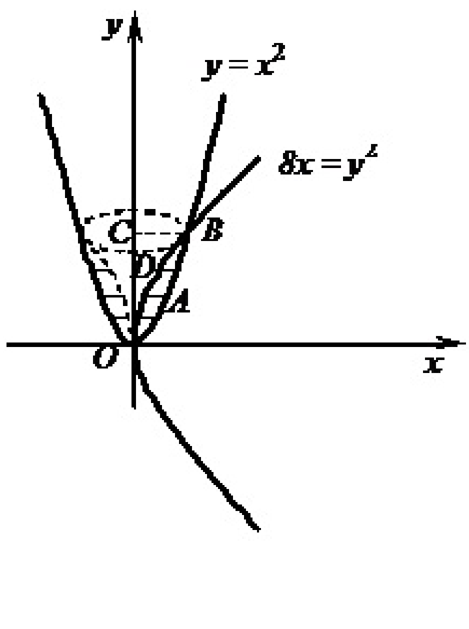
Министерство образования Российской Федерации
Тверской государственный технический университет

Кафедра высшей математики

Руководство к решению задач по математике
часть I



Тверь 2010

Соответствует программе по математике на 1-й и 2-й семестры.
Предназначено для студентов технических специальностей дневной и заочной формы обучения.
Даются краткие сведения по теории и методические указания для решения задач. Приводятся примеры типичных задач с решениями.
Составлены задачи для самостоятельного решения.
Обсуждено и рекомендовано к печати на заседании кафедры высшей математики (протокол № 2 от 30 августа 2010 г.)

Руководство к решению задач по математике
часть I

Составители: А. Н. Балашов, Л. А. Валяева, Ю.А. Егоров.

Методические указания к выполнению контрольной работы № 1
«Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии.
Элементы линейной алгебры. Введение в математический анализ»

Глава 1. Элементы линейной алгебры

§1. Определители

Определителем (**детерминантом**) **второго порядка** называется число $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, определяемое равенством $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Числа a_{ij} $(i, j = 1,2)$ называются *элементами* определителя. Первый индекс i указывает номер строки, второй j – номер столбца. Строки и столбцы называют рядами определителя. Порядок определителя равен количеству его строк или столбцов.

Для вычисления определителя n-го порядка сформулируем теорему:

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots a_{ij} \dots & & a_{in} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nj} \dots & \dots a_{nn} & \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + \dots a_{ij}A_{ij} + \dots a_{in}A_{in} \quad ,$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}. В частности,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется минор M_{ij}, взятый со знаком «+», если сумма индексов - четное число и со знаком «-», если сумма индексов i и j - нечетное число, т.е $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n- го порядка называется определитель (n-1) –го порядка, получающийся из данного определителя в результате вычеркивания i –ой строки и j – го столбца.

Пример 1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Решение. Разложим определитель по элементам первой строки, используя теорему

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot A_{11} + 2\cdot A_{12} + 1\cdot A_{13} = 3\cdot M_{11} - 2\cdot M_{12} + 1\cdot M_{13} = 3\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} +$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\cdot(9-2) - 2\cdot(3-4) + (1-6) = 18 \qquad \mathit{Ответ}: 18$$

Если определитель третьего порядка разложить по первой строке, то получим формулу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Элементы a_{11}, a_{22}, a_{33} образуют главную диагональ определителя, а элементы a_{13}, a_{22}, a_{31} – побочную диагональ определителя. Чтобы запомнить эту формулу, прибегают к графическому ее изображению

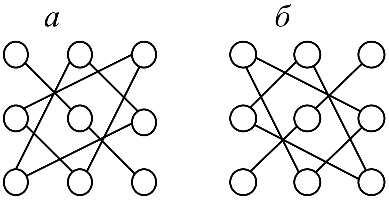


Рис. 1

Такой метод вычисления определителя третьего порядка получил название правило **«треугольников»**. При вычислении определителя со знаком «+» берутся произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали (рис. 1а); со знаком «–» берутся произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными этой диагонали (рис. 1*б*).

Пример2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Решение. По правилу «*треугольников*» $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 8 + 1 - 6 - 6 - 6 = 18$.

Другой способ вычисления определителя третьего порядка – по правилу **Саррюса**. Для этого к определителю третьего порядка приписываются справа два первых столбца. Складывают произведения элементов со знаком «+» на диагоналях, параллельных главной, и со знаком «–» на диагоналях, параллельных побочной, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

Решение. По правилу *Саррюса* $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} = 27 + 8 + 1 - 6 - 6 - 6 = 18$.

Основные свойства определителей.

1. Величина определителя не изменится при замене всех его строк соответствующими столбцами.
2. Величина определителя меняет знак на противоположный при перестановке двух соседних параллельных рядов.
3. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно выносить за знак определителя.
4. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.
5. Величина определителя не изменится, если к элементам какого-либо ряда прибавить соответственно элементы другого параллельного ряда, умноженные на произвольное число.

Пример 3 Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Решение. Определитель четвертого порядка вычисляется разложением по элементам какого-либо ряда. Обычно выбирают ряд, у которого часть элементов равна нулю. Если нулевых элементов нет, то, используя 5-е свойство определителя, получают три нуля в каком-либо ряде.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & -4 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -12 - 12 + 8 + 12 = -4$$

Из второй строки вычли первую, предварительно умноженную на два; из четвертой строки вычли первую; разложили определитель по элементам первого столбца.

§2. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера $m\times n$ называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$)

$$A = \left(a_{ij}\right) = \left[a_{ij}\right] = \left\|a_{ij}\right\| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов.

Элементы a_{ij} называются элементами матрицы; элемент a_{ij} расположен в i-й строке и в j-м столбце данной матрицы; m – число строк, n – число столбцов.

Матрица размера $m\times 1$ называется столбцом, матрица размера $1\times n$ – строкой.

Матрица размера $n\times n$ называется **квадратной матрицей** порядка n.

Квадратная матрица называется:

а) **треугольной**, если все элементы по одну сторону от главной или побочной диагоналей равны нулю, например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$;

б) **диагональной**, если для $i \neq j$ все $a_{ij} = 0$, т.е. $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$;

в) **единичной** матрицей E , на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю.

Приведем пример единичной матрицы 3-го порядка:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для любой квадратной матрицы A порядка n

$$AE = EA = A.$$

Квадратная матрица A называется **невырожденной**, если ее определитель не равен нулю ($\det A \neq 0$).

Квадратная матрица A называется **вырожденной**, если ее определитель равен нулю ($\det A = 0$).

Матрица A^{-1} называется **обратной** к невырожденной матрице A, если

$$A^{-1}A = A^{-1}A = E.$$

Если в матрице A заменить строки соответствующими столбцами, то получится **транспонированная** матрица A^T.

Квадратная матрица A называется **симметрической**, если $A^T = A$.

Матрица A^V, элементами которой являются алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A, называется **присоединенной** к матрице A.

Обратную матрицу можно найти с помощью присоединенной матрицы:

$$A^{-1} = (A^V)^T/\det A$$

Для матрицы A размера 3x3: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$.

Нулевой называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Операции над матрицами:

1. Две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размера $m\times n$ *равны* тогда и только тогда, когда $a_{ij} = b_{ij}$ для всех i и j.

2. Суммой $A + B$ двух матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размера $m\times n$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ того же размера, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матрицы A и B:

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] = [c_{ij}] = C.$$

3. Произведением αA матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m\times n$ на число α называется матрица $B = [b_{ij}]$ того же размера, получающаяся из матрицы A умножением всех ее элементов на число α:

$$\alpha A = \alpha\,[a_{ij}] = [\alpha a_{ij}] = [b_{ij}] = B.$$

4. Произведением AB матрицы $A = [a_{ij}]$ размера $m\times n$ на матрицу $B = [b_{ij}]$ размера $n\times k$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ размера $m\times k$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B:

$$AB = [a_{ij}b_{ij}] = [c_{ij}] = C,$$

где $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$.

В каждом произведении матриц AB число n столбцов матрицы A должно равняться числу строк матрицы B.

Максимальный порядок r отличного от нуля миноров матрицы A называется ее **рангом** (*rang A*).

Приведем два способа вычисления ранга матрицы.

1. Используется для матрицы малых размеров. Выбирается произвольно какой-либо минор второго порядка матрицы. Если он отличен от нуля, то выбирается минор третьего порядка, в который входит выбранный ранее минор второго порядка и т. д. Этот метод называется методом окаймляющих миноров.

2. С помощью элементарных преобразований приводят матрицу к треугольному виду.

Элементарные операции над строками (столбцами) матрицы не меняют ее ранга:

1. Перестановка строк (столбцов) местами.

2. Умножение любой строки (столбца) на число, отличное от нуля.
3. Прибавление к одной строке (столбца) другой, умноженной на число.
4. Вычеркивание нулевой строки (столбца).

§3. Системы линейных уравнений

3.1. Определения

Систему уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

называют системой m линейных уравнений с n неизвестными. a_{ij} называют коэффициентами этих уравнений, которые записываются в виде матрицы (матрица системы):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, стоящие в правых частях уравнений, обозначают столбцом b, называемым столбцом свободных членов.

