно, искомая область S ограничена прямыми $x = 0,\ \ y = 2x$ и $y = 3 - x$.

2-й этап. Запишем повторный интеграл в другом порядке с постоянными пределами интегрирования по y и переменными пределами интегрирования по x.

Прямые, параллельные оси Ox, при выходе из области S пересекают границу области по различным прямым, поэтому разобьем область S прямой $y = 2$ на две области, S_1 и S_2. Разрешив уравнения прямых относительно x, найдем пределы внутреннего интеграла. Пределы внешнего интеграла находим как наименьшее и наибольшее значения y во всей области $S_1\,(S_2)$. На основании рис. 10б, свойства аддитивности интеграла и формулы (9.3) имеем:

$$I = \iint\limits_{S_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{S_2} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{x=0}^{x=3-y} f(x,y)\,dx.$$

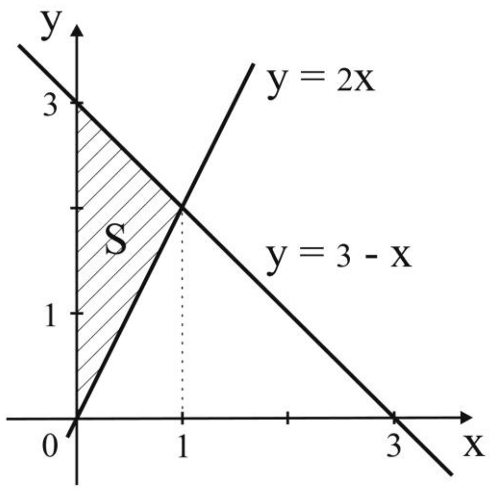


Рис. 10а

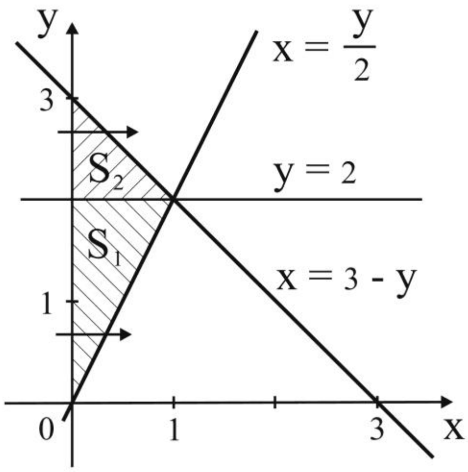


Рис. 10б

Примечание. В данном примере при вычислении двойного интеграла I исходим из того, что область S – правильная относительно оси Oy.

$$\textit{Ответ}:\ \int\limits_0^1 dx \int\limits_{2x}^{3-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_{x=0}^{x=\frac{y}{2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_2^3 dy \int\limits_{x=0}^{x=3-y} f(x,y)\,dx.$$

Пример 4. Измените порядок интегрирования в двукратном интеграле $J=\int\limits_{-1}^{2}dx\int\limits_{x^2}^{x+2}f(x,y)dy$.

Решение. Область интегрирования S ограничена кривыми $y = x^2$, $y = x + 2$ и $x = -1$, $x = 2$ (рис. 11). Отсюда, изменив роли осей координат, получим границы интегрирования внешнего интеграла: $y = 0$, $y = 1$, $y = 4$ и внутреннего интеграла: $x=-\sqrt{y}$, $x=\sqrt{y}$, $x=y-2$.

Тогда

$$J=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int\limits_{1}^{4}dy\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx.$$

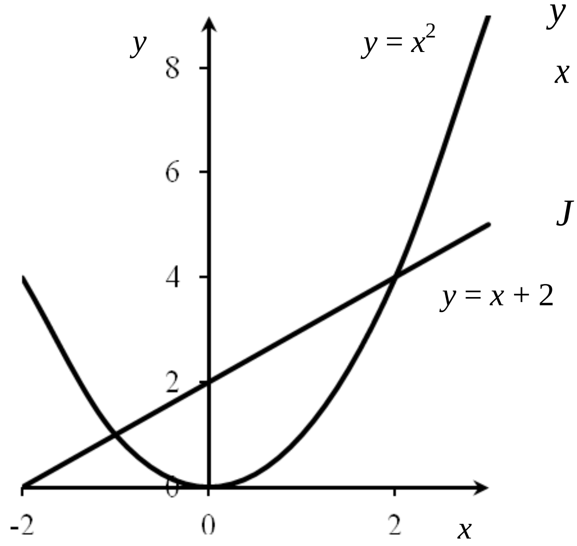


Рис. 11

Ответ: $J=\int\limits_{0}^{1}dy\int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx+\int\limits_{1}^{4}dy\int\limits_{y-2}^{\sqrt{y}}f(x,y)dx$.

Пример 5. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_{S}\frac{1}{(x^2+y^2)^2}dx\,dy$, где S – область, ограниченная линиями $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$, $y=2x$, $y=\frac{1}{2}x$.

Решение. Представим область S графически (рис. 12). В результате преобразования первого уравнения: $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2-2x=0$, $x^2-2x+1+y^2=1$ получим уравнение окружности с центром в точке $(1;0)$, радиуса 1:

$$(x-1)^2+y^2=1.$$

Аналогично получим, что второе уравнение определяет окружность с центром в точке $(2,0)$, радиуса 2.

$y=2x$ и $y=\frac{1}{2}x$ – линейные уравнения, определяющие на плоскости прямые, которые проходят через начало координат.

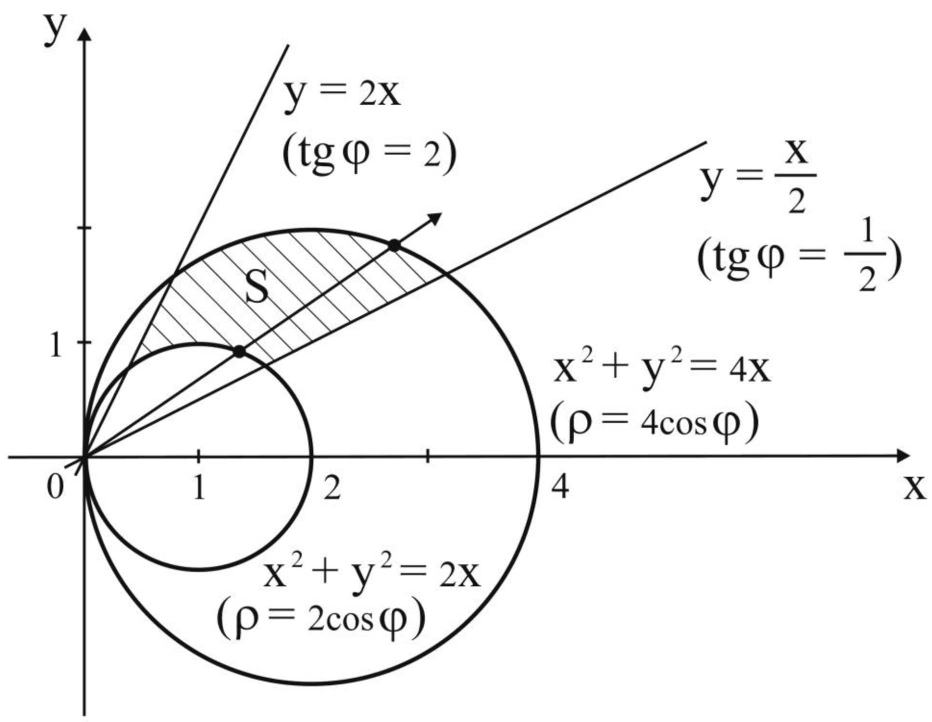


Рис. 12

В записи как уравнений линий, так и подынтегральной функции, ограничивающих область *S*, встречается выражение x^2+y^2, поэтому при вычислении данного интеграла удобно перейти к полярным координатам φ и ρ: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$.

Запишем в полярных координатах уравнение подынтегральной функции. Так как $x^2+y^2=(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2=\rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=\rho^2$, то

$$\frac{1}{(x^2+y^2)^2}=\frac{1}{(\rho^2)^2}=\frac{1}{\rho^4}.$$

Преобразуем уравнения линий, ограничивающих область *S*, к полярным координатам: $\rho^2=2\rho\cos\varphi$ или $\rho=2\cos\varphi$; $\rho^2=4\rho\cos\varphi$ или $\rho=4\cos\varphi$; $\rho\sin\varphi=2\rho\cos\varphi$ или $\mathrm{tg}\varphi=2$, откуда $\varphi=\mathrm{arctg}2$; $\rho\sin\varphi=\frac{1}{2}\rho\cos\varphi$ или $\mathrm{tg}\varphi=\frac{1}{2}$, откуда $\varphi=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$.

Из рисунка видно, что угол φ меняется в постоянных пределах от $\mathrm{arctg}\frac{1}{2}$ до $\mathrm{arctg}2$. Луч, выходящий из полюса, при входе в область *S* пересекает окружность $\rho=2\cos\varphi$, при выходе – окружность $\rho=4\cos\varphi$. Поэтому $\rho=2\cos\phi$, $\rho=4\cos\varphi$ – нижняя и верхняя границы интегрирования соответственно. По формуле (9.4)

$$I=\iint_S \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\,dx\,dy=\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=4\cos\varphi} \frac{1}{\rho^4}\rho\,d\rho.$$

Вычислим данный интеграл:

$$I=\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=4\cos\varphi} \frac{1}{\rho^3}\,d\rho=\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2} d\varphi \int_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=4\cos\varphi} \rho^{-3}\,d\rho=\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2} \left.\frac{\rho^{-2}}{-2}\right|_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=4\cos\varphi} d\varphi=$$

$$=\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2} \left.\frac{1}{-2\rho^2}\right|_{\rho=2\cos\varphi}^{\rho=4\cos\varphi} d\varphi=-\frac{1}{2}\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2}\left(\frac{1}{(4\cos\varphi)^2}-\frac{1}{(2\cos\varphi)^2}\right)d\varphi=$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2}\frac{1}{16\cos^2\varphi}d\varphi-\int_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2}\frac{1}{4\cos^2\varphi}d\varphi\right)=-\frac{1}{32}\operatorname{tg}\varphi\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2}+\frac{1}{8}\operatorname{tg}\varphi\Big|_{\operatorname{arctg}\frac{1}{2}}^{\operatorname{arctg}2}=$$

$$=-\frac{1}{32}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)+\frac{1}{32}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{8}\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)-\frac{1}{8}\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)=$$

$$=-\frac{1}{32}\cdot 2+\frac{1}{32}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot 2-\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{9}{64}.$$

Ответ: $\frac{9}{64}$.

Пример 6. Найдите массу пластины, занимающей область S, с поверхностной плотностью $\eta=e^{x^2+y^2}$. S – часть кольца $1\le x^2+y^2\le 4$, расположенная в первой четверти (рис. 13).

Решение. Масса пластины с заданной плотностью находится по формуле (9.5), поэтому $m=\iint_S e^{x^2+y^2}\,dx\,dy$. При вычислении данного интеграла воспользуемся переходом к полярным координатам φ и ρ: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$. Так как $x^2+y^2=\rho^2$ (см. пример 5), то область S определяется неравенствами: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $1\le\rho\le 2$.

Тогда

$$m=\iint_S e^{x^2+y^2}\,dx\,dy=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2 e^{\rho^2}\rho\,d\rho=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_1^2 e^{\rho^2}\,d\rho^2=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\rho^2}\Big|_1^2\,d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(e^4-e^1)\,d\varphi=\frac{1}{2}(e^4-e)\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e^4-e)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}(e^4-e).$$

Примечание. В декартовых координатах этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях. Его можно найти, только используя методы численного интегрирования.

Ответ: $m = \frac{\pi}{4}(e^4 - e)$.

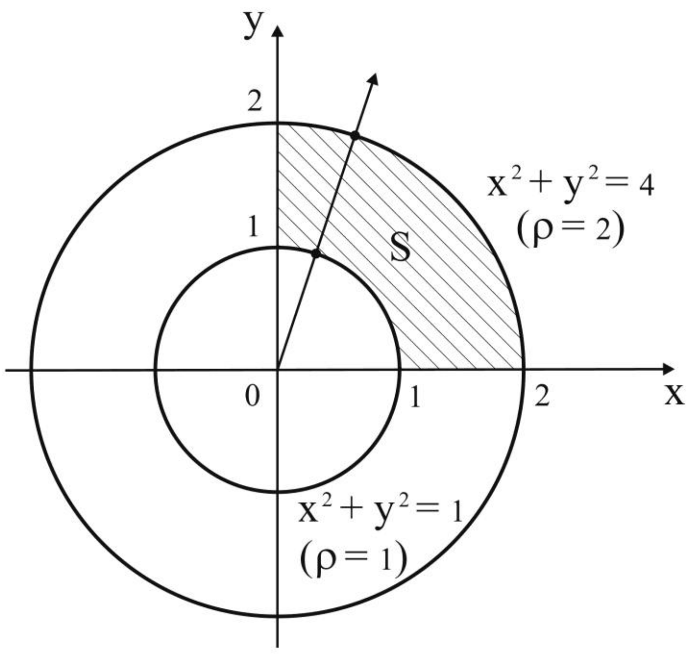


Рис. 13

Пример 7. Найдите площадь поверхности $f(x,y) = 8 + \sqrt{x^2+y^2}$, где область S ограничена линиями $y = \frac{x^2}{2}$ и $y = 2$.

Решение. Площадь поверхности по формуле (9.6)

$$S_T = \iint\limits_S \sqrt{1 + f_x'^2(x,y) + f_y'^2(x,y)}\, dxdy .$$

Изобразим область S на плоскости xOy (рис. 14). Найдем пределы интегрирования, считая область S правильной относительно оси Oy. Абсциссы точек пересечения линий, ограничивающих область S, определим из системы уравнений:

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2}, \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2, \\ y = 2. \end{cases}$$

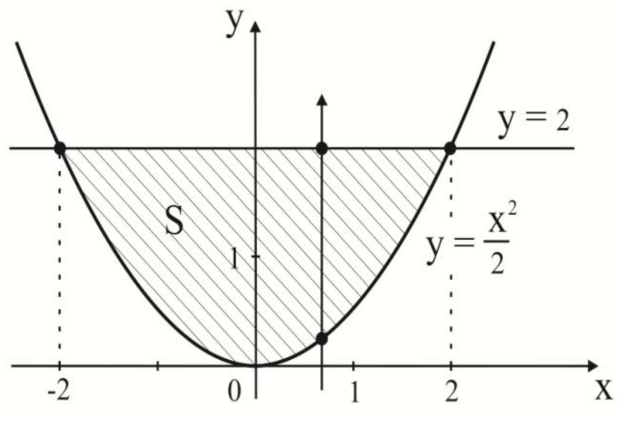


Рис. 14

Следовательно, область интегрирования

$$S=\left\{(x,y)\in R^2 : -2\le x\le 2,\ \frac{x^2}{2}\le y\le 2\right\}.$$

Найдем частные производные функции $f(x,y)=8+\sqrt{x^2+y^2}$:

$$f_x'=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad f_y'=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Отсюда

$$\sqrt{1+f_x'^2(x,y)+f_y'^2(x,y)}=\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}=$$

$$=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Искомая площадь поверхности

$$S=\int_{-2}^{2}dx\int_{\frac{x^2}{2}}^{2}\sqrt{2}dy=\sqrt{2}\int_{-2}^{2}y\Big|_{\frac{x^2}{2}}^{2}dx=\sqrt{2}\int_{-2}^{2}\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\sqrt{2}\int_{0}^{2}\left(2-\frac{x^2}{2}\right)dx=$$

$$=2\sqrt{2}\left(2x-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=2\sqrt{2}\left(2\cdot 2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2^3}{3}-\left(2\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot\frac{0^3}{3}\right)\right)=2\sqrt{2}\left(4-\frac{4}{3}\right)=$$

$$=2\sqrt{2}\left(4-\frac{4}{3}\right)=\frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

Примечание. При интегрировании четной функции $f(x)=2-\dfrac{x^2}{2}$ в симметричных пределах от -2 до 2 использована формула $\int_{-a}^{a}f(x)dx=2\int_{0}^{a}f(x)dx.$

Ответ: $S=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}.$

§ 2. Тройные интегралы

Живи и жить давай другим.
И.В. Гете

2.1. Понятие тройного интеграла. Основные свойства

Пусть в ограниченной замкнутой области V пространства $Oxyz$ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Разобьем область V произвольным образом поверхностями на n ячеек V_i, объемы которых обозначим ΔV_i (i = 1, 2, …, n). Возьмем произвольные точки $M_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ (рис. 15). Составим сумму $P_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$, которая называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ в области V. Обозначим через d наибольший из диаметров ячеек V_i.

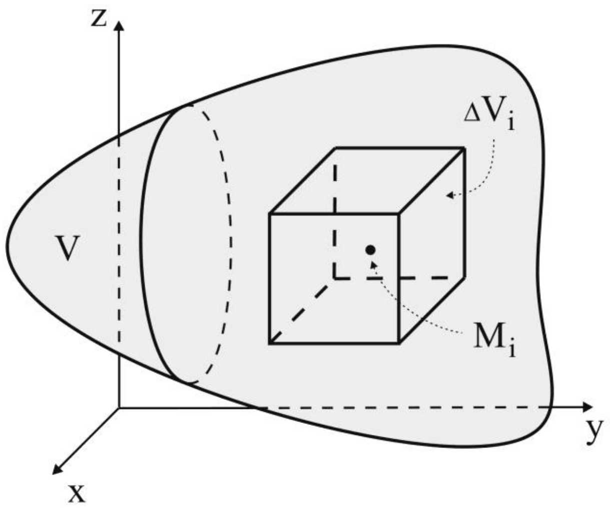


Рис. 15

Тройным интегралом $\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dV$ от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область V, называется предел интегральной суммы $\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i$, если этот предел существует и не зависит от формы ячеек ΔV_i и выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ в них. При этом $f(x, y, z)$ называется подынтегральной функцией; V – областью интегрирования; x, y и z – переменными интегрирования; dV – элементом объема. В прямоугольных координатах элемент объема $dV = dxdydz$.

Тройной интеграл представляет собой непосредственное обобщение двойного интеграла на случай, когда областью интегрирования является пространственная область. Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла, перечисленным в § 1 (см. п. 1.1): интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от всех слагаемых; постоянный множитель можно вынести за знак интеграла; область интегрирования можно разбить на части, найти интеграл на каждой из частей и сложить полученные результаты.

2.2. Вычисление тройного интеграла

Пусть пространственная область V ограничена замкнутой поверхностью G и обладает следующими свойствами:

любая прямая, параллельная оси Oz, пересекает поверхность G не более чем в двух точках;

область V проецируется на плоскость Oxy в правильную либо относительно оси Oy, либо относительно оси Ox двумерную область S.

Область V при наличии указанных свойств называют *правильной пространственной областью* (например, параллелепипед, пирамида параболоид).

А. Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению трех обыкновенных определенных интегралов. Рассмотрим два наиболее типичных случая.

1. Тройной интеграл по прямоугольному параллелепипеду V: $a \le x \le b$, $c \le y \le d$, $p \le z \le q$ вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_p^q f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_c^d \left[\int\limits_p^q f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx. \qquad (9.7)$$

Пределы интегрирования постоянны во всех трех интегралах, поэтому интегрирование можно производить в любом порядке, пределы интегрирования при этом будут сохраняться.

2. Область V ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x,y)$, сверху – поверхностью $z = z_2(x,y)$, т. е. $z_1(x,y) \le z_2(x,y)$; с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz. Функции $z_1(x,y)$ и $z_2(x,y)$ непрерывны в замкнутой области S, являющейся проекцией V на плоскость Oxy. Если, кроме того, область S ограничена непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$, $a \le x \le b$, $y_1(x) \le y_2(x)$, то для любой непрерывной функции $f(x,y,z)$ тройной интеграл вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz = \int\limits_a^b \left\{ \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx. \qquad (9.8)$$

В результате интегрирования по z (x и y рассматриваются как постоянные) и подстановки пределов в фигурных скобках получится функция от x и y. Интегрируя далее эту функцию по области S, получим значение тройного интеграла.

Примечания.

1. Если область V более сложная, чем рассмотренные выше, то ее разбивают на конечное число областей V_1, V_2, …, V_k указанных видов и к каждой из них применяют соответствующую формулу – либо (9.7), либо (9.8). Интеграл по всей области в силу свойства аддитивности равен сумме интегралов по каждой из областей V_i.

2. Порядок интегрирования может быть иным.

Б. Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах

Для вычисления тройного интеграла часто используют так называемые цилиндрические координаты. Переход тройного интеграла в прямоугольных координатах в тройной интеграл в цилиндрических координатах осуществляется по формулам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z = z$; элемент объема $dV=\rho\, d\varphi\, d\rho\, dz$. При этом уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования, также необходимо преобразовать к цилиндрическим координатам:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{\tilde V} f(\rho\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)\rho\ d\varphi\ d\rho\ dz. \qquad (9.9)$$

Вычисление тройного интеграла в цилиндрических координатах проводится на основании тех же принципов, что и в случае декартовых координат.

К цилиндрическим координатам удобно переходить, если область интегрирования образована цилиндрической поверхностью, а также если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2,z)$.

В. Вычисление тройного интеграла в сферических координатах

Переход тройного интеграла в прямоугольных координатах в тройной интеграл в сферических координатах осуществляется по формулам: $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $\mathrm{z}=\rho\cos\theta$, элемент объема $dV=\rho^2\sin\theta\ d\varphi\, d\rho\, d\theta.$ Уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к сферическим координатам. Формула преобразования тройного интеграла от декартовых координат к сферическим имеет вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=$$

$$=\iiint\limits_{\tilde V} f(\rho\sin\theta\cos\phi,\ \rho\sin\theta\sin\phi,\ \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\ d\phi\ d\rho\ d\theta. \qquad (9.10)$$

Применение сферических координат особенно удобно, если область интегрирования V – шар с центром в начале координат (уравнение его границы $x^2+y^2+z^2=R^2$ в сферических координатах имеет простой вид $\rho=R$) или шаровое кольцо, а также если подынтегральная функция имеет вид $f(x^2+y^2+z^2)$.

Примечание. Применение той или иной системы координат, как уже отмечалось, зависит и от области интегрирования и от вида подынтегральной функции. Иногда следует написать интеграл в разных системах координат и решить, в какой из них вычисление будет наиболее простым.

2.3. Приложения тройного интеграла

Объем тела

Объем пространственной области G вычисляется по формуле

$$V=\iiint\limits_G dx\,dy\,dz. \tag{9.11}$$

Применение тройного интеграла к решению задач физики и механики

Масса m тела, занимающего область V, с объемной переменной плотностью $\eta=\eta(x,y,z)$, статические моменты m_{yz}, m_{xz} и m_{xy}, координаты центра тяжести $C(x_c;\ y_c;\ z_c)$, моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz (I_x, I_y и I_z) и начала координат I_0 определяются по формулам:

$$m=\iiint\limits_V \eta(x,y,z)\,dxdydz; \qquad m_{yz}=\iiint\limits_V x\eta(x,y,z)\,dxdydz;$$

$$m_{xz}=\iiint\limits_V y\eta(x,y,z)\,dxdydz; \qquad m_{xy}=\iiint\limits_V z\eta(x,y,z)\,dxdydz;$$

$$x_c=\frac{m_{yz}}{m}; \qquad y_c=\frac{m_{xz}}{m}; \qquad z_c=\frac{m_{xy}}{m};$$

$$I_x=\iiint\limits_V (y^2+z^2)\eta(x,y,z)\,dxdydz; \quad I_y=\iiint\limits_V (x^2+z^2)\eta(x,y,z)\,dxdydz$$

соответственно.

Примечание. Функцию $\eta=\eta(x,y,z)$ будем считать непрерывной.

Пример 8. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V x^3y\sin(xyz)dx\,dy\,dz$, где область V – куб: $0\le x\le 1$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le 1$.

Решение. По формуле (9.7) вычислим последовательно три обыкновенных (однократных) определенных интеграла, интегрируя вначале по z, затем по y и, наконец, по x:

$$\iiint\limits_V x^3 y\sin(xyz)dx\,dy\,dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 x^3 y\sin(xyz)dz = \int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 x^3 y\frac{-\cos(xyz)}{xy}\Bigg|_0^1 dy =$$

$$= -\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 x^2(\cos(xy\cdot 1) - \cos 0)dy = -\int\limits_0^1 x^2\left(\frac{\sin(xy)}{x} - 1\cdot y\right)\Bigg|_0^1 dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 x^2\left(\frac{\sin(x\cdot 1)}{x} - 1 - \frac{\sin(x\cdot 0)}{x} + 0\right)dx = -\int\limits_0^1 x^2\left(\frac{\sin x}{x} - 1\right)dx =$$

$$= -\int\limits_0^1 (x\sin x - x^2)dx = -\left(-x\cos x + \sin x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -1\cdot\cos 1 + \sin 1 - \frac{1^3}{3} =$$

$$= -\cos 1 + \sin 1 - \frac{1}{3}.$$

На последнем шаге мы воспользовались методом интегрирования по частям:

$$\int x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin x\,dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cdot\cos x - \int(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x\cos x + \int\cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Ответ: $-\cos 1 + \sin 1 - \dfrac{1}{3}.$

Пример 9. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(3+x+y+z)^3}$, где область V ограничена поверхностями: $x+y+z=2$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Данная область V правильная. Уравнение $x+y+z=2$ опре-деляет плоскость, отсекающую на осях координат отрезки, равные 2; $x=0$, $y=0$, $z=0$ – координатные плоскости. Построим данные плоскости. Ограниченная ими область V – пирамида (рис. 16а). Любая прямая, проходящая внутри этой пирамиды параллельно оси Oz, пересекает границу указанной области в двух точках. Проекцией пирамиды на плоскость Oxy является треугольник (S), ограниченный прямыми: $x+y=2$, $x=0$, $y=0$ (рис. 16б). Найдем пределы интегрирования по каждой из переменных. Пределы внешнего интеграла находим как наименьшее и наибольшее значения x во всей области S: $x\in[0;2]$. Для каждого значения $x\in[0;2]$ переменная y принимает значения от 0 до $2-x$. Для переменной z нижним пределом будет $z=0$, а верхним – значение z, полученное из уравнения плоскости $x+y+z=2$, т. е. $z=2-x-y$. Запишем данный тройной интеграл через повторные и последовательно вычислим интегралы, начиная с внутреннего.

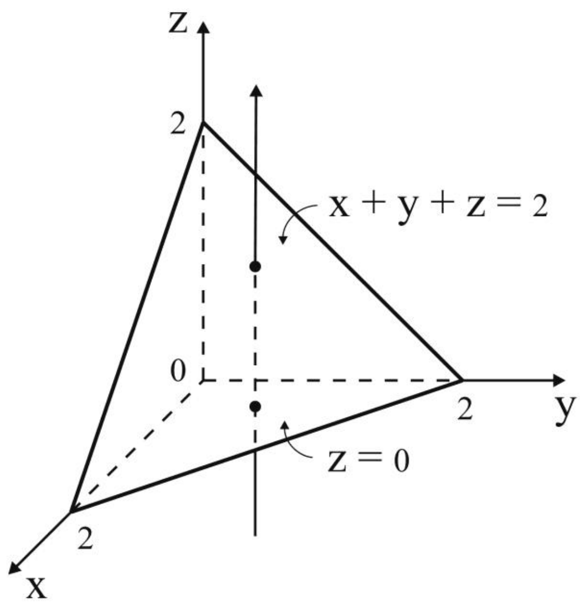


Рис. 16а

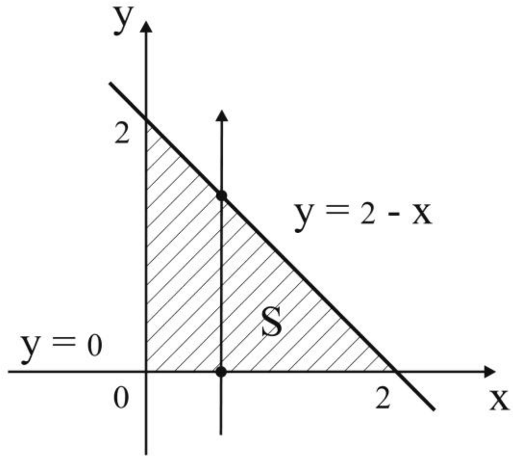


Рис. 16б

$$\iiint\limits_V \frac{dxdydz}{(3+x+y+z)^3} = \iint\limits_S dxdy \int\limits_0^{2-x-y} \frac{dz}{(3+x+y+z)^3} = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} \frac{dz}{(3+x+y+z)^3} =$$

$$= \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} dy \int\limits_0^{2-x-y} (3+x+y+z)^{-3}\,dz = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (3+x+y+z)^{-2}\Big|_0^{2-x-y} dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} ((3+x+y+2-x-y)^{-2} - (3+x+y+0)^{-2})dy =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} ((5)^{-2} - (3+x+y)^{-2})dy = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{25}y + (3+x+y)^{-1}\right)\Bigg|_0^{2-x} dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(\frac{1}{25}(2-x) + (3+x+2-x)^{-1} - (3+x+0)^{-1}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(\frac{2}{25} - \frac{1}{25}x + \frac{1}{5} - \frac{1}{x+3}\right)dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^2 \left(\frac{7}{25} - \frac{1}{25}x - \frac{1}{x+3}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{25}x - \frac{1}{25}\cdot\frac{x^2}{2} - \ln(x+3)\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{7}{25}\cdot 2 - \frac{1}{25}\cdot\frac{2^2}{2} - \ln(2+3)\right) + \frac{1}{2}(-\ln 3) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{12}{25} - \ln 5\right) - \frac{1}{2}\ln 3 = -\frac{6}{25} + \frac{1}{2}\ln\frac{5}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{6}{25} + \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{5}{3}.$

Пример 10. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz$, где область V определяется неравенствами: $x^2+y^2\le 4$, $0\le z\le x^2+y^2$.

Решение. Область V ограничена круговым цилиндром $x^2+y^2=4$, плоскостью $z=0$ (координатная плоскость Oxy) и параболоидом $z=x^2+y^2$ (рис. 17). Проекцией области V на плоскость Oxy является круг $x^2+y^2\le 2^2$.

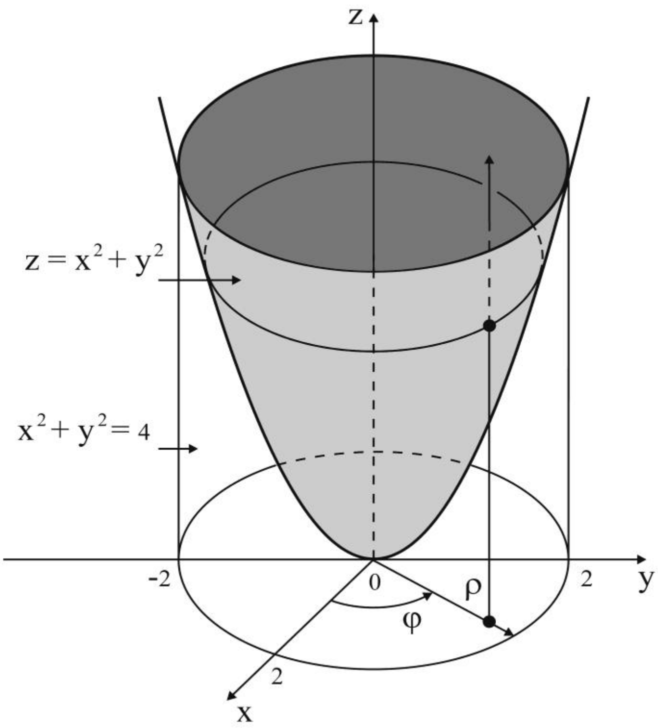


Рис. 17

В записи уравнений поверхностей встречается выражение x^2+y^2, поэтому целесообразно перейти к цилиндрическим координатам: $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $z=z$. Используя соотношение $x^2+y^2=\rho^2$, запишем уравнения поверхностей, ограничивающих область V, в цилиндрических координатах: $\rho^2\le 4$, $0\le z\le\rho^2$. При переходе к цилиндрическим координатам образом области V будет область $\widehat{V}$, определяемая неравенствами: $0\le\varphi\le 2\pi$, $0\le\rho\le 2$, $0\le z\le\rho^2$ (прямая, параллельная оси Oz, пересекает на входе в область V ее границу – плоскость $z=0$, а на выходе – параболоид $z=x^2+y^2$). По формуле (9.9)

$$\iiint\limits_V x^2y^2dxdydz=\iiint\limits_{\widehat{V}}(\rho\cos\varphi)^2(\rho\sin\varphi)^2\cdot\rho d\varphi\, d\rho\, dz=$$

$$=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2 d\rho\int_0^{\rho^2}(\cos\varphi\sin\varphi)^2\rho^5dz=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\frac{1}{4}(2\cos\varphi\sin\varphi)^2\rho^5 z\Big|_0^{\rho^2}d\rho=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(\sin 2\varphi)^2\rho^5\cdot\rho^2d\rho=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\left(\frac{1-\cos 4\varphi}{2}\right)\cdot\rho^7d\rho=$$

$$=\frac{1}{8}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\cdot\frac{\rho^8}{8}\Big|_0^2d\varphi=\frac{1}{64}\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)\cdot 2^8d\varphi=4\int_0^{2\pi}(1-\cos 4\varphi)d\varphi=$$

$$=4\left(\varphi-\frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\Big|_0^{2\pi}=4\cdot 2\pi=8\pi.$$

Ответ: 8π.

Пример 11. Вычислите тройной интеграл $\iiint\limits_V 11(x^2+y^2+z^2)^4\,dxdydz$, где область V – часть шара $x^2+y^2+z^2\le 4$, расположенная в первом октанте.