Матрица системы, дополненная справа столбцом свободных членов, называется расширенной матрицей системы:

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ldots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Нашу систему уравнений можно записать в матричной форме AX=B,

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$; $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$.

Если все свободные члены равны нулю, то систему называют однородной.

Совокупность n чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ называется **решением системы** (1), если каждое ее уравнение обращается в числовое равенство после подстановки в него чисел α_i вместо соответствующих неизвестных x_i для всех $i = 1, \ldots, n$.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной, а не имеющая – несовместной.

Решение называется тривиальным, если нулевой вектор $x=\begin{pmatrix}0\\0\\\dots\\0\end{pmatrix}$ является решением системы.

3.2. **Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными с помощью формул Крамера**.

Для простоты рассмотрим систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными: $\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется главным и обозначается символом Δ, т.е.

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

Вспомогательные определители системы для вычисления переменных *x*, *y*, *z*:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_y=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix},\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{21}&a_{22}&b_2\\a_{31}&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

Нетрудно увидеть закономерность при составлении вспомогательных определителей!

Теорема Крамера. 1) Если главный определитель системы не равен нулю, то система имеет единственное решение. Это решение находится по формулам $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\ \ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta},\ \ z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$.

2) Если главный определитель системы равен нулю, а хотя бы один из вспомогательных определителей не равен нулю, то такая система не имеет решения (несовместна).

3) Если главный определитель системы равен нулю и все вспомогательные определители равны нулю т. е. $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, то такая система имеет бесчисленное множество решений.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}3x+2y+z=5,\\2x\ -y+z=6,\\x\ +5y=-3.\end{cases}$$

Решение. По теореме Крамера имеем $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}, z=\dfrac{\Delta_z}{\Delta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 10 - (-1 + 15 + 0) = -2 \neq 0.$$

Определитель матрицы системы отличен от нуля. Следовательно, по теореме Крамера система имеет единственное решение. Найдем вспомогательные определители системы:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 + 30 - (3 + 25 + 0) = 24 - 28 = -4;$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 5 - 6 - (6 - 9 + 0) = -1 + 3 = 2;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 9 + 12 + 50 - (-5 + 90 - 12) = 71 - 73 = -2;$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-4}{-2} = 2,\ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{2}{-2} = -1,\ z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-2}{-2} = 1.$$

Ответ: x =2, y =-1, z =1.

Если определитель Δ однородной системы не равен нулю ($\Delta \neq 0$), то эта система имеет только тривиальное решение.

Если однородная система уравнений имеет нетривиальное решение, то ее определитель Δ равен нулю.

Решение двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{cases}$$

когда хотя бы один из миноров 2-го порядка отличен от нуля удобно искать по формулам:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} k, \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} k, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} k,$$

где k – произвольное число.

3.3 Теорема Кронекера – Капелли. Неоднородная система линейных уравнений совместна тогда, и только тогда, когда ранг матрицы системы A равен рангу расширенной матрицы системы B.

Следствие. Если ранг матрицы B не равен рангу матрицы A, то система не имеет решений (она несовместна).

Пример. Определить совместны ли системы:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$

Решение.

а) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \quad \Rightarrow$ система совместна, т.к. $rang\, A = rang\, B$.

б) $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Найдем ранг матрицы. Вычитаем из второй строки первую, а потом вычеркиваем нулевую строку:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow rang\, A = 1.$$

Найдем ранг расширенной матрицы. Вычитаем из второй строки первую, а потом переставляем 2-й и 3-й столбцы местами:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \; rang\, B = 2.$$

Так как $rang\, A \neq rang\, B$, то система несовместна.

Ответ: а) система совместна, б) система несовместна.

3.4. Метод последовательных исключений Жордана – Гаусса

С помощью элементарных преобразований строк расширенная матрица системы приводится к треугольному виду. Обычно нули получают ниже главной диагонали.

При решении методом Жордана – Гаусса системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными после приведения расширенной матрицы системы к треугольному виду получится:

а) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}$, где $a_{33} \neq 0$ (система будет иметь единственное решение);

б) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}$, где $b_3 \neq 0$ (система будет несовместной);

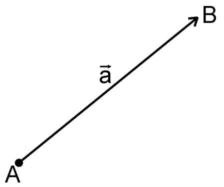
в) $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (система будет иметь множество решений).

Пример решения системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными методом Жордана – Гаусса смотри ниже в разделе: «Решение типовых задач контрольной работы №1». Этот метод позволяет решать систему линейных уравнений с различным количеством уравнений и неизвестных.

Глава II. Векторная алгебра

§1. Основные понятия и определения

1. Вектором называется направленный отрезок. Вектор обозначается либо символом $\overrightarrow{AB}$ (A - точка начала, B - точка конца вектора), либо $\vec{a}$. В математике обычно рассматриваются свободные векторы, то есть векторы, точка приложения которых может быть выбрана произвольно.



2. Длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB. Модуль вектора обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\vec{a}\right|$.
3. Вектор называется единичным, если его длина равна «1»; единичный вектор $\vec{a}^{\,0}$ направления вектора $\vec{a}$ называется ортом вектора $\vec{a}$ и определяется по формуле $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$.
4. Вектор называется нулевым, если его начало и конец совпадают $\left|\vec{a}\right| = 0$; любое направление можно считать направлением нулевого вектора.
5. Векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых. Коллинеарность векторов обозначается: $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является существование такого числа λ, что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.
6. Два вектора называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и направление.
7. Вектор $\vec{a}' = -\vec{a}$ называется противоположным вектору $\vec{a}$, если модули их равны, а направления противоположны.
8. Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Для решения задач необходимо уметь выполнять линейные операции над вектором в геометрической форме, то есть над вектором, как над направленным отрезком: сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число.

9. Сложение двух векторов можно выполнить по правилу параллелограмма (рис. 1) или по правилу треугольника (рис. 2).

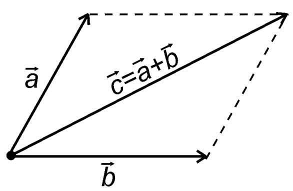


Рис. 1.

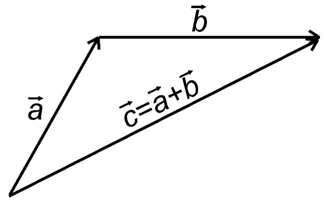
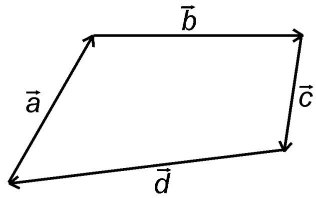


Рис. 2.

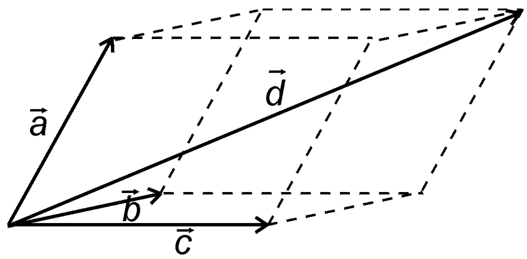
При сложении более двух векторов, лежащих в одной плоскости, используется правило «замыкающей линии многоугольника» (рис. 3).



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Рис. 3.

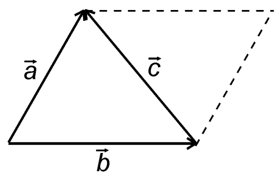
При сложении трех некомпланарных векторов удобно пользоваться правилом «параллелепипеда» (рис. 4).



$\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

Рис. 4.

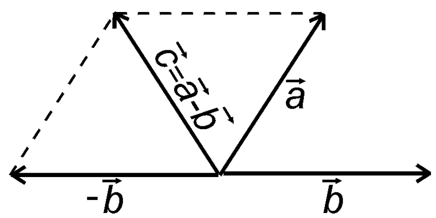
10) Действие вычитания двух векторов связано с действием сложения (рис.5).



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

Разностью двух векторов называется вектор, проведенный из конца вычитаемого в конец уменьшаемого. Заметим, что разностью является вектор, служащий второй диагональю параллелограмма.

Разность можно также представить в виде сложения с противоположным вектором (рис. 6).



$\vec{a} - \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{c}$

Рис. 6.

11. Произведением вектора $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, который имеет :

модуль, равный $\left|\vec{b}\right| = \lambda \cdot \left|\vec{a}\right|$;

направление, одинаковое с $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ $(\lambda = 0;\ 0 \cdot \vec{a} = \vec{0})$.

направление, противоположное с $\vec{a}$, если λ<0.

12. Для решения задач полезно знать также следующие законы и свойства:

- переместительный: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

  $\lambda\cdot\vec{a}=\vec{a}\cdot\lambda$
- сочетательный: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

  $\lambda\cdot(\mu\cdot\vec{a})=(\lambda\cdot\mu)\cdot\vec{a}$
- распределительный: $\lambda\cdot(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$

  $(\lambda+\mu)\cdot\vec{a}=\lambda\cdot\vec{a}+\mu\cdot\vec{b}$

§2. Проекция вектора на ось

1. Векторной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется вектор $\overrightarrow{A'B'}$ (рис. 7).

Проекция считается положительной, если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ направлен также, как и ось l,

и отрицательной, если направление оси и $\overrightarrow{A'B'}$ противоположны.

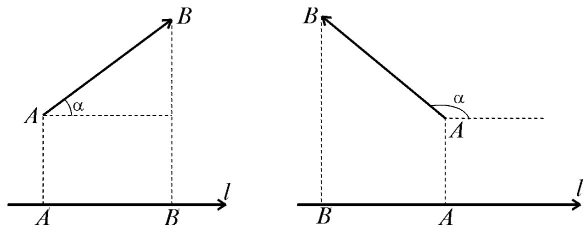


Рис. 7.

2. Скалярной проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l ($Пр_l\overrightarrow{AB}$) называется скаляр, абсолютная величина которого равна модулю векторной проекции того же вектора на ту же ось.
3. Основные свойства скалярных проекций:

- $Пр_l\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\alpha$, где α – угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и осью l.
- $Пр_l(\lambda\cdot\overrightarrow{AB})=\lambda\cdot Пр_l\overrightarrow{AB}$, где $\lambda\in R$
- $Пр_l(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{EF})=Пр_l\overrightarrow{AB}+Пр_l\overrightarrow{AB}+Пр_l\overrightarrow{CD}+Пр_l\overrightarrow{EF}$

4. Если ось l заменить некоторым вектором $\vec{b}$, то можно говорить о проекции вектора на вектор $\vec{b}$: $Пр_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha$, где α – угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

§3. Действия над векторами, заданными координатами.

Декартовой системой координат в пространстве называется совокупность точки и базиса.

Точка называется началом координат или полюсом. Прямые, проходящие через начало координат в направлении базисных векторов, – осями координат. Первая прямая – осью абсцисс, вторая – осью ординат, третья – осью аппликат. Плоскости, проходящие через оси координат, называются координатными плоскостями.

Вектором $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец находится в точке *M*, называется **радиус-вектором** точки *M*.

Базис называется **ортонормированным**, если его векторы попарно ортогональны (перпендикулярны) и по длине равны единице.

Декартова система координат, базис которой ортонормирован, называется **декартовой прямоугольной системой координат**

1. Если задана тройка попарно перпендикулярных единичных векторов, то каждый вектор пространства можно единственным способом разложить по векторам $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Числа $(x;y;z)$ называют координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ и обозначают $\vec{a} = (x; y; z)$.

Теорема. Декартовы прямоугольные координаты x, y и z вектора $\vec{a}$ равны проекциям этого вектора на оси *OX*, *OY* и *OZ* соответственно.

На рис.8 α, β, γ – углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям *Ox*, *Oy* и *Oz* соответственно.

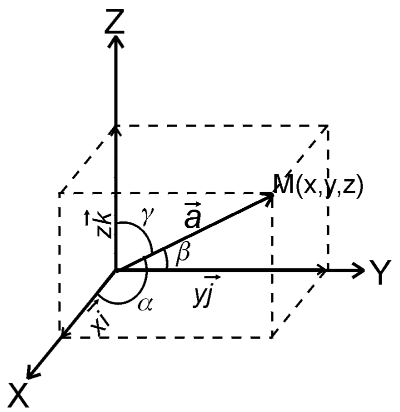


Рис. 8

2. Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
3. Направляющие косинусы вектора $\vec{a}$ (Рис. 8).

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Возведем в квадрат три равенства и, складывая их, получим:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

т.е. сумма квадратов направляющих косинусов любого вектора равна единице

4. Орт вектора $\vec{a}$: $\vec{a}^{\,0} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \dfrac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

5. Пусть даны векторы $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$ координаты алгебраической суммы векторов равны алгебраической сумме соответствующих координат слагаемых.

- $\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1)$, где $\lambda \in R$ координаты произведения вектора на число равны произведению соответствующей координаты на это число.

6. Пусть даны точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$. Чтобы найти координаты (компоненты) вектора AB, нужно из координат точки его конца вычесть координаты его начала: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

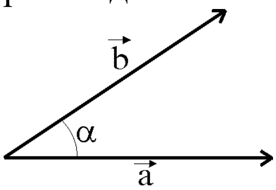
Расстояние между двумя точками: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

7. Если $\vec{a} \,||\, \vec{b}$, то $\dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z}$. (Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны).

§4. Скалярное произведение двух векторов.

Возможны две операции умножения двух векторов. Одна дает в результате скаляр (число) и поэтому называется скалярным произведением. Другая дает в результате вектор – векторное произведение.

Определение. Скалярным произведением двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется произведение их модулей на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha$$

Из определения следует: 1) если α - острый угол, то $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$

2) если α - тупой угол, то $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

3) если $\alpha = 90^0$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

Справедливы и обратные утверждения.

Физический смысл скалярного произведения

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении ее точки приложения равна скалярному произведению силы на вектор перемещения: $A = \vec{F} \cdot \vec{S}$.

4.1. *Законы и свойства скалярного произведения:*

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (переместительный);
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ (распределительный);
3. $(\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b})$; (сочетательный)
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \overrightarrow{a^2} = \left|\vec{a}\right|^2 \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \sqrt{\overrightarrow{a^2}}$;
5. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\alpha = \left|\vec{a}\right| \cdot np_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\vec{b}\right| \cdot np_{\vec{b}}\vec{a}$ - скалярное произведение равно произведению модуля одного вектора на проекцию другого вектора на первый.

4.2. *Скалярное произведение в координатах.*

Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены по ортам: $\begin{matrix} \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \\ \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \end{matrix}$

Тогда: $\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2\overrightarrow{i^2} + x_1y_2\vec{i}\cdot\vec{j} + x_1z_2\vec{i}\cdot\vec{k} + y_1x_2\vec{j}\cdot\vec{i} + y_1y_2\overrightarrow{j^2} +$
$+ y_1z_2\vec{j}\cdot\vec{k} + z_1x_2\vec{k}\cdot\vec{i} + z_1y_2\vec{k}\cdot\vec{j} + z_1z_2\overrightarrow{k^2} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, т. к.

$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \ldots = \vec{k}\cdot\vec{j} = 0$

$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$

Итак, скалярное произведение двух векторов равно сумме произведений их соответствующий проекций:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}$$

4.3. *Применение формул скалярного произведения.*

Вычисление угла между векторами

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Вычисление проекции одного вектора на другой:

$$Пр_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}} \quad \text{Аналогично: } Пр_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

Вычисление работы силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{S}$:

$\vec{A} = \vec{F}\cdot\vec{S} = F_xS_x + F_yS_y + F_zS_z$, где $\begin{matrix} \vec{F} = (F_x; F_y; F_z) \\ \vec{S} = (S_x; S_y; S_z) \end{matrix}$

Условие перпендикулярности двух векторов $\vec{a}\perp\vec{b}$:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

4.4. Решение задач.

Задача №1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - единичные векторы, составляющие соответственно с осью l углы $45°, 60°, 120°.$ Вычислить проекцию вектора $\sqrt{2}\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$, на ось l.

Решение. В соответствии со свойствами проекций имеем:

$$Пр_l(\sqrt{2}\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}) = \sqrt{2}Пр_l\vec{a} - 2Пр_l\vec{b} + 4Пр_l\vec{c} = \sqrt{2}|\vec{a}|\cos 45° - 2|\vec{b}|\cos 60° + 4|\vec{c}|\cdot$$
$$\cos 120° = \sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} + 4\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 - 2 = -2.$$

Ответ: -2.

Задача №3. Определить, при каких значениях α и β векторы $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = (\alpha;-6;2)$ коллинеарны? В ответе записать $\alpha + \beta$.

Решение. Если существует такое число $\lambda \in R$, что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$, то векторы коллинеарны: $(-2;3;\beta) = \lambda(\alpha;-6;2) \Rightarrow (-2;3;\beta) = (\lambda\alpha;-6\lambda;2\lambda)$.

У равных векторов равны соответствующие координаты, следовательно

$$\begin{cases} -2 = \lambda\alpha \\ 3 = -6\lambda \\ \beta = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{\alpha} = -\frac{3}{6} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha = 4,\ \beta = -1,\ \alpha + \beta = 3.$$

Второй способ решения. Если векторы коллинеарны, то их координаты пропорциональны т. е.

$$-\frac{2}{\alpha} = -\frac{3}{6} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow \alpha = 4,\ \beta = -1,\ \alpha + \beta = 3.$$ Ответ: 3.

Задача №4. Вычислить $\sqrt{46} \cdot \left|\vec{a} + 2\vec{b}\right|$, если $\vec{a} = (1;0;-3), \vec{b} = (1;3;2)$.