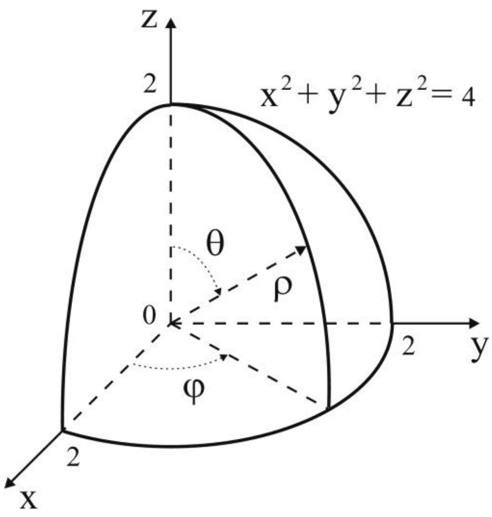


Рис. 18

Решение. Область V – часть шара (рис. 18), поэтому при вычислении интеграла воспользуемся переходом к сферическим координатам: $x=\rho\sin\theta\cos\varphi$, $y=\rho\sin\theta\sin\varphi$, $z=\rho\cos\theta$. При этом область V перейдет в область $\hat{V}$, определяемую неравенствами: $0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $0\le\rho\le 2$. Используя соотношение $x^2+y^2+z^2=\rho^2$ и формулу (9.10), получим:

$$\iiint\limits_V 11(x^2+y^2+z^2)^4\,dxdydz=11\iiint\limits_{\hat{V}}(\rho^2)^4\cdot\rho^2\sin\theta\,d\varphi\,d\rho\,d\theta=$$

$$=11\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int\limits_0^{2}\rho^{10}\sin\theta d\rho=11\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cdot\left.\frac{\rho^{11}}{11}\right|_0^2 d\theta=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}2^{11}\sin\theta\,d\theta=$$

$$=-2^{11}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=2^{11}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi=2^{11}\cdot\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=2^{11}\cdot\frac{\pi}{2}=2^{10}\pi.$$

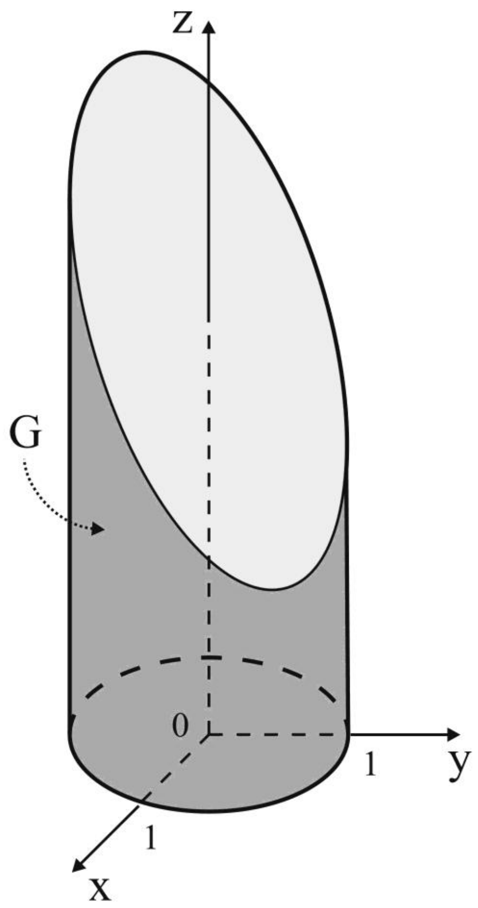
Ответ: $2^{10}\pi$.

Пример 12. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями: $z=0$, $x^2+y^2=1$, $x+y+z=3$. Сделайте чертежи данного тела и его проекции на плоскость Oxy.

Решение. Тело, ограниченное плоскостями $z=0$, $x+y+z=3$ и цилиндром $x^2+y^2=1$, изображено на рис. 19а. Его проекцией на плоскость Oxy является круг радиусом $r=1$ (рис. 19б). Согласно формуле (9.11) объем данного тела

$$V=\iiint\limits_G dxdydz=\iint\limits_S dxdy\int\limits_0^{3-x-y}dz=\iint\limits_S(3-x-y)dxdy.$$

Линия, ограничивающая плоскую область S, есть окружность $x^2+y^2=1$, поэтому воспользуемся переходом к полярным координатам: $x=\rho\cos\varphi$; $y=\rho\sin\varphi$; $dxdy=\rho\,d\varphi\,d\rho$.



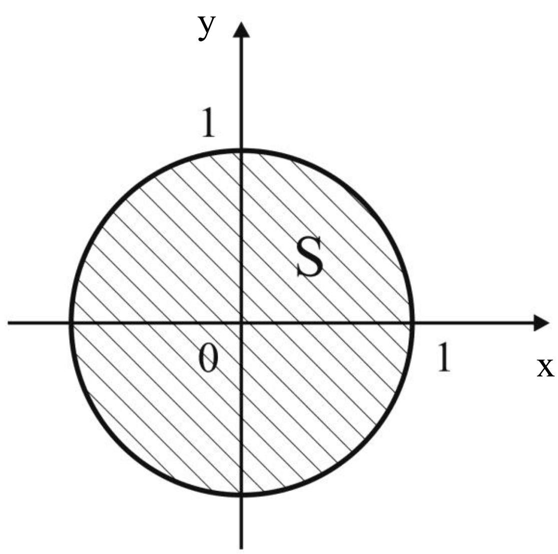


Рис. 19б

Рис. 19а

Имеем:

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1(3-\rho\cos\varphi-\rho\sin\varphi)\rho\,d\rho=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3\rho^2}{2}-\frac{\rho^3}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1}d\varphi=$$

$$=\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)d\varphi=3\pi\,.$$

Ответ: $V=3\pi$.

§ 3. Криволинейные интегралы

3.1. Понятие криволинейного интеграла первого рода и его основные свойства

Благодарность – признак
благородства души.
Эзоп

Криволинейный интеграл – обобщение понятия обычного интеграла для функций, заданных на кривых линиях. Понятие криволинейного интеграла первого рода возникает при решении задачи нахождения массы некоторой плоской кривой L, по которой рассредоточена некоторая плотность $f(x,y)$, меняющаяся от точки к точке.

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке $M(x; y)$ линии L. Разобьем эту линию произвольным образом на n частичных дуг L_1, L_2, …, L_n длиной Δl_1, Δl_2, …, Δl_n соответственно, выберем на каждой из них по одной произвольной точке: $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, …, $M_n(x_n,y_n)$. Сумма $f(x_1,y_1)\Delta l_1 + f(x_2,y_2)\Delta l_2 + \ldots + f(x_n,y_n)\Delta l_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i$ называется *интегральной суммой функции $f(x, y)$ по линии L.*

Криволинейный интеграл первого рода

Пусть $\lambda = \max_{1\le i\le n} \Delta l_i$ – наибольшая из длин дуг деления.

Криволинейным интегралом первого рода $\int_L f(x,y)dl$ от функции $f(x, y)$, взятым по плоской линии L, называется предел интегральной суммы $\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i$ при стремлении к нулю λ, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения линии L на частичные дуги L_i и выбора точек $M_i(x_i,y_i)$ в них.

Аналогичным образом вводится понятие криволинейного интеграла по пространственной линии L.

Свойства криволинейного интеграла первого рода

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменяет своего знака, т. е. $\int_{L^+} f(x,y)\,dl = \int_{L^-} f(x,y)\,dl$, где L^+ – линия L, пробегаемая в заданном направлении; L^- – линия L, пробегаемая в противоположном направлении.

2. Если линия L с помощью некоторой точки разбита на части: $L = L_1 \cup L_2$, то $\int_L f(x,y)\,dl = \int_{L_1} f(x,y)\,dl + \int_{L_2} f(x,y)\,dl$ (свойство аддитивности).

3. Свойства линейности:

а) $\int\limits_L c\cdot f(x,y)\,dl = c\cdot\int\limits_L f(x,y)\,dl$, $c = const$;

б) $\int\limits_L \big(f(x,y)\pm g(x,y)\big)\,dl = \int\limits_L f(x,y)\,dl \pm \int\limits_L g(x,y)\,dl.$

3.2. Правила вычисления криволинейного интеграла первого рода

Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводят к вычислению определенного интеграла.

1. Если линия L задана непрерывно дифференцируемыми функциями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[\alpha;\ \beta]$, то дифференциал длины дуги $dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$, а криволинейный интеграл выражается через обычный определенный интеграл по формуле

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt.$$

2. Если линия L задана непрерывно дифференцируемой функцией $y = y(x)$, $a \le x \le b$, то

$$dl = \sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx,$$

а криволинейный интеграл

$$\int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,dx.$$

3. Если линия L задана непрерывно дифференцируемой функцией $x = \varphi(y)$, $c \le y \le d$, то

$$dl = \sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy; \qquad \int\limits_L f(x,y)dl = \int\limits_c^d f\big(\varphi(y),y\big)\sqrt{1+(\varphi'(y))^2}\,dy.$$

4. Если линия L задана в полярной системе координат непрерывно дифференцируемой функцией $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, то

$$dl = \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi; \qquad \int\limits_L f(\varphi,\rho)dl = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi,\rho(\varphi)\big)\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi.$$

Примечание. Если линия L является отрезком оси Ox или оси Oy, то криволинейный интеграл совпадает с обычным определенным интегралом.

3.3. Понятие криволинейного интеграла второго рода и его основные свойства

Понятие криволинейного интеграла второго рода возникает при решении задачи о вычислении работы переменной силы при перемещении материальной точки вдоль некоторой линии.

Пусть $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ – функции двух переменных, непрерывные в каждой точке $M(x; y)$ линии L. Разобьем линию L произвольным образом на n участков L_1, L_2, ..., L_n и в каждом таком участке выберем по одной произвольной точке $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, ..., $M_n(x_n,y_n)$. Обозначим проекции i-го участка на координатные оси Ox и Oy через Δx_i и Δy_i соответственно, а длину участка L_i – через Δl_i. Сумма

$$\sum_{i=1}^{n}\left(P(x_i,y_i)\Delta x_i + Q(x_i,y_i)\Delta y\right) \tag{9.12}$$

называется *интегральной суммой.* Обозначим через λ наибольшую из длин участков L_i ($i=1, 2, ..., n$).

Криволинейным интегралом второго рода $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ от пары функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, взятым по линии L, называется предел интегральной суммы (9.12) при стремлении к нулю λ, если этот предел существует и не зависит от способа разбиения линии L на частичные дуги L_i и выбора точек $M_i(x_i,y_i)$ в них.

Криволинейный интеграл второго рода иногда называют *криволинейным интегралом по координатам.*

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1. При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак:

$$\int\limits_{L^+} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = -\int\limits_{L^-} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

Через L^- и L^+ обозначена линия L при двух ее взаимно противоположных направлениях.

2. Если линия L с помощью некоторой точки разбита на части (свойство аддитивности): $L = L_1 \cup L_2$, то

$$\int\limits_{L} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = \int\limits_{L_1} P(x,y)dx+Q(x,y)dy + \int\limits_{L_2} P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,.$$

Часто встречаются ситуации, когда криволинейный интеграл второго рода вычисляется по *замкнутому контуру*; такие криволинейные интегралы называют *циркуляцией* и обозначают символом $\oint\limits_L$. В случае замкнутого контура на плоскости направление обхода, при котором область, ограниченная контуром, остается слева, называют *положительным* (обход совершается против часовой стрелки). Обход в противоположном направлении (по часовой стрелке) называют *отрицательным.*

При положительном направлении обхода криволинейный интеграл обозначается как $\oint\limits_{L^+}$, а при отрицательном – как $\oint\limits_{L^-}$.

3.4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода

Вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению обыкновенных определенных интегралов.

1. Для того чтобы криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$, взятый по линии L, заданной параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t\in[\alpha;\ \beta]$, преобразовать в обыкновенный, необходимо в подынтегральном выражении заменить все величины их выражениями через t: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $dx=x'(t)dt$, $dy=y'(t)dt$. Вычислим полученный интеграл по интервалу изменения параметра t:

$$J=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_\alpha^\beta\left\{P\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)\right\}dt.$$

2. В случае явного задания линии L на плоскости уравнением $y=y(x)$, $x\in[a;\ b]$, $dy=y'(x)dx$ вычисление криволинейного интеграла второго рода сводится к вычислению определенного интеграла:

$$J=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b\left\{P\big(x,y(x)\big)+Q\big(x,y(x)\big)\cdot y'(x)\right\}dx.$$

3. Если линия интегрирования L – отрезок прямой $y=c,\ \ x\in[a;b]$, параллельной оси Ox, то $dy=0$ и

$$J=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_a^b P(x,c)\,dx.$$

4. Если линия интегрирования L – отрезок прямой $x=a,\ \ y\in[c;d]$, параллельной оси Oy, то $dx=0$ и

$$J=\int\limits_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy=\int\limits_c^d Q(a,y)\,dy.$$

Примечания.

1. Если отдельные участки линии интегрирования L заданы различными уравнениями, то линию нужно разбить на участки, вычислить интеграл по каждому из них и сложить полученные результаты.

2. Криволинейный интеграл по пространственной линии L определяется аналогично.

3.5. Приложение криволинейных интегралов

Как правило, криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}$ зависит от линии интегрирования. Взятый вдоль разных линий, соединяющих точки A и B, он будет иметь различные значения. Если же в некоторой области D выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,\ y)$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки A и B:

$$\int\limits_{L_1} Pdx + Qdy = \int\limits_{L_2} Pdx + Qdy$$

(L_1 и L_2 – две произвольные гладкие линии, соединяющие точки A и B). Криволинейный интеграл, взятый по любой замкнутой линии, пролегающей в области D, равен нулю.

Выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ будет полным дифференциалом функции $u(x,\ y)$ в некоторой области D, если $P'_y = Q'_x$ и функции P, Q, P'_y, Q'_x непрерывны в этой области.

Полный дифференциал некоторой функции $u(x,\ y)$ с помощью криволинейного интеграла вдоль ломаной ABM $\big(A(x_0; y_0), B(x; y_0), M(x; y)\big)$

$$u = \int\limits_{ABM} du + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C\,.$$

Полный дифференциал некоторой функции $u(x,\ y,\ z)$ с помощью криволинейного интеграла вдоль ломаной $ABKM$ $\big(A(x_0; y_0; z_0), B(x; y_0; z_0), K(x; y; z_0), M(x; y; z)\big)$

$$u = \int\limits_{ABKM} du + C = \int\limits_{x_0}^{x} F_x(x, y_0, z_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)\,dy + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x,y,z)\,dz + C\,.$$

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру связан с двойным интегралом по области, ограниченной данным контуром формулой Грина.

Пусть контур L ограничивает область D. Если в этой области заданы непрерывные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, имеющие непрерывные частные производные P'_y и Q'_x, то справедлива *формула Грина:*

$$\iint\limits_{D} \left(Q'_x - P'_y\right) dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy\,.$$

Примечания.

1. Граница области проходит таким образом, что область D остается слева от нее.

2. Выполнение условия $P'_y = Q'_x$ позволяет заменить сложный контур более простым.

3. Из формулы Грина следует, что если в криволинейном интеграле $\oint\limits_{L} Pdx + Qdy$ выполнено условие $P'_y = Q'_x$, то он равен нулю.

С помощью криволинейных интегралов вычисляются величины:

1) длина дуги AB плоской или пространственной линии $l_{AB} = \int\limits_{AB} dl$;

2) площадь фигуры, расположенной в плоскости xOy и ограниченной замкнутой линией C:

$$S = \frac{1}{2}\oint_{C^+} xdy - ydx;$$

3) масса m материальной линии L с линейной плотностью $\eta = \eta(x, y)$:

$$m = \int_L \eta \, dl \tag{9.13}$$

(в этом состоит *физический смысл* криволинейного интеграла первого рода);

4) координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$ материальной линии L с линейной плотностью $\eta = f(x, y)$:

$$x_c = \frac{\int_L x\eta(M)dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int_L y\eta(M)dl}{m}, \quad z_c = \frac{\int_L z\eta(M)dl}{m};$$

5) работа A, совершаемая силой $\vec{F}\{P; Q; R\}$, действующей на точку при перемещении ее по дуге L:

$$A = \int_L Pdx + Qdy + Rdz$$

(в этом состоит *физический смысл* криволинейного интеграла второго рода).

Пример 13. Вычислите криволинейный интеграл:

1) $J = \int_L x^2 y dl$, где L – дуга окружности $x^2 + y^2 = 9$, расположенная в третьем квадранте;

2) $J = \int_L (2x + y^2) dl$, где L – контур треугольника с вершинами $A(2, 0)$, $B(4,0)$, $C(4, 4)$;

3) $J = \int_L 6x^2 dl$, где L – дуга кривой $y = \ln x$ между точками $x = \sqrt{3}$ и $x = \sqrt{8}$.

Решение.