Решение. 1) Находим координаты векторов $2\vec{b}$ и $\vec{a} + 2\vec{b}$:

$2\vec{b} = (2;6;4)$, $\vec{a} + 2\vec{b} = (1+2;0+6;-3+4) = (3;6;1)$

2) Находим длину вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$: $\left|\vec{a} + 2\vec{b}\right| = \sqrt{3^2 + 6^2 + 1^2} = \sqrt{46} \Rightarrow$

$\sqrt{46} \cdot \left|\vec{a} + 2\vec{b}\right| = 46$ Ответ: 46.

Задача№6. Вычислить $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$, если $\left|\vec{a}\right| = 3,\ \left|\vec{b}\right| = 4,$ угол $(\vec{a};\vec{b}) = \frac{2\pi}{3}.$ В ответе запишите квадрат длины вектора $\vec{a} - \vec{b}$.

Решение. 1) $\left|\vec{a} - \vec{b}\right| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{\left|\vec{a}\right|^2 - 2\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\frac{2\pi}{3} + \left|\vec{b}\right|^2} =$

$\sqrt{9 + 34 + 16} = \sqrt{37} \Rightarrow \left|\vec{a} - \vec{b}\right|^2 = 37.$ Ответ: 37**.**

Задача №6. Вычислите работу силы $\vec{F} = (1,2,-3)$, если ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из точки $M = (-1,2,3)$ в точку $N = (2,3,8)$.

Решение. Пусть $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$, $\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$.

Тогда $A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{S} = F_x \cdot S_x + F_y \cdot S_y + F_z \cdot S_z$

Так как $\vec{S} = \overrightarrow{MN} = ((2-(-1)); 3-2; 8-3) = (3,1,5)$

$A = \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{S} = F_x \cdot S_x + F_y \cdot S_y + F_z \cdot S_z$

$A = \vec{F} \cdot \vec{S} = 1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 = 16$ Ответ: 16.

4.5. Задачи для самостоятельного решения.

1. Вектор $\vec{a}(1;-1;0)$ образует с осью l угол $135°$. Вычислить проекцию вектора $3\vec{a}$ на ось l.
2. В равнобочной трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC равны 9 см и 4 см, а длина диагонали равна 10 см. Вычислите длину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$.
3. При каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ перпендикулярны?
4. На материальную точку действуют силы $\overrightarrow{F_1} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{F_2} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{F_3} = \vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил при перемещении точки приложения из $A(2;-1;0)$ в положение $B(4;1;-1)$.
5. Даны векторы $\vec{a} = (1;-1;2)$, $\vec{b} = (2;-2;1)$. Найти проекцию вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.
6. Найти наибольший внутренний угол треугольника ABC с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$.
7. Вычислить длину вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$, если $\vec{a} = (1;-1;1)$, $\vec{\mathrm{b}} = (2;1;-2)$.
8. Вычислить $(\vec{a} - 2\vec{b})^2$, если $|\vec{a}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{\mathrm{b}}| = \sqrt{2}$, угол $(\vec{a};\vec{b}) = 120°$.
9. Даны последовательные вершины параллелограмма $A(1;-2;3)$, $B(0;2;1)$, $C(3;3;0)$. Найти координаты четвертой вершины D. В ответе запишите сумму координат вершины D.
10. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (2;1;-1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x} \cdot \vec{a} = 3$. В ответе запишите сумму координат вектора $\vec{x}$.
11. Вектор $\vec{x}$ коллинеарный вектору $\vec{a} = (6;-8;-7{,}5)$, образует тупой угол с осью OZ. Зная, что $|\vec{x}| = 50$, найти его аппликату.
12. Вычислить $(3\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 5\vec{b})$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$ и угол $(\vec{a};\vec{b}) = 60°$.
13. Найти абсциссу вектора $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a} = (2;3;-1)$ и $\vec{b} = (0;-2;3)$ и удовлетворяет условию $\vec{x} \cdot (2\vec{i} + \vec{k}) = 6$.
14. Даны вектора $\vec{a} = (1;1)$ и $\vec{b} = (1;-1)$. Найти косинус угла между векторами $\vec{x}$ и $\vec{y}$, удовлетворяющими системе уравнений:
$$\begin{cases} 2\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} \\ \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{b}. \end{cases}$$
15. Вычислить $\vec{a} \cdot \vec{b}$, если $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} + 4\vec{q}$, где $\vec{p}$ и $\vec{q}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

16. При каких значениях $x>-1$ угол между векторами $\vec{a}=x\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=2x\vec{i}+x\vec{j}-\vec{k}$ острый, а угол между вектором $\vec{a}+\vec{b}$ и осью OY тупой? В ответ запишите наибольшее целое x.

17. Найти наименьшее целое значение x, при котором векторы $\vec{a}=\left\{\log_8(x-2);\log_8(x-3);2/3\right\}$ и $\vec{a}=\{2;-1;-1\}$ образуют острый угол.

18. Вектор $\vec{c}$ образует острый угол с осью OZ и перпендикулярен векторам $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}$ и $\vec{b}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$. Длина вектора $\vec{c}$ равна $2\sqrt{26}$. Найти сумму координат вектора $\vec{c}$.

Ответы.

Задача	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ответ	-1	8	1	7	3	98	9	24	5

Задача	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Ответ	1	-3	6	3	-0,8	-5	2	5	0

§5. Полярная система координат

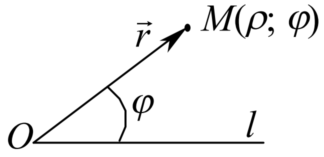


Рис. 6

Полярная система координат определена, если задана точка O, называемая полюсом, и исходящий из полюса луч l, который называют полярной осью.

Положение точки M фиксируется двумя числами: радиус-вектором $\vec{r}=\left|\overrightarrow{OM}\right|$ и углом φ между полярной осью и вектором $\overrightarrow{OM}$ (рис. 6). Угол φ называют полярным углом. Он измеряется в радианах и отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки. Пара чисел $(\rho;\ \varphi)$ и $(\rho;\ \varphi+2\pi)$ представляет собой полярные координаты одной и той же точки.

Переход от декартовых координат к полярным осуществляется по формулам

$$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}$$

В пространстве обобщением полярных координат являются цилиндрические и сферические системы координат.

§6. Цилиндрическая система координат

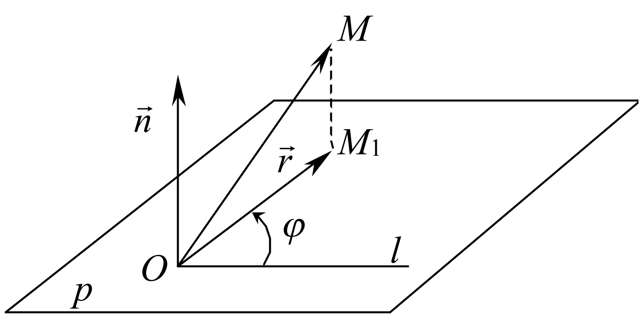


Рис. 7

Цилиндрические координаты точки M – это три числа $(\rho;\ \varphi;\ z)$, где ρ и φ – полярные координаты точки M_1, а z – компоненты вектора $\overrightarrow{M_1M}$ по вектору $\vec{n}$; p – плоскость, в которой расположена полярная система координат (рис. 7).

Переход от декартовых координат к цилиндрическим осуществляется по формулам: $\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\varphi, \\ z = z. \end{cases}$

§7. Сферическая система координат

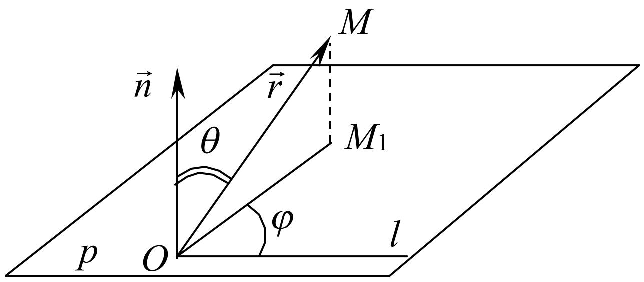


Рис. 8

Сферические координаты точки M – это три числа (ρ; φ; θ), где ρ – радиус-вектор точки M, φ так же, как и для цилиндрической системы координат, θ - угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и нормалью $\vec{n}$ плоскости p (рис. 8).

Переход от декартовых координат к сферическим осуществляется по формулам $\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi, \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \\ z = \rho\cos\theta. \end{cases}$

§8. Векторное произведение векторов

Три вектора называются **упорядоченной тройкой** (или просто тройкой), если указано, какой из этих векторов является первым, какой – вторым и какой – третьим.

Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ называется правой (левой), если выполнено условие: находясь внутри телесного угла, образованного приведением к общему началу векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, мы видим поворот от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ и от него к $\vec{c}$, совершающийся против часовой стрелки (по часовой стрелки).

Декартова система координат называется правой (левой), если три базисных вектора образуют правую (левую) тройку.

В дальнейшем мы будем рассматривать только правые системы координат.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, обозначаемый $\vec{c} = [\vec{a}\vec{b}]$ или $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ и отвечающий следующими требованиям:

1) длина вектора $\vec{c}$ равна произведению длин векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на синус угла φ между ними: $|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\varphi$, причем $0 \le \varphi \le \pi$;

2) вектор $\vec{c}$ ортогонален к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ направлен так, что тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ является правой.