1. Запишем уравнение дуги окружности $x^2 + y^2 = 9$ в параметрическом виде: $x = 3\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [\pi; 3\pi/2]$. Тогда $x' = -3\sin t$, $y' = 3\cos t$, а дифференциал длины дуги

$$dl = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt = \sqrt{(-3\sin t)^2 + (3\cos t)^2}\, dt = 3dt.$$

Используя параметрические уравнения дуги окружности и выражение дифференциала длины дуги, полученное выше, преобразуем данный криволинейный интеграл в обыкновенный интеграл с переменной t:

$$J=\int_L x^2y\,dl=\int_{\pi}^{3\pi/2}(3\cos t)^2\cdot 3\sin t\cdot 3dt=81\int_{\pi}^{3\pi/2}(\cos t)^2\sin t\,dt=$$

$$=-81\int_{\pi}^{3\pi/2}(\cos t)^2\,d\cos t=-81\left.\frac{(\cos t)^3}{3}\right|_{\pi}^{3\pi/2}=-27\left((\cos 3\pi/2)^3-(\cos\pi)^3\right)=-27.$$

2. Линия интегрирования L состоит из трех отрезков, расположенных на различных прямых (рис. 20). В силу свойства аддитивности криволинейного интеграла первого рода заданный криволинейный интеграл по ломаной $ABCA$ вычисляем как сумму интегралов, взятых по отрезкам AB, BC и CA:

$$J=\int_L(2x+y^2)dl=\int_{AB}(2x+y^2)dl+\int_{BC}(2x+y^2)dl+\int_{CA}(2x+y^2)dl.$$

AB – отрезок оси Ox, поэтому $y=0$; $2\le x\le 4$; $dl=dx$.

$$\int_{AB}(2x+y^2)dl=\int_2^4 2x\,dx=\left.x^2\right|_2^4=16-4=12.$$

BC – отрезок, параллельный оси Oy, следовательно, $x=4$; $0\le y\le 4$; $dl=dy$.

$$\int_{BC}(2x+y^2)dl=\int_0^4(2\cdot 4+y^2)dy=\left.\left(8y+\frac{y^3}{3}\right)\right|_0^4=32+\frac{64}{3}=\frac{160}{3}.$$

Найдем уравнение прямой CA, например, как уравнение прямой, проходящей через две известные точки $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$: $\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-0}{4-0}$; $\frac{x-2}{2}=\frac{y}{4}$; $y=2x-4$. Используя это уравнение, преобразуем данный криволинейный интеграл в обыкновенный с переменной x:

$$dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx=\sqrt{1+2^2}\,dx=\sqrt{5}\,dx.$$

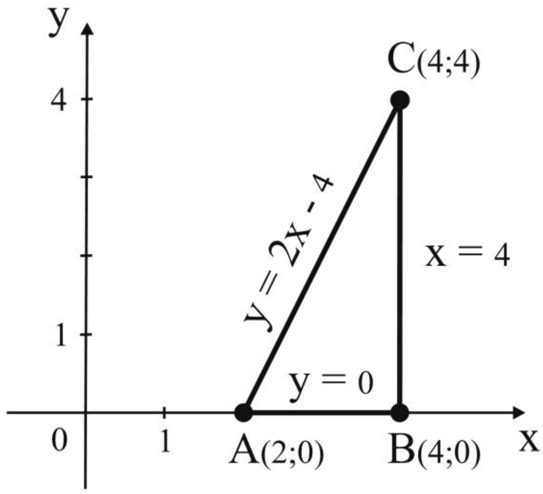


Рис. 20

Отсюда, с учетом того, что x меняется от 2 до 4, получим:

$$\int_{CA}(2x+y^2)dl=\int_2^4\left(2x+(2x-4)^2\right)\sqrt{5}\,dx=\sqrt{5}\left.\left(x^2+\frac{(2x-4)^3}{6}\right)\right|_2^4=$$

$$=\sqrt{5}\left(16+\frac{64}{6}-4\right)=\frac{68}{3}\cdot\sqrt{5}.$$

Окончательно $J=\int_L (2x+y^2)dl = 12+\frac{160}{3}+\frac{68}{3}\cdot\sqrt{5}=\frac{196+68\sqrt{5}}{3}$.

3. Найдем дифференциал дуги dl для кривой $y=\ln x$. Имеем $y'=\frac{1}{x}$;

$dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx=\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx$. Следовательно, данный интеграл

$$J=\int_L 6x^2 dl=\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} 6x^2\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\,dx=3\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} 2x\sqrt{1+x^2}\,dx=3\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}(1+x^2)^{\frac{1}{2}}\,d(1+x^2)=$$

$$=3\frac{2(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\Bigg|_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}=2(27-8)=38.$$

Ответ: 1) -27; 2) $\frac{196+68\sqrt{5}}{3}$; 3) 38.

Пример 14. Вычислите криволинейный интеграл, сделайте чертеж:

1) $J=\int_L y^2dx+2xydy$ вдоль дуги параболы $y = 3x^2$ от точки $A(0;\ 0)$ до точки $B(1;\ 3)$;

2) $J=\int_L 3y^2dx+xdy$ по дуге L эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$, обходя ее против хода часовой стрелки от точки $A(1;\ 0)$ до точки $B(-1;\ 0)$.

Решение.

1. Преобразуем криволинейный интеграл в определенный интеграл с переменной x: $y = 3x^2$, $dy = 6xdx$. Пределы интегрирования: $x_A=0$, $x_B=1$ (рис. 21). Вычислим интеграл:

$$J=\int_0^1 9x^4dx+2x\cdot 3x^2\cdot 6x\,dx=\int_0^1 45x^4dx=9x^5\Big|_0^1=9.$$

2. Найдем значение параметра t $(0 \le t \le 2\pi)$ в точках $A(1;\ 0)$ и $B(-1;\ 0)$ (рис. 22):

$$\begin{cases}\cos t=1\\ \sin t=0\end{cases}\Rightarrow t_A=0;\qquad \begin{cases}\cos t=-1\\ \sin t=0\end{cases}\Rightarrow t_B=\pi.$$

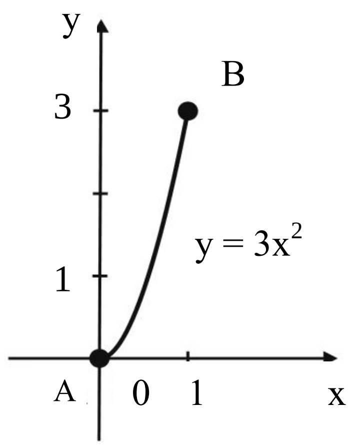


Рис. 21

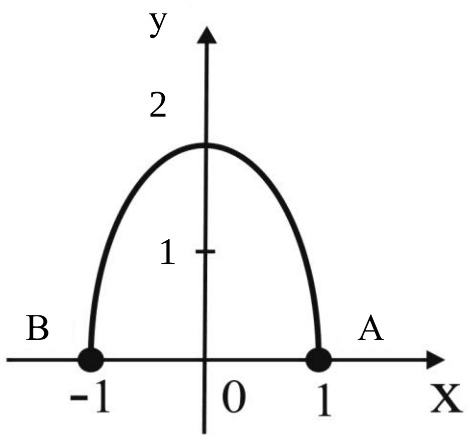


Рис. 22

Преобразуем криволинейный интеграл в определенный с переменной t: $x = \cos t$, $dx = -\sin t\, dt$; $y = 2\sin t$, $dy = 2\cos t\, dt$. Вычислим:

$$J = \int_0^{\pi} 3 \cdot 4\sin^2 t \cdot (-\sin t)dt + \cos t \cdot 2\cos t \; dt =$$

$$= -12\int_0^{\pi} \sin^2 t \cdot \sin t \; dt + 2\int_0^{\pi} \cos^2 t \; dt =$$

$$= 12\int_0^{\pi} \left(1 - \cos^2 t\right) \; d(\cos t) + \int_0^{\pi} (1 + \cos 2t) \; dt =$$

$$= 12\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi - 16.$$

Ответ: 1) 9; 2) $\pi - 16$.

Пример 15. Найдите массу дуги параболы $y^2 = 2x$ от точки $A(4; 2\sqrt{2})$ до точки $B(12; 2\sqrt{6})$, если в каждой ее точке линейная плотность равна удвоенной ординате точки.

Решение. По условию $\eta = 2y$, следовательно, по формуле (9.13)

$$m = \int_L 2y \, dl \, .$$

В данном случае уравнение линии удобно разрешить относительно x: $x = \dfrac{1}{2}y^2$; $2\sqrt{2} \le y \le 2\sqrt{6}$. Тогда $x' = y$, $dl = \sqrt{1 + y^2}\, dy$ и интеграл преобразуется к виду

$$m=\int\limits_L 2y\,dl=\int\limits_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}} 2y\sqrt{1+y^2}\;dy=\int\limits_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}}(1+y^2)^{\frac{1}{2}}\;d(1+y^2)=\left.\frac{2(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right|_{2\sqrt{2}}^{2\sqrt{6}}=$$

$$=\frac{2}{3}(125-27)=65\frac{1}{3}.$$

Ответ: $65\frac{1}{3}$.

Пример 16. Проверьте, является ли заданное выражение полным дифференциалом некоторой функции $du=\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy$. В случае положительного ответа найдите $u(x,\ y)$ с помощью криволинейного интеграла.

Решение. Обозначим коэффициенты при дифференциалах $P=\frac{1}{y}-\frac{y}{x^2}$, $Q=\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}$ и найдем $P'_y=-\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}$ и $Q'_x=-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$. Так как $P'_y=Q'_x$ и P, Q, P'_y, Q'_x непрерывны во всей области, за исключением x = 0 и y = 0, то заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$.

Найдем эту функцию:

$$u=\int\limits_{AM} du+C_1=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)\,dy+C_1=\int\limits_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y_0}-\frac{y_0}{x^2}\right)dx+$$

$$+\int\limits_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{y^2}\right)dy++C_1=\left.\left(\frac{x}{y_0}+\frac{y_0}{x}\right)\right|_{x=x_0}^{x=x}+\left.\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\right|_{y=y_0}^{y=y}+C_1=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+C,$$

где $C=C_1-\frac{x_0}{y_0}-\frac{y_0}{x_0}$.

Область определения функции $u(x, y)$ совпадает с P и Q.

Ответ: $u=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+C$.

ГЛАВА 10. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. Основные понятия теории вероятностей. Событие. Вероятность события

Легкость дается тяжелым трудом.
И.К. Айвазовский

Теория вероятностей – математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта каждый раз протекает несколько по-иному.

При изучении в физике, технике, механике явление упрощается, выделяются главные, основные факторы; влиянием второстепенных факторов пренебрегают.

Практика показывает, что, наблюдая за массой однородных случайных явлений, мы обычно обнаруживаем в них вполне определенные закономерности, своего рода *устойчивости,* свойственные именно массовым случайным явлениям.

Например, если много раз подряд бросить монету, частота появления герба (отношение числа появившихся гербов к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к вполне определенному числу, равному 0,5, хотя каждое отдельное событие заранее неопределенное, случайное.

Закономерности, проявляющиеся в этой массе, оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, и средний результат массы случайных явлений оказывается практически не случайным. Именно эта устойчивость массовых случайных явлений и служит базой для применения вероятностных, статистических методов исследования.

Каждая наука содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. В геометрии – это понятия точки, прямой, линии; в механике – силы, массы, скорости и т. д. Основные понятия теории вероятностей – это событие, вероятность события.

Под *событием* в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти, например, появления герба при бросании монеты, трех гербов при трехкратном бросании монеты или туза при вынимании карты из колоды.

События обладают той или иной степенью возможности. Для того чтобы количественно сравнить между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число выражает вероятность события – это второе основное понятие теории вероятностей.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Для сравнения различных событий по степени их возможности необходимо ввести в качестве единицы измерения *вероятность достоверного события*, т. е. события, которое в результате опыта непременно должно произойти (например, выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости).

Противоположностью по отношению к достоверному событию является *невозможное событие*, т. е. такое событие, которое в данном опыте не может произойти (например, появление 12 очков при бросании одной игральной кости). Вероятность невозможного события равна нулю.

Случайным событием является событие, которое в результате опыта может либо произойти, либо не произойти. Вероятность P случайного события находится в интервале от 0 до 1.

То или иное событие осуществляется при некоторой совокупности условий – будем называть ее *испытанием.* Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Пример: стрелок стреляет по мишени. Выстрел – это испытание, попадание в мишень – событие.

Несколько событий образуют *полную группу*, если в результате испытания появится хотя бы одно из них, т. е. появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Несколько событий называются *несовместными* в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Пример: выпадение герба и цифры при одном бросании монеты; попадание и промах при одном выстреле.

Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Например, стрелок произвел выстрел по цели. В результате обязательно произойдет одно из двух событий: попадание или промах. Эти два несовместных события образуют полную группу.

События называют *равновозможными,* если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Пример: появление герба и цифры при бросании монеты; появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

§ 2. Классическое, статистическое и геометрическое определения вероятности

Ставь себе лишь ясные цели.
Гораций

Существуют группы событий, обладающие тремя свойствами:
образуют полную группу,
несовместны,
равновозможны.

Пример: появление герба и цифры при бросании монеты; появление числа очков 1–6 при бросании игральной кости.

События, образующие такую группу, называются *случаями* (шансами) или *элементарными исходами*. Случай называется *благоприятным событием,* если появление этого случая влечет за собой наступление данного события. Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события $P(A)$ в данном опыте можно оценить по относительной доле благоприятных событий:

$$P(A) = m/n,$$

где $P(A)$ – вероятность события A; n – общее число случаев; m – число случаев благоприятных событию A. Так как $0 \le m \le n$, то $0 \le P(A) \le 1$.

$P(A) = \dfrac{m}{n}$ – *классическое определение вероятностей.*

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. Но на практике часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо. В качестве *статистической вероятности* события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.

Относительной частотой $\omega(A)$ события называют отношение числа m испытаний, в которых событие появилось, к общему числу n фактически произведенных испытаний:

$$\omega(A) = \frac{m}{n}.$$

Отличие вероятности от относительной частоты состоит в том, что первую вероятность вычисляют до опыта, а вторую – после.

Если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Под *геометрической вероятностью* понимают вероятность попадания точки в область (отрезок, фигуру, тело и т. д).

Вероятность попадания точки в область g, являющуюся частью области G, определяется равенством

$$P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G},$$

где $mes\ g$ – мера (длина, площадь, объем) области g; $mes\ G$ – мера (длина, площадь, объем) области G.

Пример 1. Игральный кубик бросают дважды. Сколько элементарных исходов опыта благоприятствуют событию «A (сумма очков равна 7)?

Решение. Общее число благоприятных исходов $m = 6$ $\{6 + 1, 1 + 6, 5 + 2, 2 + 5, 4 + 3, 3 + 4\}$.

Ответ: 6.

Пример 2. В урне находятся 2 белых и 3 черных шара. Наугад вынимают один из них. Требуется найти вероятность того, что этот шар будет белый.

Решение. Пусть A событие, состоящее в появлении белого шара. Общее число случаев $n = 5$. Число случаев m, благоприятных событию A, равно 2. Определим вероятность того, что этот шар будет белым:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{5} = 0{,}4.$$

Ответ: 0,4.

Пример 3. Набирая номер телефона, абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найдите вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Пусть A – событие «набрана нужная цифра». Общее число элементарных исходов $n = 10$. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятное событие одно: $m = 1$. Найдем вероятность того, что набрана нужная цифра:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{10} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

Пример 4. Игральная кость бросается один раз. Найдите вероятность того, что на верхней грани выпадет нечетное число очков.

Решение. Воспользуемся формулой классического определения вероятностей $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания; m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. В нашем случае возможны шесть элементарных исходов испытания ($n = 6$), из которых благоприятствующими являются три – нечетные числа единица, три и пять ($m = 3$). Вероятность выпадения на верхней грани нечетного числа очков определяется по формуле

$$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 5. В партии из 200 изделий обнаружено 8 нестандартных. Определите относительную частоту появления стандартных изделий.

Решение. Относительная частота события A «появление стандартного изделия» определяется равенством $\omega(A)=\frac{m}{n}$, где m – количество стандартных изделий; n – общее количество изделий.

Количество стандартных изделий m = 200 – 8 = 192.

Найдем частоту появления стандартных изделий:

$$\omega(A)=\frac{192}{200}=0{,}96\,.$$

Ответ: 0,96.

Пример 6. В некотором городе из 3 000 появившихся на свет младенцев 1 430 девочек. Найдите частоту рождения мальчиков в этом городе. Результат округлите до тысячных.

Решение. Относительная частота события A «рождение мальчиков» определяется равенством $\omega(A)=\frac{m}{n}$, где m – количество родившихся мальчиков, n – общее количество родившихся младенцев.

Количество родившихся мальчиков m = 3 000 – 1 430 = 1 570.

Найдем частоту рождения мальчиков в городе

$$\omega(A)=\frac{m}{n}=\frac{1\,570}{3\,000}=0{,}523\,3\ldots\approx 0{,}523.$$

Ответ: 0,523.

Пример 7. Игральная кость бросается два раза. Найдите вероятность того, что сумма выпавших очков равна десяти.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов $n = 6^2 = 36$. Общее число благоприятных исходов m = 3 (6 + 4, 4 + 6, 5 + 5).

Воспользуемся формулой классического определения вероятностей:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

Ответ: $\frac{1}{12}$.

Пример 8. В равнобедренную трапецию с основаниями $a = 5$, $b = 3$ и высотой $h = 3$ брошена точка. Найдите вероятность того, что она попадет в выделенную область – заштрихованный треугольник с основанием 5 и высотой 3 (рис. 23).

Решение. Площадь трапеции

$$S_{трап.} = \frac{a+b}{2}h = 12.$$

Площадь треугольника

$$S_{треуг.} = \frac{1}{2}ah = 7{,}5.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{S_{треуг.}}{S_{трап.}} = \frac{7{,}5}{12} = 0{,}625.$$

Ответ: 0,625.

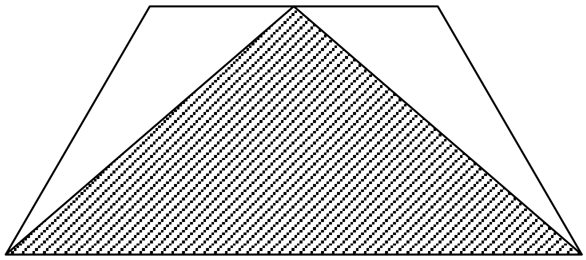


Рис. 23

Пример 9. В шар радиусом R_1 = 4 помещен другой шар радиусом R_2 = 2. Найдите вероятность того, что случайно помещенная точка в первый шар радиусом R_1 = 4 попадет и во второй шар.

Решение. Объем шара радиуса R

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Искомая вероятность равна отношению объемов двух шаров:

$$P(A) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{R_2^3}{R_1^3} = \frac{2^3}{4^3} = 0{,}125.$$

Ответ: 0,125.

Пример 10. Исправный виду трос длиной 4 м разрывается при буксировке машины. Найдите вероятность того, что длинная часть троса будет не менее 3 м.

Решение. Поскольку трос мог разорваться в любом месте, то все возможные значения случайной величины – точки разрыва троса – принадлежат отрезку длиной 4 м. Пусть событие A – длинная часть троса составит не менее 3 м. Благоприятствующие событию A участки разрыва троса выделены на рис. 24 жирными линиями. Их суммарная длина

$$l = 1 + 1 = 2 \text{ м.}$$

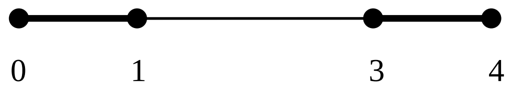


Рис. 24

Искомая вероятность равна отношению длин:

$$P(A) = \frac{l}{L} = \frac{2}{4} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

§ 3. Основные формулы комбинаторики

Надежда — хороший завтрак,
но плохой ужин.

Ф. Бэкон

Комбинаторика изучает количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, составляемых из элементов заданного конечного множества. Основными операциями комбинаторики являются перестановки, размещения и сочетания, которые подразделяются на два раздела: «*без повторений или без возвращений*», когда элементы множества используются единожды, и «*с повторениями или возращениями*», когда элементы множества могут использоваться неоднократно. Операции перестановки и размещения в результате их выполнения дают упорядоченные подмножества. Сочетания дают неупорядоченное множество.

При решении задач комбинаторики используют правила:

Правило суммы («**ИЛИ**»). Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов m способами, а объект B – n способами, то выбрать либо A, либо B можно $m + n$ способами.

Правило произведения («**И**»). Если объект A можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект B можно выбрать n способами, то пара объектов (A, B) в указанном порядке может быть выбрана $m{\cdot}n$ способами.

Рассмотрим перестановки, размещения и сочетания без повторений.

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,\ \ n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots n.$$

Напомним, что $0! = 1$.

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m.$$

Общее количество различных комбинаций при выборе из n различных элементов по m элементов *с возвращениями*, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком, равняется n^m.

Общее количество различных комбинаций при выборе из n различных элементов по m элементов *с возвращениями*, которые отличаются хотя бы одним элементом, равняется C_{n+m-1}^{m} или C_{n+m-1}^{n-1}.

Если среди n элементов имеются повторяющиеся элементы, например, n_1 элементов одного типа и n_2 элементов другого типа, то число перестановок с повторениями

$$P_n(n_1, n_2) = \frac{n!}{n_1!n_2!}.$$

Пример 11. Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. В нашем случае порядок важен, повторений нет. Так как в четырехзначном числе каждая цифра встречается только один раз, то любое составленное четырехзначное число из данных цифр получается перестановкой цифр этого числа местами. Следовательно, число четырехзначных чисел равно числу перестановок из 4 цифр:

$$P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

Ответ: 24.

Пример 12. Найдите количество перестановок букв в слове «ПОБЕДА».

Решение. В нашем случае порядок важен, повторений нет. Поскольку в слове «ПОБЕДА» каждая буква встречается только один раз, то любое «слово» получается перестановкой букв этого слова местами. Следовательно, число «слов» равно числу перестановок из 6 символов:

$$P_6 = 6! = 120.$$

Ответ: 120.

Пример 13. Сколько можно составить сигналов из 5 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. В нашем случае порядок важен, повторений нет. Первый сигнал можно выбрать 5 способами, второй – только 4 способами. Следовательно, согласно правилу произведения «И» имеем: $5\cdot 4 = 20$ сигналов.

Также можно воспользоваться формулой

$$A_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!} = 20.$$

Ответ: 20.

Пример 14. Найдите число всевозможных способов, которыми можно выбрать из 5 различных учебников 3.

Решение. В нашем случае порядок важен, повторений нет. Первый учебник можно выбрать 5 способами, второй – только 4 способами и третий – 3 способами. Следовательно, согласно правилу произведения «И» имеем: $5\cdot 4\cdot 3 = 60$.

Ответ: 60.

Пример 15. Найдите число способов выбора из 10 студентов 2 дежурных.

Решение. В нашем случае порядок важен, повторений нет. Первого дежурного можно выбрать 10 способами, второго – только 9 способами. Следовательно, согласно правилу произведения «И» имеем: $10\cdot 9 = 90$.

Ответ: 90.

Пример 16. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 5 деталей?

Решение. В нашем случае порядок не важен, повторений нет. По формуле сочетаний $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ при $m = 2$, $n = 5$ получим:

$$C_5^2 = \frac{5!}{2!3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 3!} = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 17. Найдите число «слов», полученных перестановкой букв в слове «ДАЧА», если «словом» считать любую комбинацию букв.

Решение. В нашем случае порядок важен и есть повторения. Так как в слове «ДАЧА» буква А встречается два раза, а перестановка одинаковых букв не меняет «слово», то число «слов» равно числу перестановок из 4 символов с повторениями:

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!} = 12.$$

Ответ: 12.

Пример 18. Сколько трехзначных чисел можно составить из 5 цифр: 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. В нашем случае порядок важен и есть повторения (возможны варианты 112, 121,…). Общее количество различных комбинаций при выборе из 5 различных цифр по 3 цифры с повторениями, отличающихся либо составом элементов, либо их порядком, равняется $5^3 = 125$.

Ответ: 125.

Пример 19. Сколько будет костей в игре домино, если использовать только пять цифр: 1, 2, 3, 4, 5?

Решение. В нашем случае порядок не важен (1-2 и 2-1 – это обозначение одной кости домино) и есть повторения (возможны варианты 1-1, 2-2…). Согласно формуле сочетаний с повторениями C_{n+m-1}^{m} при $m = 2$, $n = 5$ имеем:

$$C_{5+2-1}^{2} = C_{6}^{2} = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{4!\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4!} = 15.$$

Можно просто выписать все варианты:

1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 2-2, 2-3, 2-4, 2-5, 3-3, 3-4, 3-5, 4-4, 4-5, 5-5.

Ответ: 15.

Пример 20. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найдите вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Пусть A – благоприятное событие «набраны нужные две цифры». Всего можно набрать столько различных чисел, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т. е. $A_{10}^{2} = 10\cdot 9 = 90$. Общее число исходов равно 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Следовательно, $P(A) = \frac{1}{90}$.

Ответ: $\frac{1}{90}$.

Пример 21. Партия из 20 деталей содержит одну нестандартную. Какова вероятность, что при случайной выборке 10 деталей из этой партии все они будут стандартные?

Решение. Число всех случайных способов выбора 10 деталей $n = C_{20}^{10}$, а число благоприятствующих событий $m = C_{19}^{10}$. Искомая вероятность

$$P(A) = \frac{C_{19}^{10}}{C_{20}^{10}} = \frac{\dfrac{19!}{10!\cdot(19-10)!}}{\dfrac{10!}{10!\cdot(20-10)!}} = \frac{19!\cdot 10!\cdot 10!}{10!\cdot 9!\cdot 20!} = \frac{19!\cdot 9!\cdot 10}{9!\cdot 19!\cdot 20} = \frac{10}{20} = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 22. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найдите вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т. е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов C_{10}^{6}.

Определим число исходов, благоприятствующих событию A (среди шести деталей – 4 стандартные). Четыре стандартные детали можно взять из 7 стандартных C_7^4 способами, при этом остальные $6 - 4 = 2$ детали должны быть нестандартными; 2 нестандартные детали из $10 - 7 = 3$ деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятных событий равно произведению $C_7^4 \cdot C_3^2$. Вероятность $P(A)$ равна отношению благоприятных событий к числу всех исходов:

$$P(A) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \frac{\frac{7!}{4! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{6! \cdot 4!}} = \frac{7! \cdot 3! \cdot 6! \cdot 4!}{4! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 10!} =$$

$$= \frac{6!}{2! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{360}{720} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: 0,5.

Пример 23. Из урны, в которой находятся 4 черных и 6 белых шаров, вынимают одновременно 2 шара. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми.

Решение. Воспользуемся формулой классического определения вероятностей $P(A) = \frac{m}{n}$, где n – общее число возможных элементарных исходов испытания, m – число элементарных исходов, благоприятствующих появлению события A. В нашем случае общее число возможных элементарных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь два шара из 10 имеющихся, т. е. C_{10}^2. Общее число благоприятных исходов равно числу способов, которыми можно извлечь 2 белых шара из шести имеющихся белых шаров, т. е. C_6^2. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{\frac{6!}{2! \cdot 4!}}{\frac{10!}{2! \cdot 8!}} = \frac{6! \cdot 2! \cdot 8!}{2! \cdot 4! \cdot 10!} = \frac{(4! \cdot 5 \cdot 6) \cdot 8!}{4! \cdot (8! \cdot 9 \cdot 10)} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\frac{1}{3}$.

§ 4. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Лишь та – ошибка, что не исправляется.
Конфуций

Суммой $A + B$ («ИЛИ») двух событий A и B называют событие, состоящее в появлении события A, или событии B, или обоих этих событий.

Так, если рассмотреть банкротство двух независимых предприятий, где A – банкротство первого предприятия, B – банкротство второго предприятия, то $A + B$ – банкротство первого, или второго, или обоих предприятий.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких парно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).$$

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, …, A_n образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Пример 24. В урне 20 шаров: 8 красных, 6 синих, 6 белых. Найдите вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного шара

$$P(A) = \frac{8}{20} = 0{,}4,$$

вероятность появления синего

$$P(B) = \frac{6}{20} = 0{,}3.$$

События A и B несовместны. По теореме сложения «ИЛИ»

$$P(A + B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7.$$

Ответ: 0,7.

Пример 25. В лотерее 1 000 билетов: из них на один билет падает выигрыш 500 руб., на 10 билетов – выигрыш по 100 руб., на 80 билетов – 20 руб., на 100 билетов – 8 руб., остальные невыигрышные. Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб. при покупке 1 билета.

Решение. Событие A – выиграть не менее 20 руб. Событие A может наступить в случае появления одного из несовместных событий: A_1 – выигрыш 20 руб., число таких билетов $n_1 = 80$; A_2 – 100 руб., $n_2 = 10$; A_3 – 500 руб., $n_3 = 1$. События несовместны, следовательно, $A = A_1 + A_2 + A_3$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A_1 + A_2 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_2) = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \frac{n_3}{n} =$$

$$= \frac{80}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0{,}091.$$

Ответ: 0,091.

Пример 26. Круговая мишень состоит из трех зон. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле – 0,15, во вторую – 0,23, в третью – 0,17. Найти вероятность промаха.

Решение. Событие A – промах, противоположное событие $\bar{A}$ – попадание. Событие $\bar{A}$ может осуществиться, если наступит одно из несовместных событий: A_1 – попадание в первую зону, A_2 – во вторую, A_3 – в третью. События несовместны, следовательно, $\bar{A} = A_1 + A_2 + A_3$. По теореме сложения

$$P(\bar{A}) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55.$$

События A и $\bar{A}$ образуют полную группу, т. е.

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}45.$$

Ответ: 0,45.

Пример 27. При изготовлении подшипников диаметром 65 мм вероятность того, что диаметр будет отличаться от заданного не более, чем на 0,01 мм, равна 0,981. Найдите вероятность того, что случайный подшипник будет иметь диаметр меньше, чем 64,99 мм, или больше, чем 65,01 мм.

Решение. Возможны два события, образующих полную группу, – диаметр подшипника попадет в интервал (64,99; 65,01) и не попадет в данный интервал. Вероятность того, что диаметр подшипника попадет в интервал, равна 0,981. Найдем вероятность того, что диаметр случайного подшипника не попадет в интервал (64,99; 65,01):

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}981 = 0{,}019.$$

Ответ: 0,019.

§ 5. Теорема умножения вероятностей

Начало есть половина всего.
Пифагор

Произведением («И») двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий.

Пример: если A – деталь годная, B – деталь стальная, то AB – деталь годная стальная.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий.

Пример: если A, B и C – появление «герба» при первом, втором и третьем бросаниях монеты, то ABC – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило:

$$P_A(B) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A) \cdot P_A(B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1 \cdot A_2 \ldots A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 A_2 \ldots A_n}(A_n).$$

Для трех событий $P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C)$. Может быть выбран любой порядок расположения событий:

$$P(ABC) = P(A) \cdot P_A(B) \cdot P_{AB}(C) = P(B) \cdot P_B(A) \cdot P_{BA}(C) = P(C) \cdot P_C(B) \cdot P_{CB}(A).$$

Если событие B не зависит от события A, то появление события A не изменяет вероятности события B:

$$P_A(B) = P(B).$$

Если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B.

Теорема. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы.

События A, B, C попарно независимы, если A и B, A и C, B и C независимы.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следствие 1. Вероятность совместного появления нескольких независимых событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

Следствие 2. Если события A_1, A_2,…, A_n независимы, то противоположные им события $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$ также независимы.

Пример 28. В урне 2 белых и 3 черных шара. Вынимают подряд два шара. Найдите вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Событие A_1 – извлечение белого шара при первом испытании, A_2 – извлечение белого шара при втором испытании. Эти события совместны, следовательно, извлечение двух белых шаров $A = A_1 \cdot A_2$. Всего в урне 5 шаров. Вероятность извлечения белого шара при первом испытании $P(A_1) = \frac{2}{5}$; вероятность извлечения белого шара при втором испытании (при условии, что при первом испытании был извлечен белый шар) $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{4}$. По теореме умножения совместных событий

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) P_{A_1}(A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = 0{,}1.$$

Ответ: 0,1.

Пример 29. Два предприятия производят разнотипную продукцию. Вероятности их банкротства в течение года равны 0,1 и 0,3 соответственно. Найдите вероятность банкротства обоих предприятий.

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 – обанкротится первое предприятие;

A_2 – обанкротится второе предприятие;

A – обанкротятся оба предприятия ($A = A_1 A_2$).

События A_1 и A_2 являются независимыми и совместными, поэтому вероятность банкротства в течение года обоих предприятий

$$P(A) = P(A_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = 0{,}1 \cdot 0{,}3 = 0{,}03.$$

Ответ: 0,03.

Пример 30. Два стрелка производят по одному выстрелу. Вероятности попадания в цель для первого и второго стрелков равны соответственно 0,8 и 0,7. Найдите вероятность того, что в цель попадет только один стрелок.

Решение. Введем обозначения событий:

A_1 – первый стрелок попадет в цель;

A_2 – второй стрелок попадет в цель;

$\overline{A}_1$ – первый стрелок не попадет в цель;

$\overline{A}_2$ – второй стрелок не попадет в цель;

A – в цель попадет только один стрелок ($A = \overline{A}_1 A_2 + A_1 \overline{A}_2$).

Вероятности этих событий:

$$P(A_1) = 0{,}8; \quad P(\overline{A}_1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2;$$

$$P(A_2) = 0{,}7; \quad P(\overline{A}_2) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

соответственно.

Для нахождения вероятности того, что в цель попадет только один стрелок, воспользуемся сначала теоремой сложения («ИЛИ»), а затем теоремой умножения («И»):

$$P(A) = P(\overline{A}_1 A_2 + A_1 \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1 A_2) + P(A_1 \overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) + P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}14 + 0{,}24 = 0{,}38.$$

Ответ: 0,38.

Пример 31. Вероятность того, что батарейка бракованная, равна 0,03. Покупатель в магазине выбирает случайную упаковку, в которой две таких батарейки. Найдите вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными.

Решение. Событие A «обе батарейки исправны» может наступить, если первая батарейка исправна (событие A_1) и вторая батарейка исправна (событие A_2): $A = A_1 A_2$.

Вероятность q того, что первая батарейка бракованная, составляет 0,03. Вероятность того, что первая батарейка будет исправна, находим из уравнения

$$P(A_1) = 1 - q = 1 - 0{,}03 = 0{,}97.$$

Аналогично для второй батарейки $P(A_2) = 0{,}97$.

Вероятность того, что обе батарейки окажутся исправными, равна произведению вероятностей этих совместных и независимых событий:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2) = 0{,}97 \cdot 0{,}97 = 0{,}940\,9.$$

Ответ: 0,940 9.

Пример 32. На рис. 25 изображен лабиринт. Паук вползает в лабиринт в точке *Вход*. Развернуться и ползти назад он не может. На каждом разветвлении паук выбирает путь, по которому еще не полз. Считая выбор дальнейшего пути случайным, определите, с какой вероятностью паук придет к *Выходу А*.

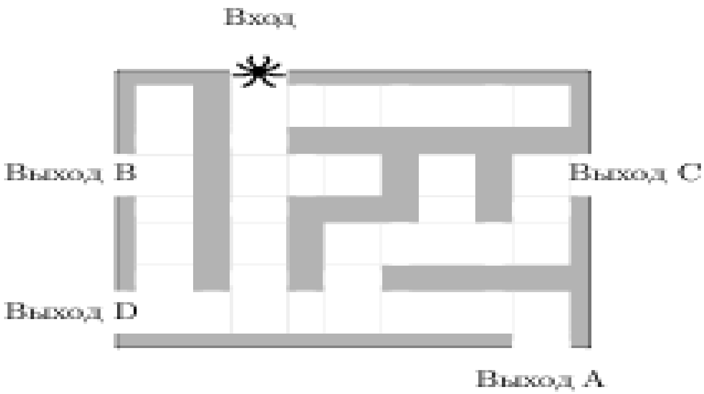


Рис. 25

Решение. Если бы между *Входом* и *Выходом А* был коридор без разветвлений, то вероятность того, что паук придет к выходу *А*, равнялась бы 1. Каждое разветвление уменьшает эту вероятность вдвое, так как содержит два выбора пути. Между *Входом* и *Выходом А* имеется четыре разветвления, следовательно, по теореме произведения вероятностей

$$P(A) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16} = 0{,}062\,5.$$

Ответ: 0,062 5.