Геометрические свойства векторного произведения:

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух векторов является равенство нулю их векторного произведения.

2. Длина (модуль) векторного произведения $[\vec{a}\vec{b}]$ равняется площади параллелограмма, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Алгебраические свойства векторного произведения:

1) $[\vec{a}\vec{b}] = -[\vec{b}\vec{a}]$,

2) $[(\alpha\vec{a})\vec{b}] = \alpha[\vec{a}\vec{b}]$,

3) $[(\vec{a}+\vec{b})\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\vec{c}]$,

4) $[\vec{a}\vec{a}] = 0$.

§9 Смешанное произведение трех векторов

Если вектор $\vec{a}$ векторно умножается на вектор $\vec{b}$, а затем получившийся при этом вектор $[\vec{a}\vec{b}]$ скалярно умножается на вектор $\vec{c}$, то в результате получается число $[\vec{a}\vec{b}]\cdot\vec{c}$, называемое **смешанным произведением векторов** $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Геометрическое свойство смешанного произведения

Смешанное произведение $[\vec{a}\vec{b}]\cdot\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на приведенных к общему началу векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, взятому со знаком плюс, если тройка $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ правая, и со знаком минус, если тройка $\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}$ левая.

Свойства смешанного произведения:

1) знаки операций «крест» и «точка» можно менять местами:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c};$$

2) необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения;

3) смешанное произведение трех векторов, два из которых совпадают, равно нулю;

4) от перестановки двух сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = -(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b} = -(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}.$$

§10. Векторное и смешанное произведения в декартовых координатах

Теорема 1. Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определены своими декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a} = \{x_1; y_1; z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2; y_2; z_2\}$, то

$$[\vec{a}\vec{b}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Если два вектора $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$ и $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ коллинеарны, то координаты их пропорциональны, т.е. $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{z_2}$.

Иногда в знаменателях могут стоять нули. Чтобы избежать этого, мы будем понимать пропорции $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ в смысле $ad = cb$.

Теорема 2. Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ определены декартовыми прямоугольными координатами $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$, то смешанное произведение $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ равняется определителю, строки которого соответственно равны координатам перемножаемых векторов, т.е.

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Следствие. Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\vec{a}=\{x_1;y_1;z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2;y_2;z_2\}$ и $\vec{c}=\{x_3;y_3;z_3\}$ является равенство нулю определителя

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

10.1. Если вектор $\vec{b}$ векторно умножается на вектор $\vec{c}$, а вектор $\vec{a}$ также векторно умножается на векторное произведение $[\vec{b}\vec{c}]$, то получившийся при этом вектор $[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]$ называется **двойным векторным произведением**.

Теорема. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ справедлива формула

$$[\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \text{ или } [[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}]=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c}).$$

Для запоминания этой формулы удобно правило: двойное векторное произведение равно среднему вектору, умноженному на скалярное произведение двух остальных, минус другой вектор внутреннего произведения, умноженный на скалярное произведение двух остальных.

Глава 3. Уравнение линии на плоскости. Уравнения поверхности и линии в пространстве

§1. Общее понятие об уравнениях

Алгебраической поверхностью (**линией**) называется множество, которое в какой-нибудь декартовой системе координат может быть задано уравнениями поверхности (1) и линии (2):

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}z^{m_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}z^{m_2}+\ldots+A_nx^{k_n}y^{l_n}z^{m_n}=0; \qquad (1)$$

$$A_1x^{k_1}y^{l_1}+A_2x^{k_2}y^{l_2}+\ldots+A_nx^{k_n}y^{l_n}=0, \qquad (2)$$

где все показатели степени – целые неотрицательные числа, а наибольшая из сумм $k_1 + l_1 + m_1$, $k_2 + l_2 + m_2$, …, $k_n + l_n + m_n$ для поверхности и $k_1 + l_1$, $k_2 + l_2$, …, $k_n + l_n$ для линии называется степенью уравнения, или порядком поверхности (линии).

Всякая неалгебраическая линия (поверхность) называется трансцендентной.

Теорема. Если поверхность (линия) в некоторой декартовой системе координат может быть задана уравнением вида (1) или (2), то и в любой другой декартовой системе координат она может быть задана уравнением того же вида, имеющим ту же степень. То есть порядок алгебраической линии (поверхности) является инвариантным.

Инвариантом называется всякая величина, не меняющаяся при изменении системы координат.

Представим себе, что линия - это траектория движущейся точки. В каждый момент времени t нам известно положение точки, т.е. ее координаты относительно выбранной заранее системы координат. Тогда мы приходим к **параметрическим уравнениям линии**

$$\begin{cases} x = \varphi(t); \\ y = \psi(t); \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

где t - параметр.

По аналогии **параметрические уравнения поверхности** имеют вид

$$\begin{cases} x = \varphi(u,v); \\ y = \psi(u,v); \\ z = \chi(u,v). \end{cases}$$

§2. Различные виды уравнения прямой на плоскости

1) Уравнение вида $Ax + By + C = 0$ с произвольными коэффициентами A, B и C, такими, что A и B не равны одновременно нулю, называется **общим уравнением прямой**.

Общее уравнение прямой называется полным, если все его коэффициенты A, B и C отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется неполным.

a) Если $C = 0$, то уравнение $Ax + By = 0$ определяет прямую, проходящую через начало координат.

b). Если $B = 0$, то уравнение $Ax + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси OY.

c). Если $A = 0$, то уравнение $By + C = 0$ определяет прямую, параллельную оси OX.

2) Полное уравнение прямой может быть приведено к **уравнению прямой «в отрезках» на осях**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b - это отрезки, отсекаемые прямой на осях OX и OY.

Любой ненулевой вектор, параллельный данной прямой, будем называть направляющим вектором этой прямой.

3) **Уравнение прямой, проходящей через точку** $M_0(x_0; y_0)$ **перпендикулярно вектору** $\vec{n}\{A;B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0.$$

4) **Уравнение прямой, проходящей через две точки** $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, имеет вид:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

5) **Каноническим уравнением** прямой называют уравнение вида

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

где $M_0(x_0; y_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой; $\vec{q}\{l;m\}$ – координаты направляющего (параллельного прямой) вектора.

6) Из канонического уравнения прямой можно элементарно получить параметрические уравнения прямой. Примем за параметр t величину, стоящую в левой и в правой частях канонического уравнения прямой, тогда:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt \end{cases}$$ - **параметрические уравнения прямой**.

Параметрические уравнения прямой имеют наглядную физическую интерпретацию. Если считать, что параметр t - это время, отсчитываемое от некоторого начального момента, то параметрические уравнения определяют закон движения материальной точки по прямой линии с постоянной скоростью $v = \sqrt{l^2 + m^2}$.

7) **Уравнение прямой, проходящей через заданную точку** $M_0(x_0; y_0)$ **и имеющей угловой коэффициент *k***, имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

Угловым коэффициентом называют тангенс угла наклона прямой к оси OX.

8) Уравнение вида $y = kx + b$ называют **уравнением прямой с угловым коэффициентом**.

9) Уравнение вида $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$ называют **нормированным уравнением прямой**, где θ - угол между нормальным вектором прямой и осью OX;
p – расстояние от начала координат до прямой.

Отклонение δ произвольной точки $M_0(x_0; y_0)$ от прямой определяется:

$$\delta = x_0\cos\theta + y_0\sin\theta - p.$$

Чтобы вычислить расстояние d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой, достаточно вычислить отклонение $d = |\delta|$.

Расстояние от точи $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, заданной общим уравнением, вычисляется по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Чтобы привести общее уравнение прямой к нормированному виду, нужно все члены этого уравнения умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Знак нормирующего множителя выбирается противоположным знаку свободного члена общего уравнения прямой.

10) Уравнение вида $\rho = \dfrac{p}{\cos(\varphi - \theta)}$ называется **полярным уравнением прямой**,
где ρ - расстояние от полюса до прямой; θ - угол между нормалью прямой и полярной осью.

Совокупность прямых, проходящих через некоторую точку M, называют пучком прямых с центром в точке M.

11) **Уравнение пучка прямых** имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta\,(A_2x + B_2y + C_2) = 0,$$

где α, β - любые числа, не равные одновременно нулю.

12) **Векторное уравнение прямой** имеет вид

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0,$$

где $\vec{n}$ - нормальный вектор прямой; $\vec{r}_0$ - радиус вектор точки $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей прямой; $\vec{r}$ - радиус вектор произвольной точки M, принадлежащей прямой.

2.1. Определение угла между прямыми

Угол φ, отсчитанный против хода часовой стрелки от прямой $y = k_1x + b_1$ до прямой $y = k_2x + b_2$ определяется формулой: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

Для прямых, заданных в общем виде $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, угол определяется формулой: $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$.