Пример 33. Производится три выстрела по одной мишени. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах P_1 = 0,4; P_2 = 0,5; P_3 = 0,7 соответственно. Найдите вероятность того, что в результате трех выстрелов произойдет ровно одно попадание.

Решение. Событие *А* – ровно одно попадание в мишень; A_1, A_2, A_3 – попадание при первом, втором и третьем выстрелах соответственно; $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ – промах при первом, втором и третьем выстрелах соответственно. Событие *А* может наступить, если первый стрелок попал, а второй и третий не попали ($A_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3$); если второй стрелок попал, а первый и третий не попали ($\bar{A}_1\ A_2\ \bar{A}_3$); если третий стрелок попал, а первый и второй не попали ($\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3$):

$$A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

Искомая вероятность

$$P(A) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3);$$

$$P(A) = P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3);$$

$$P(A) = 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}21 = 0{,}36.$$

Ответ: 0,36.

§ 6. Вероятность появления хотя бы одного события

Главное – ладить с самим собой.
Вольтер

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий A_1, A_2, …, A_n равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_n$:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n).$$

Следствие. Если события A_1, A_2, …, A_n имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий

$$P(A) = 1 - q^n,$$

где q – вероятность противоположного события.

Пример 34. В типографии имеется 3 машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,8. Найдите вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Решение. Событие A – машина работает, противоположное событие $\bar{A}$ – машина не работает. Эти события образуют полную группу.

$$p + q = 1,\quad q = 1 - p = 0{,}2,\quad P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992.$$

Ответ: 0,992.

Пример 35. Помещение освещается фонарем с двумя лампами. Вероятность перегорания одной лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Решение. Событие A_1 – первая лампа не перегорит; событие A_2 – вторая лампа не перегорит. Эти события имеют одинаковую вероятность:

$$p = P(A_1) = P(A_2).$$

Вероятность противоположного события (перегорит одна лампа) $q = 1 - p = 0{,}3$.

Вычислим вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит:

$$P(A) = 1 - q^2 = 1 - 0{,}3^2 = 0{,}91.$$

Ответ: 0,91.

§ 7. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Затянувшаяся дискуссия означает,
что обе стороны неправы.

Вольтер

Два события называют *совместными*, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же опыте.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для трех совместных событий теорема имеет вид

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Примечание 1. Если два события *независимы*, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Примечание 2. Если два события *зависимы*, то

$$P(A + B)=P(A) + P(B) - P(A)P_A(B).$$

Примечание 3. Если два события *несовместны*, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример 36. Вероятность попадания в цель при стрельбе из первого и второго орудий: $P_1 = 0{,}8$, $P_2 = 0{,}9$ соответственно. Найдите вероятность попадания при одновременном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение.

1-й способ. По условию события A (попадание из первого орудия) и B (попадание из второго орудия) совместны и независимы. Вероятность того, что оба орудия попали в цель, находим из уравнения

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}72.$$

Вероятность попадания при одновременном залпе хотя бы одним из орудий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 1{,}7 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

2-й способ. Так как события A и B независимы, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий вычислим по формуле

$$P = 1 - q_1q_2,$$

где q_1, q_2 – вероятности событий, противоположных событиям A и B соответственно, $q_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$; $q_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$.

Вероятность попадания хотя бы одним из орудий

$$P = 1 - q_1 q_2 = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

Ответ: 0,98.

Пример 37. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня кофе в автомате закончится, равна 0,3. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, составляет 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Решение. Событие A – кофе закончится в первом автомате; событие B – кофе закончится во втором автомате; событие $\bar{A}$ – кофе не закончится в первом автомате; событие $\overline{B}$ – кофе не закончится во втором автомате. Вероятность P события A равна 0,3, вероятность события B составляет 0,3. Вероятность $P(AB)$ того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Вероятность $P(A + B)$ того, что кофе закончится хотя бы в одной из двух машин, равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}3 + 0{,}3 - 0{,}16 = 0{,}44.$$

События «кофе закончится хотя бы в одной из двух машин» и «кофе не закончится в обоих автоматах» образуют полную группу. Вероятность того, что к концу дня кофе не закончится в обоих автоматах, определяется формулой

$$P(\overline{A}\overline{B}) = 1 - P(A + B) = 1 - 0{,}44 = 0{,}56.$$

Ответ: 0,56.

§ 8. Формула полной вероятности

Краткость – сестра таланта.
А.П. Чехов

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Пример 38. Имеется две группы людей. Вероятность того, что человек из первой группы будет партийным, равна 0,4, а из второй – 0,6. Найти вероятность того, что выбранный наудачу человек является партийным.

Решение. Человек может быть выбран либо из первой группы (событие B_1), либо из второй группы (событие B_2). Вероятность того, что человек выбран из первой группы $P(B_1) = 0{,}5$, из второй – $P(B_2) = 0{,}5$.

Условная вероятность выбора из первой группы партийного $P_{B1}(A) = 0{,}4$, из второй – $P_{B1}(A) = 0{,}6$.

Вероятность выбора наудачу партийного человека вычислим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5.$$

Ответ: 0,5.

Пример 39. *Выберите несколько вариантов ответа*. Несовместные события A и B не образуют полную группу, если их вероятности соответсвенно равны:

1) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$; 2) $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{2}{3}$;

3) $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$; 4) $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$.

Решение. Несовместные события A и B не образуют полную группу, если сумма вероятностей этих событий не равна единице.

Для первого случая

$$P(A) + P(B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq 1.$$

Для второго случая

$$P(A)+P(B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{3}=\frac{5}{6}\neq 1.$$

Для третьего случая

$$P(A)+P(B)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

Для четвертого случая

$$P(A)+P(B)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}=1.$$

Следовательно, выбираем первый и второй варианты.

Ответ: 1) $P(A)=\frac{1}{3}, P(B)=\frac{1}{3}$; 2) $P(A)=\frac{1}{6},\ P(B)=\frac{2}{3}$.

Пример 40. Событие A может наступить лишь при условии появления одного из двух несовместных событий B_1 и B_2, образующих полную группу событий. Известны вероятность $P(B_1)=\frac{1}{5}$ и условные вероятности $P(A/B_1)=\frac{1}{2}$, $P(A/B_2)=\frac{1}{4}$. Найдите $P(A)$.

Решение. События B_1 и B_2 образуют полную группу. Сумма их вероятностей равна единице, поэтому

$$P(B_2)=1-P(B_1)=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}.$$

Вероятность $P(A)$ найдем по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(B_1)P_{B_1}(A)+P(B_2)P_{B_2}(A)=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{10}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

Ответ: 0,3.

Пример 41. В первой урне 2 черных и 8 белых шаров; во второй – 4 белых и 6 черных шаров, в третьей – 15 белых и 5 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Найдите вероятность того, что этот шар окажется белым.

Решение. Обозначим через A событие «вынутый шар оказался белым». Шар может быть извлечен либо из первой (событие B_1), либо из второй (событие B_2), либо из третьей урны (событие B_3).

Вероятность того, что шар извлечен из первой урны, $P(B_1) = \frac{1}{3}$. Вероятность того, что шар извлечен из второй урны, $P(B_2) = \frac{1}{3}$. Вероятность того, что шар извлечен из третьей урны, $P(B_3) = \frac{1}{3}$.

Условная вероятность того, что из первой урны будет извлечен белый шар, $P_{B_1}(A) = \frac{8}{10} = 0{,}8$. Условная вероятность того, что из второй урны будет извлечен белый шар, $P_{B_2}(A) = \frac{4}{10} = 0{,}4$. Условная вероятность того, что из третьей урны будет извлечен белый шар, $P_{B_3}(A) = \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Искомая вероятность того, что извлеченный наудачу шар – белый, по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 0{,}8 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}4 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}75 = \frac{1}{3} \cdot 1{,}95 = 0{,}65.$$

Ответ: 0,65.

Пример 42. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар: первая – 25 % этих стекол, вторая – 75 %. Первая фабрика выпускает 4 % бракованных стекол, а вторая – 2 %. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Решение. Стекло может быть произведено либо на первой (событие B_1), либо на второй фабрике (событие B_2). Вероятности $P(B_1)$ и $P(B_2)$ того, что стекло изготовлено на первой или второй фабрике, равны 0,25 и 0,75 соответственно.

Условные вероятности $P_{B_1}(A)$ и $P_{B_2}(A)$ выбора бракованного стекла из первой и второй фабрики равны 0,04 и 0,02 соответственно.

Вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным, находится по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}25 \cdot 0{,}04 + 0{,}75 \cdot 0{,}02 =$$

$$= 0{,}01 + 0{,}015 = 0{,}025.$$

Ответ: 0,025.

§ 9. Вероятность гипотез. Формулы Байеса

От подношений и боги становятся сговорчивыми.

Еврипид

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, ..., B_n, образующих полную группу.

Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют *гипотезами.*

Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Выясним, как изменились вероятности гипотез после того, как наступило событие A.

По теореме умножения имеем:

$$P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A).$$

Выразив $P_A(B_1)$, получим:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

Согласно формуле полной вероятности

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_1)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

По аналогии

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_1)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Полученные формулы называют формулами Байеса (по имени английского математика).

Формулы Байеса позволяют переоценить вероятность гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример 43. Для участия в спортивных студенческих соревнованиях выделено из первой группы – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятность того, что студент первой, второй и третьей группы попадет в сборную института, равна 0,9, 0,7 и 0,8 соответственно. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот студент?

Решение. Всего 15 студентов. Вероятность выбора из первой, второй и третьей группы $P(B_1) = 4/15$; $P(B_2) = 6/15$; $P(B_3) = 5/15$ соответственно.

Вероятность попадания в сборную $P(A)$ вычислим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A);$$

$$P(A) = (4/15)\cdot 0{,}9 + (6/15)\cdot 0{,}7 + (5/15)\cdot 0{,}8 = 11{,}8/15 = 59/75.$$

Найдем вероятность того, что выбранный студент попал в сборную из первой группы:

$$P_A(B_1) = \frac{P(AB_1)}{P(A)} = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = (4/15)\cdot 0{,}9/(59/75) = 18/59;$$

из второй группы:

$$P_A(B_2) = (6/15)\cdot 0{,}7/(59/75) = (4{,}2/15)\cdot(75/59) = 21/59;$$

из третьей группы:

$$P_A(B_3) = (5/15)\cdot 0{,}8\cdot(75/59) = 20/59.$$

Ответ: ко второй группе.

Пример 44. В первой урне 6 черных и 4 белых шара, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался белым. Найдите вероятность того, что этот шар извлечен из первой урны.

Решение. Обозначим через A событие – вынутый шар оказался белым. Можно сделать два предположения (гипотезы): B_1 – шар вынули из первой урны, причем $P(B_1) = \frac{1}{2} = 0{,}5$; B_2 – шар вынули из второй урны, причем $P(B_2) = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Условная вероятность $P_{B_1}(A)$ того, что шар будет белым, если его извлекли из первой урны, равна $0{,}4$. Условная вероятность $P_{B_2}(A)$ того, что шар будет белым, если его извлекли из второй урны, равна $0{,}3$.

Вычислим вероятность того, что наудачу взятый шар окажется белым, по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0{,}5\cdot 0{,}4 + 0{,}5\cdot 0{,}3 = 0{,}35.$$

Найдем по формуле Байеса вероятность того, что вынутый белый шар извлечен из первой урны:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}2}{0{,}35} = \frac{20}{35} = \frac{4}{7}.$$

Ответ: $\frac{4}{7}$.

§ 10. Формула Бернулли

> При философской дискуссии больше выигрывает побежденный – в том отношении, что он умножает знания.
>
> *Эпикур*

Если происходит несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют *независимыми относительно события A*.

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность события в каждом испытании одна и та же, равная p. Вероятность ненаступления события A в каждом испытании $q = 1 - p$.

Вероятность $P_n(k)$ того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и не осуществится $n - k$ раз, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ – количество возможных сочетаний из n элементов по k элементов; $p^k q^{n-k}$ – умножение вероятностей независимых событий.

Пример 45. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: 1) включено 4 мотора; 2) включены все моторы; 3) выключены все моторы.

Решение. Воспользуемся формулой Бернулли.

1) $P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \dfrac{6!}{4! \cdot 2!} 0{,}8^4 0{,}2^2 = \dfrac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 2!} 0{,}8^4 0{,}2^2 = 0{,}245\,76$;

2) $P_6(6) = C_6^6 p^6 q^0 = \dfrac{6!}{6! \cdot 0!} 0{,}8^6 0{,}2^0 = 0{,}8^6 = 0{,}262\,144$;

3) $P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = \dfrac{6!}{0! \cdot 6!} 0{,}8^0 0{,}2^6 = 0{,}2^6 = 0{,}000\,064$.

Ответ: 1) 0,245 76; 2) 0,262 144; 3) 0,000 064.

§ 11. Локальная и интегральная теоремы Лапласа

Научись слушать, и ты сможешь извлечь пользу даже из тех, кто говорит плохо.

Плутарх

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, так как формула требует выполнения действий над очень большими числами.

Например, если p = 0,1, q = 0,9, n = 40, k = 20, то вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществляется ровно k раз и не осуществляется $n - k$ раз

$$P_{40}(20) = C_{40}^{20} p^{20} q^{20} = \frac{40!}{20!\cdot 20!} 0{,}1^{20} 0{,}9^{20}.$$

При вычислении можно пользоваться специальными таблицами логарифмов факториалов, но из-за округлений окончательный результат может значительно отличаться от истинного. Благодаря ЭВМ и правильной организации вычислений можно существенно уменьшить погрешность вычисления и для больших n.

В общем случае при больших n (n > 100) используют локальную теорему Лапласа.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появиться в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$.

Функция $\varphi(x)$ является четной: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Значение функции $\varphi(x)$ находим по табл. прил. 1.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз ($k_1 \le m \le k_2$), приближенно равна определенному интегралу:

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz,$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Интегральную теорему Лапласа иногда записывают как

$$P\left(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2 \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz.$$

При решении используют таблицу для функции (см. прил. 2):

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2} dz.$$

Преобразуем функцию к виду

$$P_n(k_1;k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-z^2/2} dz = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-z^2/2} dz +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-z^2/2} dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$; $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\Phi(x)$ нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 46. Найдите вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $k = 104$, $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Так как $n = 400$ – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$.

Вычислим значение x и искомую вероятность $P_{400}(104)$:

$$x = \frac{104 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 3; \quad P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(3) = \frac{1}{8} \varphi(3).$$

Значение функции $\varphi(3)$ найдем по табл. прил. 1:

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{8} \cdot 0{,}004\,4 = 0{,}0005\,5.$$

Расчеты по формуле Бернулли с использованием ЭВМ дают точное значение

$$P_{400}(104) = 0{,}000\,675\,05.$$

Ответ: приближенное значение по формуле Лапласа $P_{400}(104) \approx 0{,}000\,55$; точное значение по формуле Бернулли с использованием расчетов на ЭВМ $P_{400}(104) = 0{,}000\,675\,05$.

Пример 47. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найдите вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

1) не менее 70 и не более 80 раз; 2) не более 70 раз.

Решение.

1. По условию $k_1 = 70$, $k_2 = 80$. Тогда

$$x_2 = \frac{80 - 100 \cdot 0{,}75}{\sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx 1{,}154\,7;$$

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}75}{\sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx -1{,}154\,7;$$

$$P_{100}(70; 80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1{,}154\,7) - \Phi(-1{,}154\,7) = 2\Phi(1{,}154\,7).$$

При упрощении воспользовались нечетностью функции $\Phi(x)$.

Значение функции Лапласа находим по табл. прил. 2: $\Phi(1{,}15) = 0{,}374\,9$; $\Phi(1{,}16) = 0{,}377\,0$. В качестве ответа можно взять любое из этих значений или их среднеарифметическое:

$$P_{100}(70;\, 80) \approx 2\Phi(1{,}1547) \approx 2(\Phi(1{,}15) + \Phi(1{,}16))/2 = 0{,}751\,9.$$

2. По условию $k_1 = 0$, $k_2 = 70$. Тогда

$$x_1 = \frac{-100 \cdot 0{,}75}{\sqrt{100 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25}} \approx -17{,}32;$$

$$x_2 \approx -1{,}154\,7;$$

$$P_{100}(0;70) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(-1{,}154\,7) - \Phi(-17{,}32) =$$
$$= \Phi(17{,}32) - \Phi(1{,}154\,7).$$

Значение функции Лапласа находим по табл. прил. 2:

$$P_{100}(0;\, 70) \approx 0{,}5 - 0{,}375\,95 = 0{,}124\,05.$$

Ответ: 1) 0,751 9; 2) 0,124 05.

§ 12. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Говори с людьми в соответствии с их разумом.

Саади

Найдем вероятность того, что отклонения относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$, т. е. выполняется неравенство

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon .$$

Раскроем модуль $-\varepsilon \le \frac{m}{n} - p \le \varepsilon$ или $-\varepsilon \le \frac{m-np}{n} \le \varepsilon$. Умножим эти неравенства на множитель $\sqrt{\frac{n}{pq}}$:

$$-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} .$$

Используя теорему Лапласа, получим:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 48. Вероятность появления события в каждом из 10 000 независимых испытаний p = 0,75. Найдите вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Решение. По условию $\varepsilon = 0{,}001$, $p = 0{,}75$, тогда

$$P\left(\left|m/n - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right) = 2\Phi\left(0{,}001\sqrt{\frac{10\,000}{0{,}75\cdot 0{,}25}}\right) \approx 2\Phi(0{,}23) \approx 0{,}182.$$

Ответ: 0,182.