Условие параллельности двух прямых $k_1 = k_2$ или $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$,

условие перпендикулярности $k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$ или $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

§3. Различные виды уравнения плоскости

1) Уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ **перпендикулярно вектору** $\vec{n}\{A; B; C\}$, называют уравнение вида

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2) Общее уравнение плоскости в прямоугольной системе координат имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Общее уравнение называют полным, если все его коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля. Если хотя бы один из указанных коэффициентов равен нулю, уравнение называется неполным.

- Если $D = 0$, то уравнение $Ax + By + Cz = 0$ определяет плоскость, проходящую через начало координат.

2. Если $A = 0$, то уравнение $By + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси OX.

3. Если $B = 0$, то уравнение $Ax + Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси OY.

4. Если $C = 0$, то уравнение $Ax + By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную оси OZ.

5. Если $A = 0$ и $B = 0$, то уравнение $Cz + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости OXY.

6. Если $A = 0$ и $C = 0$, то уравнение $By + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости OXZ.

7. Если $B = 0$ и $C = 0$, то уравнение $Ax + D = 0$ определяет плоскость, параллельную плоскости OYZ.

3) Полное уравнение плоскости может быть приведено к **уравнению плоскости «в отрезках» на осях**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b, c – отрезки, отсекаемые плоскостью на осях OX, OY, OZ соответственно.

4) Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$, имеет вид

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение представляет собой условие компланарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, где точка $M(x; y; z)$ – произвольная точка на искомой плоскости.

5) Нормированное уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где $\vec{n}\{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – единичный нормальный вектор искомой плоскости; p – расстояние от плоскости до начала координат.

Подставив координаты произвольной точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ в нормированное уравнение, найдем отклонение δ точки от плоскости:

$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p.$$

Тогда расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости равно $d = |\delta|$.

Если плоскость задана в общем виде, то **расстояние** от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости определяется уравнением

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

6) Векторное уравнение плоскости определяется скалярным произведением:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{n}) = 0,$$

где $\vec{n}$ - нормальный вектор; $\vec{r}_0$ - радиус-вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей плоскости; $\vec{r}$ - радиус-вектор любой точки плоскости.

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую L называется **пучком плоскостей** с центром L.

7) Уравнение пучка всех плоскостей, проходящих через линию L, имеет вид

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где α, β – любые числа, не равные одновременно нулю.

Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, называется **связкой плоскостей** с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

8) Уравнение связки плоскостей с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$ имеет вид

$$\alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) + \gamma(z - z_0) = 0,$$

где α, β, γ – любые числа, не равные одновременно нулю.

3.1. Угол между плоскостями.

Если даны две плоскости, заданные общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, то **определение угла между указанными плоскостями** сводится к определению угла φ между их нормальными векторами $\vec{n}_1\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\vec{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$. Из определения скалярного произведения следует

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Тогда **условие параллельности двух плоскостей** эквивалентно условию коллинеарности нормальных векторов этих плоскостей. По определению два вектора коллинеарны, если их компоненты пропорциональны:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0,$$

т.е. равенство нулю скалярного произведения нормальных векторов.

§4. Прямая линия в пространстве

1) Канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – координаты точки, принадлежащей прямой;
$\vec{q}\{l;m;n\}$ – направляющий вектор прямой.

2) Из канонических уравнений можно легко получить **уравнения прямой в проекциях**

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_1}{l} = \dfrac{y-y_1}{m}; \\ \dfrac{y-y_1}{m} = \dfrac{z-z_1}{n}. \end{cases}$$

3) Уравнения прямой, проходящей через различные две точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$, имеют вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

4) Параметрические уравнения прямой получаются из канонических, если принять за t каждое из соотношений

$$\begin{cases} x = x_0 + lt; \\ y = y_0 + mt; \\ z = z_0 + nt. \end{cases}$$

5) Общие уравнения прямой (пересечение двух плоскостей) имеет вид

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

6) Векторное уравнение прямой имеет вид $[\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{q}] = 0$,
где $\vec{q}$ – направляющий вектор прямой; $\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей прямой; $\vec{r}$ – радиус-вектор произвольной точки M, принадлежащей прямой.

Определение угла между прямыми в пространстве сводится к определению угла между направляющими векторами этих прямых. Если $\vec{q}_1\{l_1;m_1;n_1\}$, $\vec{q}_2\{l_2;m_2;n_2\}$ – направляющие векторы, то

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{q}_1\vec{q}_2)}{|\vec{q}_1|\cdot|\vec{q}_2|} = \frac{l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Тогда **условие параллельности прямых** сводится к условию параллельности направляющих векторов:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

Условие перпендикулярности:

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

Определение угла между прямой и плоскостью сводится к определению угла между направляющим вектором прямой и нормальным вектором плоскости. Если $\vec{q}\{l;m;n\}$ – направляющий вектор прямой, $\vec{n}\{A;B;C\}$– нормальный вектор плоскости, то

$$\sin\varphi = \frac{|\ Al + Bm + Cn\ |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Глава 4. Кривые второго порядка

§1. Введение

Пусть задана кривая, определяемая уравнением второй степени

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

где A, B, C, D, E, F – действительные числа; A, B и C одновременно не равны нулю. Эта кривая называется **кривой второго порядка**.

Приведем еще одно определение кривой второго порядка.

Геометрическое место точек плоскости, для которых отношение их расстояний до заданной точки, называемой фокусом, и до заданной прямой, называемой директрисой, есть величина постоянная, равная ε, является кривой 2–го порядка с эксцентриситетом, равным ε. Если $\varepsilon < 1$, то кривая второго порядка – эллипс; $\varepsilon = 1$ – парабола; $\varepsilon > 1$ – гипербола.

§2. Эллипс

Эллипсом называется геометрическое место точек плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных точек F_1 и F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $r_1 + r_2 = const = 2a$. Если фокусы совпадают, то эллипс представляет собой окружность.

Каноническое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $(a > b)$.

Если $a > b$, то эллипс расположен вдоль оси Ox; если $a < b$, то эллипс расположен вдоль оси Oy (рис. 9*а*, 9*б*).

Если $a < b$, то, сделав замену $x = y'$, $y = x'$; $a = b'$, $b = a'$, перейдем в «штрихованную» систему координат, в которой уравнение будет иметь канонический вид:

$$\left(\frac{x'}{a'}\right)^2 + \left(\frac{y'}{b'}\right)^2 = 1.$$

Декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение эллипса имеет канонический вид, называется канонической.

Точки пересечения эллипса с осями координат называются **вершинами эллипса**. Расстояния от начала координат до вершин a и b называются соответственно **большой и малой полуосями эллипса**.

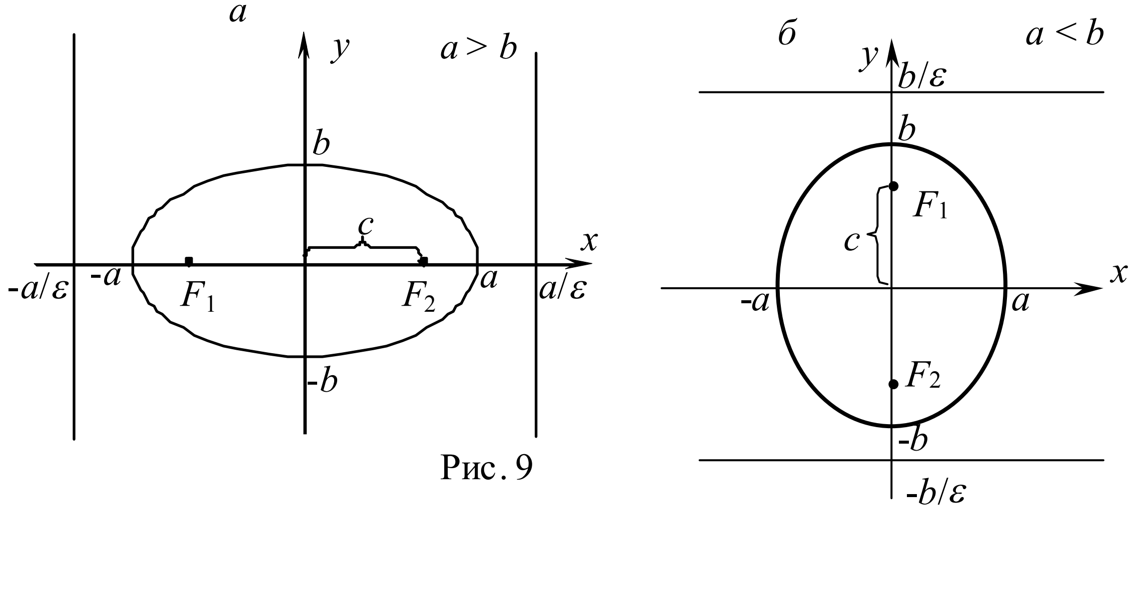


Рис. 9

Центр симметрии эллипса, совпадающий с началом координат, называется **центром эллипса**.

Если c – расстояние от начала координат канонической системы координат до фокусов, то $c^2 = a^2 - b^2$.

Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$, $\varepsilon < 1$ называется **эксцентриситетом эллипса**.

Расстояние от произвольной точки $M(x;\, y)$, лежащей на эллипсе, до каждого из фокусов является линейной функцией от ее абсциссы, т.е. $r_{1,2} = a \pm \varepsilon x$.

С эллипсом связаны две замечательные прямые, называемые его **директрисами**. Их уравнения в канонической системе имеют вид $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$.

§3. Гипербола

Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых абсолютная величина разности расстояний до двух фиксированных точек F_1 и

F_2 этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, равная $|r_1 - r_2| = const = 2a$ (рис. 10).

Декартова прямоугольная система координат, в которой уравнение гиперболы имеет канонический вид, называется канонической. **Каноническое уравнение гиперболы**:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Ось абсцисс канонической системы пересекает гиперболу в точках, называемых **вершинами гиперболы**. Ось ординат не пересекает гиперболу. a и b называются вещественной и мнимой полуосями гиперболы. Центр симметрии гиперболы, совпадающий с началом координат, называется **центром гиперболы**.

Если c – расстояние от начала координат канонической системы координат до фокусов гиперболы, то $c^2 = a^2 + b^2$.

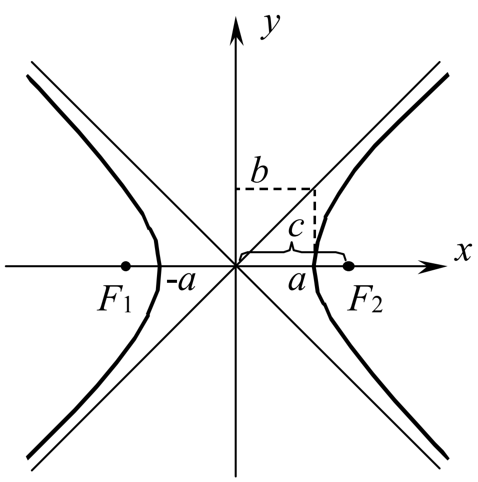


Рис. 10

Отношение $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ ($\varepsilon > 1$) называется **эксцентриситетом гиперболы**.

Расстояние от произвольной точки $M(x;\, y)$, лежащей на гиперболе, до каждого из фокусов равно $r_{1,2} = |a \pm \varepsilon x|$.

Гипербола с равными полуосями ($a = b$) называется **равносторонней**.

Прямые с уравнениями $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ в канонической системе называются **асимптотами** гиперболы.

Прямые $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ называют **директрисами** гиперболы в канонической системе координат.

§4. Парабола

Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки F этой плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, также расположенной в рассматриваемой плоскости (рис. 11).

Указанная точка F называется фокусом параболы, а фиксированная прямая – директрисой параболы.

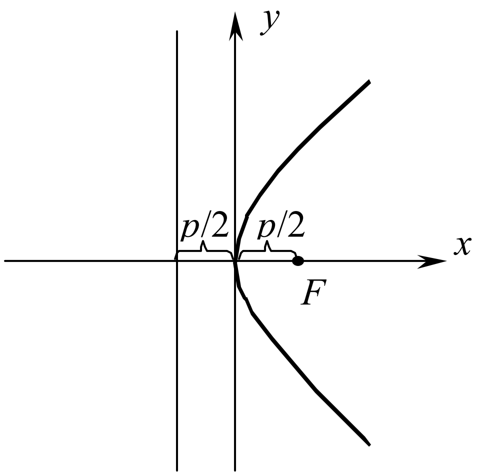


Рис. 11

Система координат, в которой парабола имеет канонический вид, называется **канонической**, а ось Ox – осью параболы.

Каноническое уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

Парабола проходит через начало канонической системы координат. Эта точка называется **вершиной параболы**.

Фокус параболы F имеет координаты $(p/2;\ 0)$.

Директрисой параболы называется прямая $x = -\dfrac{p}{2}$ в канонической системе координат.

Расстояние от произвольной точки параболы до фокуса F равно $r = x + \dfrac{p}{2}$.

§5. Исследование общего уравнения кривой 2-го порядка

Как уже говорилось раньше, линией второго порядка называется линия, определяемая уравнением 2-й степени:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Запишем дискриминант уравнения $\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$ и дискриминант старших членов $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$.

1) Если $\delta > 0$ и $\Delta \neq 0$, то кривая 2-го порядка – эллипс (действительный или мнимый).

2) Если $\delta > 0$ и $\Delta = 0$ – точка.

3) Если $\delta < 0$ и $\Delta \neq 0$ – гипербола.

4) Если $\delta < 0$ и $\Delta = 0$ – пара пересекающихся прямых.

5) Если $\delta = 0$ и $\Delta \neq 0$ – парабола.

6) Если $\delta = 0$ и $\Delta = 0$ – пара параллельных прямых (действительных или мнимых).

Глава 5. Функция. Теория пределов. Непрерывность функции

§1. Функция

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение.

Переменной величиной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Областью изменения переменной называется совокупность всех принимаемых ею числовых значений.

Переменная величина y называется **функцией** (однозначной) от переменной величины x, если каждому значению величины x, из области ее изменения, соответствует единственное вполне определенное значение y или, в символической записи, $y = f(x)$.

Переменная x называется независимой переменной или аргументом, y иногда называют зависимой переменной. Относительно самих величин x и y говорят, что они находятся в функциональной зависимости. Символ f называется характеристикой функции. Вместо буквы f можно употреблять любую другую букву. Частное значение функции $f(x)$ при $x = a$ записывается так: $f(a)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, координаты которых связаны данной функциональной зависимостью.

Классификация функции одного аргумента:

1. **Целая рациональная функция или многочлен**

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – постоянные числа, называемые коэффициентами; n – целое неотрицательное число, называемое степенью многочлена.

2. **Дробная рациональная функция** представляется в виде частного от деления двух целых рациональных функций

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}.$$

3. **Иррациональная функция** содержит возведение в степень с рациональным нецелым показателем. Например: $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3x + \sqrt[4]{x}}$.

Перечисленные три вида алгебраических функций образуют класс явных алгебраических функций. В общем случае **алгебраической функцией** называется любая функция $y = f(x)$, которая удовлетворяет уравнению вида

$$P_0(x)y^n + P_1(x)y^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(x)y + P_n(x) = 0,$$

где $P_0(x)$, $P_1(x)$, $P_{n-1}(x)$, $P_n(x)$ – некоторые многочлены от x.

Функция, не являющаяся алгебраической, называется **трансцендентной**.

Основные элементарные функции имеют области определения:

1) **степенная функция** $y = x^n$ или $y = \sqrt[2n+1]{x^m}$ определена при любых x, $y = \sqrt[2n]{x^m}$ определена в интервале $[0; +\infty)$ (n, m – натуральные числа);

2) **показательная функция** $y = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена при любых x;

3) **логарифмическая функция** $y = \log_a x$ ($a > 0$, $a \neq 1$) определена в интервале $(0; +\infty)$;

4) **тригонометрические функции** $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены при любых x, $y = \mathrm{tg}x$ определена при $x \neq (2k+1)\pi/2$, $y = \mathrm{ctg}x$ – при $x \neq k\pi$;

5) **обратные тригонометрические функции** $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ определены на отрезке $[-1; 1]$; $y = \mathrm{arctg}x$, $y = \mathrm{arcctg}x$ – при любых x.

Способы задания функции: аналитический (с помощью формулы), табличный (с помощью таблицы) и графический (с помощью графика).

§2. Вычисление пределов

Предел элементарной функции $f(x)$ при x, стремящемся к значению a ($x \to a$), которое входит в область ее определения, равен частному значению функции при $x = a$, т.е. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если аргумент стремится к бесконечности или к числу, которое не принадлежит области определения функции, то в каждом таком случае нахождение предела функции требует специального исследования.

Рассмотрим основные свойства пределов:

1) Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a}\left(f(x) + g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

2) Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)g(x)\right) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x).$$

3) Постоянный множитель можно выносить за знак предела, т.е.

$$\lim_{x \to a}\left(cf(x)\right) = c\lim_{x \to a} f(x).$$

4) Если существует предел функции $f(x)$ при $x \to a$, то

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x \to a} f(x)\right)^n,$$ где n – натуральное число.

5) Если существуют пределы функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$, причем предел функции $g(x)$ отличен от нуля, то

$$\lim_{x \to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}.$$

При вычислении пределов часто используют **два замечательных предела:**

1. $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$ или $\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{x}{\sin x} = 1$,

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ или $\lim\limits_{x\to \pm\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$

и их следствия:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\,, \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e=\frac{1}{\ln a}\,, \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a\,. \qquad (3)$$

Второй замечательный предел используют для раскрытия неопределенностей вида (1^∞), а остальные – для неопределенности вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.

Вычисление пределов значительно упрощается при использовании эквивалентности бесконечно малых.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Функция $f(x)$ называется **бесконечно большой** при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Свойства бесконечно малых и бесконечно больших:

1) Если $f(x) \neq 0$ и $f(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}\to\infty$ при $x \to a$.

2) Если $f(x) \to \infty$ при $x \to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$ при $x \to a$.