Пример 49. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появления герба от вероятности p = 0,5 окажется по абсолютной величине не более 0,01?

Решение. По условию $2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0{,}6$; $2\Phi\left(\frac{0{,}01}{0{,}5}\sqrt{n}\right) = 0{,}6$; $\Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) = 0{,}3$.

По табл. прил. 2 находим:

$$0{,}02\sqrt{n} \approx 0{,}84,\ \sqrt{n} \approx 42,\ n \approx 1\,764.$$

Ответ: 1 764.

§ 13. Случайная величина. Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин

> Два человека бесплодно трудились и без пользы старались: тот, кто копил богатство и не пользовался им, и тот, кто учился наукам, но не применял их.
>
> *Саади*

Случайной называют величину, которая в результате испытания принимает одно и только одно возможное значение, неизвестное заранее.

Будем обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, и их возможные значения – соответствующими строчным буквами x, y, z.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные возможные значения с определенной вероятностью. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Способы задания

1. С помощью таблицы:

X	x_1	x_2	…	x_n	– возможные значения
P	p_1	p_2	…	p_n	– вероятность возможных значений

События x_1, x_2, …, x_n – образуют полную группу, т. е.

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1.$$

2. Аналитический (в виде формулы):

$$P(X = x_i) = f(x_i).$$

3. Графический: для наглядности точки в прямоугольной системе координат $(x_i;\, p_i)$ соединяются отрезками прямых. Такая фигура называется *многоугольником распределения.*

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появится либо не появиться, причем вероятность наступления события в каждом испытании постоянна и равна p, то закон распределения вероятностей определяется формулой Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

которую называют *биноминальным распределением вероятностей.*

Представим биноминальный закон в виде:

X	n	$n-1$	…	k	…	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	q^n

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p и n велико, то закон распределения вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий выражается формулой

$$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!,$$

где $\lambda = pn$ (*закон распределения Пуассона*).

Рассмотрим события, наступающие в случайные моменты времени.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступают в случайные моменты времени.

Интенсивностью потока λ называют среднее число событий, появляющихся в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за промежуток времени t определяется формулой Пуассона:

$$P_t(k) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!$$

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Свойство стационарности заключается в том, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом промежутки времени предполагаются непересекающимися.

Свойство отсутствия последствия состоит в том, что вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t есть функция, зависящая только от k и t.

Свойство ординарности выражается в том, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно, т. е. за бесконечно малый промежуток времени может появиться только одно событие.

Пример 50. Игральная кость брошена 3 раза. Составьте закон распределения числа появлений шестерки.

Решение. Вероятность появления шестерки при одном бросании $p = 1/6$, вероятность непоявления шестерки $q = 1 - p = 5/6$.

При трех бросаниях игральной кости шестерка может появиться либо 3, либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$.

Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$:

$$P_3(0) = C_3^0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216};$$

$$P_3(1) = C_3^1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216};$$

$$P_3(2) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216};$$

$$P_3(3) = C_3^3 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}.$$

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3
P	125/216	75/216	15/216	1/216

Пример 51. Прядильщица обслуживает 1 000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найдите вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет на 5 веретенах.

Решение. По условию n = 1 000, p = 0,004, k = 5. Найдем λ: $\lambda = pn = 4$.

По формуле Пуассона искомая вероятность

$$P_{1\,000}(5) = 4^5 e^{-4}/5! \approx 0{,}15.$$

Ответ: 0,15.

Пример 52. Среднее число вызовов, поступающих на АТС за 1 минуту, равно 5. Найдите вероятность того, что за 2 минуты поступит: 1) 3 вызова; 2) менее 3 вызовов.

Решение. Предположим, что поток вызовов является простейшим.

1. По условию $\lambda = 5$, $t = 2$, $k = 3$. Вероятность того, что за 2 минуты поступит 2 вызова, найдем по формуле Пуассона:

$$P_2(3) = 10^3 e^{-10}/3! \approx 0{,}007\,6.$$

2. События «не поступило ни одного вызова», «поступил 1 вызов» и «поступило 2 вызова» несовместны. Вычислим по теореме сложения искомую вероятность того, что за 2 минуты поступит менее 3 вызовов:

$$P_2(k < 3) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) = e^{-10} + 10e^{-10} + 10^2 e^{-10}/2! \approx 0{,}002\,8.$$

Ответ: 1) 0,007 6; 2) 0,002 8.

§ 14. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Когда добро и мир несем мы людям,
То и в земле спокойно спать мы будем.
Саади

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда математическое ожидание $M(X)$ определяется равенством

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная величина (постоянная).

Математическое ожидание приближенно (тем точнее, чем больше число испытаний) равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины:

$$\overline{X} \approx M(X).$$

На числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. Поэтому его часто называют *центром распределения.*

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:

$$M(C) = C.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$M(CX) = C \cdot M(X).$$

3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Теорема 1. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании при условии, что в каждом испытании вероятность появления события A равна p:

$$M(X) = p \cdot n.$$

Переход от $M(X)$ к $M(X^2)$, а тем более к $M(X^3)$ и $M(X^4)$ позволяет лучше учесть влияние на математическое ожидание того возможного значения, которое велико и имеет малую вероятность. Для этого используют начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$:

$$\mu_k = M[(X - M(X))^k].$$

В частности,

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M\,(X - M(X)) = \mu_1 = 0,$$

поэтому для определения степени рассеивания случайной величины вокруг ее математического ожидания выделяют среднее значение квад-рата отклонения.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[(x - M(X))^2] = \mu_2.$$

Теорема 2. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины C равна 0:

$$D(C) = 0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат:

$$D(CX) = C^2D(X).$$

3. Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсии этих величин:

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y).$$

4. Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсии этих величин:

$$D(X - Y) = D(X) + D(Y).$$

Теорема 3. Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, вычисляется по формуле

$$D(X) = n \cdot q \cdot p.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}\,.$$

Размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X.

Теорема 4. Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин

$$\sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)}\,.$$

Пример 53. Найдите математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

Решение. Число независимых испытаний $n = 20$. В каждом испытании вероятность выигрыша $p = 0{,}3$. Искомое математическое ожидание

$$M(X) = 20 \cdot 0{,}3 = 6.$$

Ответ: 6.

Пример 54. Найдите математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой и второй кости, через X и Y соответственно. Запишем закон распределения числа очков для первой игральной кости:

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:

$$M(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Очевидно, что и $M(Y) = 3{,}5$.

Искомое математическое ожидание

$$M(X_1 \cdot X_2) = M(X_1) \cdot M(X_2) = 3{,}5 \cdot 3{,}5 = 12{,}25.$$

Ответ: 12,25.

Пример 55. Дискретная случайная величина задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	3	4
P	0,1	0,2	0,4	a

Найдите значение a.

Решение. Сумма вероятностей дискретной случайной величины X, заданной законом распределения, равна единице:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + a = 1,$$

отсюда

$$a = 1 – 0{,}1 – 0{,}2 – 0{,}4 = 0{,}3.$$

Ответ: $a = 0{,}3$.

Пример 56. Пусть X – дискретная случайная величина, заданная законом распределения вероятностей:

X	–1	3
P	0,3	0,7

Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений X на их вероятности:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = -1 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}7 = -0{,}3 + 2{,}1 = 1{,}8.$$

Ответ: $M(X) = 1{,}8$.

Пример 57. Найдите дисперсию случайных величин, зная закон ее распределения:

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 0{,}1\cdot0{,}4 + 2\cdot0{,}2 + 10\cdot0{,}15 + 20\cdot0{,}25 = 0{,}04 + 0{,}4 + 1{,}5 + 5 = 6{,}94;$$

математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 0{,}1^2\cdot0{,}4 + 2^2\cdot0{,}2 + 10^2\cdot0{,}15 + 20^2\cdot0{,}25 =$$
$$= 0{,}004 + 0{,}8 + 15 + 100 = 115{,}804.$$

Тогда дисперсия

$$D(X) = M(X^2) – (M(X))^2 = 115{,}804 – (6{,}94)^2 = 67{,}640\,4.$$

Ответ: 67,640 4.

Пример 58. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Найдите закон распределения величины X, если известно, что $M(X) = 1{,}4$, $D(X) = 0{,}24$ и вероятность p_1 того, что X примет значение x_1, равна 0,6.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице, поэтому вероятность $p_2 = 1 – 0{,}6 = 0{,}4$. Итак, закон распределения случайной величины X имеет вид

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 составим два уравнения. Учитывая, что по условию $M(X) = 1,4$, запишем первое из уравнений:

$$0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4. \qquad (а)$$

Принимая во внимание, что по условию $D(X) = 0,24$, используя формулу $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, напишем второе уравнение:

$$0,24 = 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 - 1,4^2,$$

или

$$0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2. \qquad (б)$$

Составим систему из уравнений (*а*), (*б*) и найдем ее решение методом подстановки:

$$\begin{cases} 0,6x_1 + 0,4x_2 = 1,4, \\ 0,6x_1^2 + 0,4x_2^2 = 2,2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x_1 + 4x_2 = 14, \\ 6x_1^2 + 4x_2^2 = 22. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 3x_1^2 + 2x_2^2 = 11. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{7 - 3x_1}{2}, \\ 3x_1^2 + 2\left(\dfrac{7 - 3x_1}{2}\right)^2 = 11. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{7 - 3x_1}{2}, \\ 15x_1^2 - 42x_1 + 27 = 0. \end{cases}$$

1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; 2) $x_1 = 1,8$, $x_2 = 0,8$. По условию $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет только первое решение. Таким образом, искомый закон распределения:

X	1	2
P	0,6	0,4

Пример 59. Испытывается устройство, состоящее из 3 автономно работающих приборов. Вероятности отказа приборов: $p_1 = 0,4$; $p_2 = 0$; $p_3 = 0,6$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа отказавших приборов.

Решение. Вероятность того, что ни один прибор не откажет, определяется по формуле

$$P(0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,4 = 0,12.$$

Вероятность отказа 1 прибора

$$P(1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3;$$

$$P(1) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,08 + 0,12 + 0,18 = 0,38.$$

Вероятность отказа 2 приборов

$$P(2) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3;$$

$$P(2) = 0,4 \cdot 0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,5 \cdot 0,6 = 0,08 + 0,12 + 0,18 = 0,38.$$

Вероятность отказа трех приборов

$$P(3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0,5 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 0,12.$$

Проверка: $P = 0{,}12 + 0{,}38 + 0{,}38 + 0{,}12 = 1$.
Запишем закон распределения числа отказавших приборов:

X	0	1	2	3
P	0,12	0,38	0,38	0,12

Найдем математическое ожидание случайных величин X и X^2:

$$M(X) = 0 + 0{,}38 + 0{,}76 + 0{,}36 = 1{,}5;$$

$$M(X^2) = 0 + 0{,}38 + 1{,}52 + 1{,}08 = 2{,}98.$$

Определим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2{,}98 - 2{,}25 = 0{,}73,$$

и среднее квадратичное отклонение числа отказавших приборов:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}73} \approx 0{,}85.$$

Ответ: $M(X) = 1{,}5$; $D(X) = 0{,}73$; $\sigma(X) \approx 0{,}85$.

Пример 60. Даны две независимые дискретные случайные величины X и Y и их законы распределения вероятностей:

X	1	2
P	0,3	0,7

Y	5	6
P	0,2	0,8

Найдите закон распределения вероятностей суммы $X + Y$.
Решение. Возможные значения $Z = X + Y$:

$$z_{11} = x_1 + y_1 = 1 + 5 = 6;$$

$$z_{12} = x_1 + y_2 = 1 + 6 = 7;$$

$$z_{21} = x_2 + y_1 = 2 + 5 = 7;$$

$$z_{22} = x_2 + y_2 = 2 + 6 = 8.$$

Вероятность $X + Y$ найдем с помощью теорем произведения и суммы вероятностей:

$$P(Z = 6) = 0{,}3 \cdot 0{,}2 = 0{,}06;$$

$$P(Z = 7) = 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}7 \cdot 0{,}2 = 0{,}24 + 0{,}14 = 0{,}38;$$

$$P(Z = 8) = 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}56.$$

Тогда искомый закон распределения величины $X + Y$ имеет вид

$X + Y$	6	7	8
P	0,06	0,38	0,56

§ 15. Функция распределения случайной величины

Покуда человек не говорит,
Неведом дар его, порок сокрыт.
Саади

Функцией распределения случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют понятие «интегральная функция».

Случайную величину называют непрерывной, если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства функции распределения

1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0; 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. $F(x)$ – неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(a;\ b)$, равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

4. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю. Таким образом, имеет смысл рассматривать вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал, пусть даже сколь угодно малый.

5. Если возможное значение случайной величины X принадлежит интервалу (a, b), то $F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x \ge b$.

6. Если возможные значения непрерывной случайной величины расположены на всей оси, то $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

График функции распределения

График функции распределения непрерывной случайной величины, возможные значения которой принадлежат интервалу $(a;\ b)$ представлен на рис. 26.

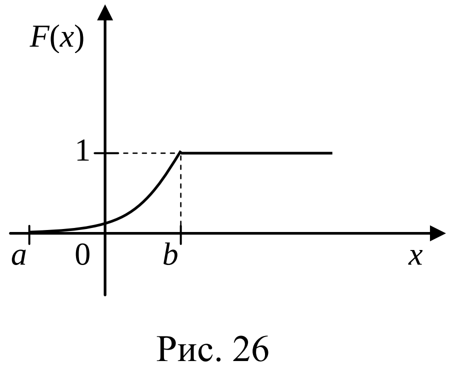


Рис. 26

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. На рис. 27 приведен график функции распределения дискретной случайной величины X, заданной таблицей распределения:

X	x_1	x_2	x_3
P	p_1	p_2	p_3

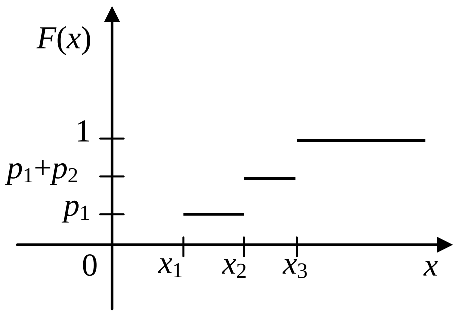


Рис. 27

Пример 61. Постройте график функции

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 2, \\ x/2-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (2; 3).

Решение. График функции изображен на рис. 28. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (2; 3), равна приращению функции распределения на этом интервале:

$P(2 \le X < 3) = F(3) - F(2) = 1/2.$

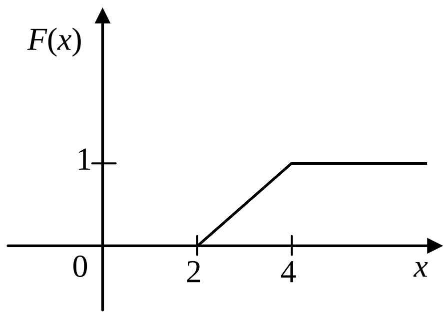


Рис. 28

Пример 62. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	–1	1	2	5
P	0,1	0,3	0,2	0,4

Найти значение интегральной функции распределения вероятностей $F(3)$.

Решение. Функция распределения $F(x)$ определяет вероятность того, что случайная величина X примет значение, меньшее x, т. е. $F(x) = P(X < x)$.

По условию $x = 3$, т. е.

$$F(3) = P(X < 3) = P(-1) + P(1) + P(2) = 0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}2 = 0{,}6.$$

Ответ: $F(3) = 0{,}6$.

§ 16. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Тайну и другу поверить нельзя,
Ибо у друга есть тоже друзья.
Саади

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называют функцию $f(x)$ – первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x),$$

т. е. функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Для дискретной случайной величины плотность распределения не определяется.

Теорема. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу $(a;\ b)$, вычисляется по формуле

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x)$ – четная функция, то $P(-a < x < a) = P(|x| < a) = 2\int_0^a f(x)dx$.

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.

2. Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

3. Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу $(a;\ b)$, то $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Функция $f(x)$ определяет плотность распределения вероятности для каждой точки X, аналогично плотности массы в точке.

§ 17. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Будьте внимательны к своим мыслям – они начало поступков.

Лао-Цзы

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a;\ b]$, называют:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)dx,$$

где $f(x)$ – плотность распределения вероятностей.

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx.$$

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Пример 63. Случайная величина X распределена на отрезке [2; 4] с плотностью вероятности $f(x) = kx^3$. Найдите коэффициент k.

Решение. Все возможные значения случайной величины X принадлежат отрезку [2; 4]. Следовательно, $\int_2^4 f(x)dx = 1$. Найдем определенный интеграл:

$$\int_2^4 kx^3 dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_2^4 = 60k,$$

из уравнения $60k = 1$ получим:

$$k = \frac{1}{60}.$$

Ответ: $k = \dfrac{1}{60}$.

Пример 64. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ x/2 & \text{при} \quad 0<x\le 2;\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найдите плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания случайной величины в интервал (1/4; 1).

Решение. Найдем плотность распределения вероятностей $f(x)$, для чего продифференцируем по x интегральную функцию распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ 1/2 & \text{при} \quad 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ для непрерывной случайной величины находится по формуле $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$, а так как $f(x)$ вне полуинтервала (0; 2] принимает значение ноль, то $M(X) = \int\limits_0^2 x\cdot\frac{1}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2 = 1.$

Дисперсию удобно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$:

$$D(X) = \int\limits_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}dx - \left(\int\limits_0^2 x\cdot\frac{1}{2}dx\right)^2 = \left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2 - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}.$$

Вероятность попадания значений случайной величины X в полуинтервал (1/4; 1] равна определенному интегралу в пределах от 1/4 до 1 от функции плотности распределения вероятностей:

$$P(1/4 < X < 1) = \int\limits_{1/4}^{1}\frac{1}{2}dx = \left.\frac{1}{2}x\right|_{1/4}^{1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}.$$

§ 18. Закон равномерного распределения вероятностей

Кто много говорит, тот часто
терпит неудачу.

Лао-Цзы

Распределение вероятностей называют *равномерным,* если на интервале (a; b), которому принадлежат все возможные значения случайной величины X, плотность распределения сохраняет постоянное значение, т. е. $f(x) = \dfrac{1}{b-a}$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной в интервале (a; b), равно полусумме концов этого интервала:

$$M(x) = \frac{a+b}{2}.$$

Дисперсия случайной величины, равномерно распределенной в интервале (a; b), находится из уравнения

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

График функции равномерного распределения $F(x)$ изображен на рис. 29а, а график плотности распределения $f(x)$ – на рис. 29б.

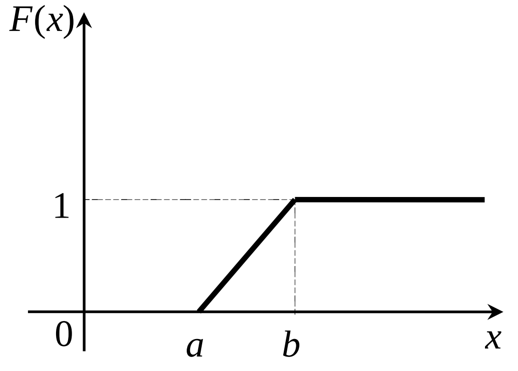


Рис. 29а

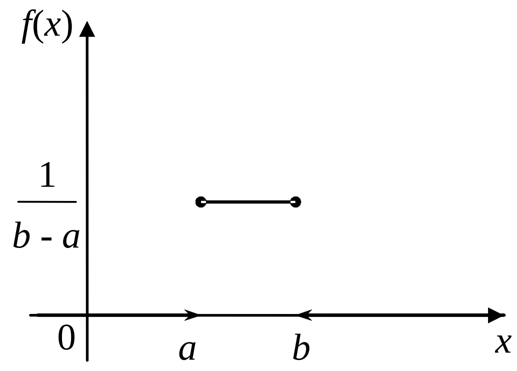


Рис. 29б

Вероятность попадания в заданный интервал (α; β) равномерно распределенной случайной величины, все значения которой заключены в интервале (a; b) ((α; β) $\subset$ (a; b)), определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Пример 65. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины *X*, равномерно распределенной в интервале (1; 6).

Решение. Плотность вероятности равномерного распределения

$$f(x) = \frac{1}{b-a} = \; = \frac{1}{6-1} = 0{,}2\,.$$

Подставив в формулу $M(X) = \int_a^b xf(x)dx$ значения $f(x) = 0{,}2$; $a = 1$; $b = 6$, получим:

$$M(X) = 0{,}2\int_1^6 xdx = 0{,}1x^2\Big|_1^6 = 3{,}5\,.$$

Этот же результат можно получить, используя свойство равномерно распределенной случайной величины $M(X) = (a + b)/2 = (1 + 6)/2 = 3{,}5$.

Найдем дисперсию по формуле $D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - \left[M(X)\right]^2$:

$$D(X) = 0{,}2\int_1^6 x^2dx - \left[3{,}5\right]^2 = 0{,}2\frac{x^3}{3}\Big|_1^6 - 12{,}25 = 2\frac{1}{12}\,.$$

Этот результат можно получить, используя свойство равномерно распределенной случайной величины:

$$D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(6-1)^2}{12} = \frac{25}{12} = 2\frac{1}{12}\,.$$

Ответ: $M(X) = 3{,}5$, $D(X) = 2\frac{1}{12}$.

Пример 66. Поезда на станцию метро прибывают каждые 5 мин. Найдите вероятность того, что время ожидания поезда не будет больше 4 мин.

Решение. По условию задачи интервалы $(a;\, b) = (0;\, 5)$, $(\alpha;\, \beta) = (0;\, 4)$. Найдем вероятность того, что время ожидания поезда не будет больше 4 мин, по формуле $P(\alpha < X < \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a}$:

$$P(0 < X < 4) = \frac{4-0}{5-0} = 0{,}8\,.$$

Ответ: 0,8.

§ 19. Закон нормального распределения вероятностей

Все изменяется, ничто не исчезает.
Овидий

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: математическим ожиданием a и средним квадратическим отклонением σ нормального распределения. График плотности нормального распределения (кривая Гаусса) для значений $\sigma = 1$, $\sigma = 2$, $\sigma = 4$ показан на рис. 30. Чем меньше σ, тем максимум функции $f(x)$ больше, а рассеивание значений случайной величины относительно математического ожидания a меньше.

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, примет значение, принадлежащее интервалу $(\alpha;\ \beta)$, определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Правило трех сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения: $|X-a|<3\sigma$.

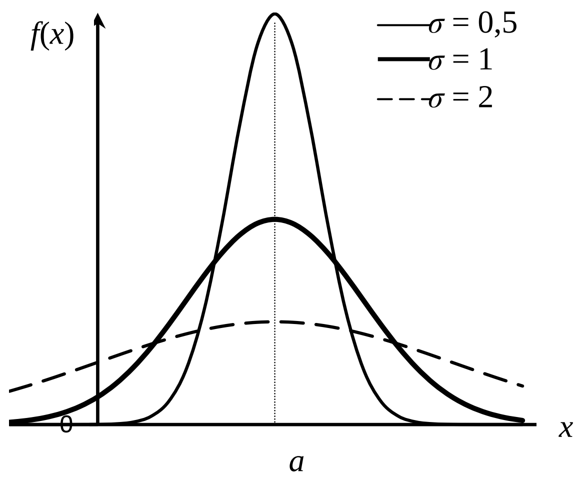


Рис. 30

Теорема Ляпунова (центральная предельная теорема). Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю суму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Из этой теоремы следует, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике.

При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс.

Асимметрией теоретического распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднего квадратического отклонения:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Если длинная часть кривой расположена правее моды $M_0(x)$ (точки максимума функции), то асимметрия положительна (рис. 31а), если слева – отрицательна (рис. 31б).

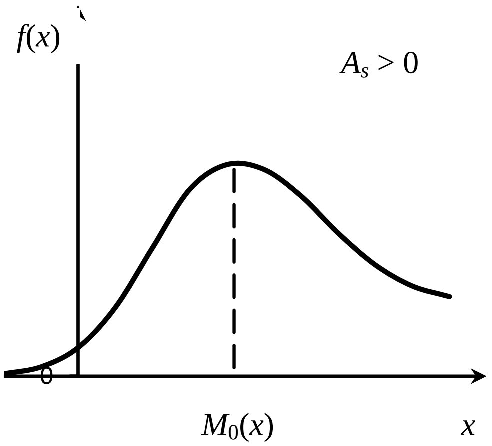


Рис. 31а

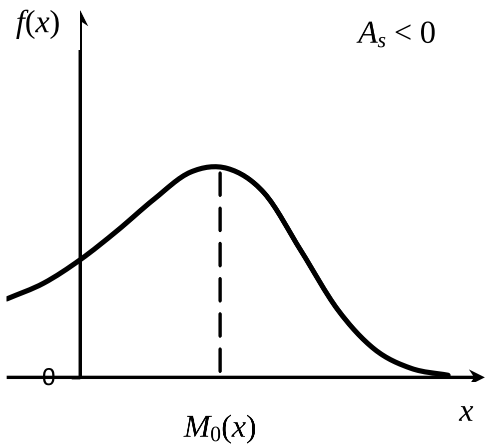


Рис. 31б

Эксцессом теоретического распределения называют характеристику, которая определяется равенством $E_k = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Эксцесс нормального распределения равен нулю.

Если эксцесс некоторого распределения отличен от нуля, то кривая этого распределения отличается от нормальной кривой: при $E_k > 0$ кривая имеет более высокую и острую вершину, чем нормальная кривая (рис. 32а); при $E_k < 0$ кривая имеет более низкую и плоскую вершину, чем нормальная кривая (рис. 32б). При этом предполагается, что нормальное и теоретическое распределения имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии.

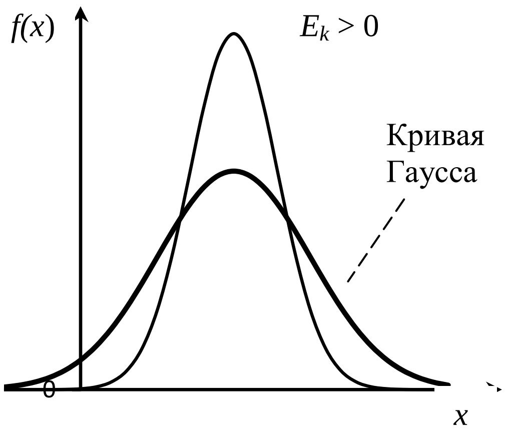


Рис. 32а

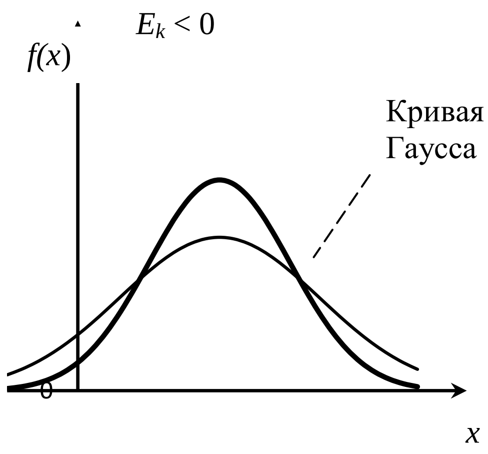


Рис. 32б

Пример 67. Математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной величины x равны соответственно 5 и 2. Найдите вероятность попадания этой величины в заданный интервал (3; 8).

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(\alpha < x < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Подставив $\alpha = 3$, $\beta = 8$, $a = 5$, $\sigma = 2$ и учитывая, что функция Лапласа $\Phi(x)$ нечетна, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, получим: $P(3 < X < 8) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(1{,}5) + \Phi(1)$. По табл. прил. 2 находим: $\Phi(1{,}5) = 0{,}433\,2$, $\Phi(1) = 0{,}341\,3$. Искомая вероятность $P(3 < x < 8) = 0{,}774\,5$.

Пример 68. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей $f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{18}}$. Найдите математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины.

Решение. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной непрерывной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Найдем математическое ожидание а и среднее квадратическое отклонение σ из системы уравнений:

$$\begin{cases} a = 4, \\ \sigma = 3, \\ 2\sigma^2 = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4, \\ \sigma = 3, \\ \sigma = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow a = 4, \sigma = 3.$$

Ответ: $a = 4$; $\sigma = 3$.

§ 20. Закон показательного распределения вероятностей

Выберите себе работу по душе,
и вам не придется работать
ни одного дня в своей жизни.
Конфуций

Показательным (экспоненциальным) называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью:

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$$

Показательное распределение определяется одним параметром λ. График плотности показательного распределения с параметром λ = 1 представлен на рис. 33.

Функция распределения показательного закона

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ 1-e^{-\lambda x}, & \text{если } x\ge 0.\end{cases}$$

График функции показательного распределения приведен на рис. 34.

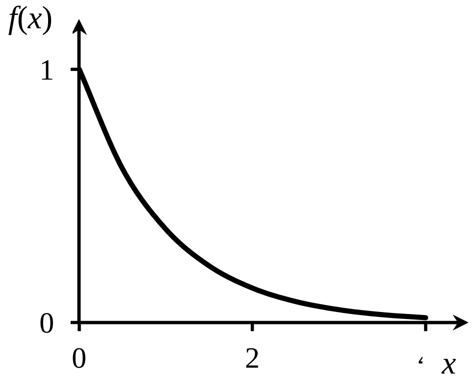


Рис. 33

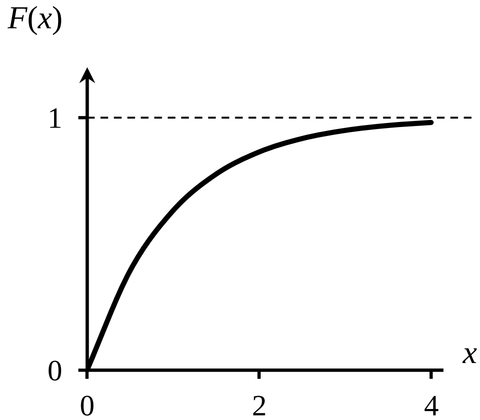


Рис. 34

Вероятность того, что случайная величина, распределенная по показательному закону, примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), определяется формулой

$$P(\alpha<X<\beta)=F(b)-F(a)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Математическое ожидание показательного распределения

$$M(x)=\frac{1}{\lambda}.$$

Дисперсия показательного распределения

$$D(x) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Показательное распределение применяется в теории надежности.

Надежностью называется вероятность безотказной работы системы в течение времени t. Параметр λ характеризует интенсивность отказов.

Вероятность того, что элемент с интенсивностью отказа λ проработает безотказно в течение времени t, определяется формулой

$$P(t < X) = F(+\infty) - F(t) = e^{-\lambda t} - e^{-\infty} = e^{-\lambda t}.$$

Пример 69. Нерезервированная система состоит из 3 элементов. Интенсивности их отказов: λ_1 = 0,002 ч$^{-1}$, λ_2 = 0,004 ч$^{-1}$, λ_3 = 0,01 ч$^{-1}$. Определите интенсивность отказа системы; среднее время безотказной работы; вероятность того, что система проработает безотказно 240 ч.

Решение. Вычислим интенсивность отказа:

$$\lambda = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 0{,}002 + 0{,}004 + 0{,}01 = 0{,}016 \text{ ч}^{-1}.$$

Среднее время безотказной работы

$$T = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}016} = 62{,}5 \text{ ч}$$

.

Найдем вероятность того, что система проработает безотказно 240 ч:

$$P(t) = e^{-\lambda t},\ P(240) = e^{-0{,}016 \cdot 240} = e^{-3{,}84} \approx 0{,}02.$$

Ответ: λ = 0,016 ч$^{-1}$; T = 62,5 ч; P(240) ≈ 0,02.

Пример 70. Время в годах безотказной работы прибора подчинено показательному закону $f(t) = 0{,}1e^{-0{,}1t}$ ($t \geq 0$). Найдите вероятность того, что прибор проработает не более 2 лет.

Решение. Определим вероятность того, что прибор проработает не более 2 лет, т. е. от 0 до 2 лет:

$$P(0 < X < 2) = F(2) - F(0) = e^{-0{,}1 \cdot 0} - e^{-0{,}1 \cdot 2} = 1 - e^{-0{,}2} \approx 1 - 0{,}818\,7 = 0{,}181\,3.$$

Ответ: 0,181 3.

Приложения

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	б	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	074	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849	1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,80	0,4974
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463	2,02	0,4783	2,82	0,4976
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883	1,62	0,4474	2,04	0,4793	2,84	0,4977
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484	2,06	0,4803	2,86	0,4979
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495	2,08	0,4812	2,88	0,4980
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505	2,10	0,4821	2,90	0,4981
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,92	0,4982
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525	2,14	0,4838	2,94	0,4984
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535	2,16	0,4846	2,96	0,4985
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545	2,18	0,4854	2,98	0,4986
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032	1,70	0,4554	2,20	0,4861	3,00	0,49865
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564	2,22	0,4868	3,20	0,49931
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573	2,24	0,4875	3,40	0,49966
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582	2,26	0,4881	3,60	0,49984
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591	2,28	0,4887	3,80	0,49993
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599	2,30	0,4893	4,00	0,49997
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608	2,32	0,4898	4,50	0,49999
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616	2,34	0,4904	5,00	0,49999
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625	2,36	0,4909	если $x > 0,5$,	
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633	2,38	0,4913	то $\Phi(x) \cong 0,5$	
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767	2,78	0,4973		

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Балашов, А.Н. Практикум по математике для студентов заочной формы обучения / А.Н. Балашов, И.А. Лесничевская, М.А. Шестакова. Ч. I. Тверь, 2013. 112 с.

2. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. / К.Н. Лунгу [и др.]; под ред. С.Н. Федина. 6-е изд. М.: Айрис-пресс, 2007. 592 с.

3. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д.Т. Письменный. 5-е изд. М.: Айрис-пресс, 2007. 608 с.

Балашов Александр Николаевич
Шестакова Маргарита Аркадьевна

Практикум по математике
для студентов заочной формы обучения

Часть II

Редактор М.Б. Юдина
Корректор В.А. Смирнова
Технический редактор Ю.Ф. Воробьева

Подписано в печать 08.05.2015
Формат 60 × 84/16 Бумага писчая
Физ. печ. л. 7,5 Усл. печ. л. 6,98 Уч.–изд. л. 6,53
Тираж 100 экз. Заказ № 35 С – 31

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22