3) Если $f(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$, а $g(x)$ – ограниченная в некоторой окрестности точки $x = a$, то $f(x)\cdot g(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to a$.

Две бесконечно малые функции называются **эквивалентными** (~), если предел их отношения равен 1. С помощью замечательных пределов можно доказать справедливость цепочки эквивалентных бесконечно малых

$x \sim \sin x \sim \mathrm{tg} x \sim \arcsin x \sim \mathrm{arctg} x \sim e^x - 1 \sim \ln(1 + x)$ при $x \to 0$.

При раскрытии неопределенностей вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ рекомендуется пользоваться указанными замечательными пределами либо пытаться сократить числитель и знаменатель на общие (критические) множители.

При вычислении пределов нередко пользуются **правилом Лопиталя:**

Пусть при вычислении предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ возникает неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, но при этом существует $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=B$. Тогда $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=B$.

Использование правила Лопиталя в большинстве случаев значительно упрощает вычисление пределов, поэтому, прежде чем приступать к вычислению пределов, необходимо повторить правила вычисления производных.

2.1. Вычисление пределов от рациональной дроби при $x \to a$ $(a \neq \infty)$

Если ищется предел от рациональной дроби, числитель и знаменатель которой обращается в нуль в предельной точке $x = a$, то такую дробь, согласно теореме Безу, всегда можно сократить на $x - a$.

Пример. Найти предел функций $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$.

Решение. Заметим, что согласно свойствам 1 – 4 пределов

$$\lim_{x\to 2}(x^2-5x+6)=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-\lim_{x\to 2}5\cdot\lim_{x\to 2}x+\lim_{x\to 2}6=2^2-5\cdot 2+6=0 \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 2}(x^2-12x+20)=\left(\lim_{x\to 2}x\right)^2-12\cdot\lim_{x\to 2}x+20=4-12\cdot 2+20=0.$$

Мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Поступим так:

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-10)}=\frac{x-3}{x-10} \text{ при } x\neq 2. \text{ Следовательно,}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x-10}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-10)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x-3}{\lim\limits_{x\to 2}x-10}=\frac{2-3}{2-10}=\frac{1}{8}.$$

Данный предел можно вычислить другим способом – с помощью правила Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2-5x+6)'}{(x^2-12x+20)'}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-5}{2x-12}=\frac{-1}{-8}=\frac{1}{8}.$$

2.2. Вычисление пределов от рациональной дроби при $x \to \infty$

При $x \to \infty$ мы имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. *Один из способов решения – это деление числителя и знаменателя на x^n* (n *– наивысшая степень числителя и знаменателя*)*, другой способ – с помощью правила Лопиталя.*

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)$.

Решение. Наивысшая степень $n = 2$, следовательно, разделим числитель и знаменатель на x^2:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}3+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}}=3.$$

Решим вторым способом. Воспользуемся дважды правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(3x^2+2x+1)'}{(x^2+x+2)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+2}{2x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(6x+2)'}{(2x+1)'}=3$$

2.3. Вычисление пределов, содержащих радикалы

При вычислении пределов, содержащих выражения вида $\sqrt{f(x)}-\sqrt{g(x)}$, умножают числитель и знаменатель на сопряженное (с другим знаком) выражение, чтобы получить формулу сокращенного умножения.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{1+x^4}-1\right)=1-1=0$ и $\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, то имеется неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^4}-1)(\sqrt{1+x^4}+1)}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^4})^2-1^2}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^4-1}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2(\sqrt{1+x^4}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{(\sqrt{1+x^4}+1)}=\frac{0}{1+1}=0.$$

2.4. Вычисление пределов, содержащих тригонометрические функции

При вычислении пределов, содержащих тригонометрические функции, в зависимости от вида функции используют либо тригонометрические формулы, либо первый замечательный предел, либо эквивалентность бесконечно малых, либо правило Лопиталя, либо делают замену переменных.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

Решение. Рассмотрим два способа решения.

1. С помощью замены:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{c}\arcsin x=y\\ x=\sin y\\ y\to 0\end{array}\right|=\lim_{y\to 0}\frac{2y}{3\sin y}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{2}{3}.$$

2. Использование эквивалентности бесконечно малых:

$\arcsin x\sim x$ при $x\to 0$, следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$.

Решение. Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и формулой синуса двойного угла, а потом первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x\cdot 2\sin x\cdot\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{2\cos x} = 1\cdot\frac{1}{2\cos 0} = \frac{1}{2}.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, где $b\neq 0$.

Решение. Воспользуемся правилом Лопиталя:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin ax)'}{(\sin bx)'} = \lim_{x\to 0}\frac{a\cos ax}{b\cos bx} = \frac{a}{b}.$$

2.5. Вычисление пределов от показательно-степенных функций

При вычислении пределов от показательно-степенной функции пользуются

либо формулой $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} g(x)\ln f(x)}$, либо вторым замечательным пределом.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}\cdot\frac{2x^2}{x^2-1}} =$

$$= \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{2}}\right)^L = \left(\begin{matrix} y = \dfrac{2}{x^2-1} \\ y\to 0\end{matrix}\right) = \left(\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}\right)^L = e^2, \text{ так как}$$

$$L = \lim\nolimits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} = 2.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Заметим, что $\cos x + \sin x \to 1$, а $\dfrac{1}{x}\to\infty$ при $x\to 0$. Следовательно, имеется неопределенность вида (1^∞). Для ее раскрытия воспользуемся вторым замечательным пределом. Получим, что

$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\left((1+(\cos x+\sin x-1))^{\frac{1}{\cos x+\sin x-1}}\right)^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+\sin x-1}{x}} = e,$$

так как

$$\lim_{x\to 0}\left(1+(\cos x+\sin x-1)\right)^{\frac{1}{\cos x+\sin x-1}}=\begin{pmatrix}\cos x+\sin x-1=y\\ y\to 0\end{pmatrix}=\lim_{y\to 0}\left(1+y\right)^{\frac{1}{y}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left(1-\cos x\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=$$

$$=1-\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{2}=1-1\cdot 0=1.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}=\lim\limits_{x\to 0}e^{ctgx\cdot\ln(1+x^2)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}ctgx\cdot\ln(1+x^2)}$ в силу непрерывности e^x. Вычислим

$$\lim_{x\to 0}ctgx\cdot\ln(1+x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{tgx}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\sin x}\cdot\cos x=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cdot\cos x=0.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{ctgx}=e^0=1$.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x+2}}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)=3$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+1}{3x+2}\right)=2$, то в данном случае отсутствует неопределенность и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)^{\frac{6x+1}{3x+2}}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+2x+1}{x^2+x+2}\right)\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+1}{3x+2}}=3^2=9.$$

2.6. Вычисление пределов с учетом их особенностей

а) При вычислении пределов, содержащих логарифмические функции, часто используют свойства логарифмов и формулы (1) – (4).

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\cdot\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}=$

$$=\frac{1}{2}[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)}{-x}]=\frac{1}{2}[\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}+\lim_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}]=1$$

согласно следствию замечательных пределов.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-1+1-e^{bx}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}a\cdot\dfrac{e^{ax}-1}{ax}-$

$-\lim\limits_{x\to 0}b\cdot\dfrac{e^{bx}-1}{bx}=a\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y}-1}{y}-b\cdot\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{e^{y}-1}{y}=|IV|=a\cdot 1-b\cdot 1=a$ - b.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\ln(1+\dfrac{x}{2})-\ln\dfrac{x}{2})$.

Решение. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\ln(1+\dfrac{x}{2})-\ln\dfrac{x}{2})=\lim\limits_{x\to +\infty}x\cdot\ln(1+\dfrac{2}{x})=\lim\limits_{x\to +\infty}x\cdot\dfrac{2}{x}=2$.

б) При вычислении пределов от дробей метод деления на наивысшую степень используют не только для дробно-рациональных выражений.

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}$.

Решение. Заметим, что $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}=\dfrac{1}{\frac{1}{x}\sqrt[3]{x^2+9}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^3}+\frac{9}{x^3}}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{9}{x^3}}}$.

Т.к. $\dfrac{1}{x}\to 0$ и $\dfrac{9}{x^3}\to 0$ при $x\to\infty$ (см. 2-е свойство бесконечно малых), то $\sqrt[3]{\dfrac{1}{x}+\dfrac{9}{x^3}}\to 0$ при $x\to\infty$ $\Rightarrow$ $\dfrac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x}+\frac{9}{x^3}}}\to\infty$ (см. 1-е свойство бесконечно малых) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+9}}=\infty$.

§3. Непрерывность функции. Точки разрыва

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если при $x\to a$ предел функции существует и равен ее частному значению в этой точке, т.е. если

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

Этому определению равносильно следующее.

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δy, т.е. если $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\big(f(a+\Delta x)-f(a)\big)=0$.

Функция $f(x)$ разрывна в точке $x=a$: 1) если не существует $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, или 2) функция $f(x)$ не определена в точке $x=a$, или 3) существует $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, но он не равен значению функции в этой точке, т.е. $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке $x = a$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

функция должна быть определена в некоторой δ - окрестности точки a и в самой точке a;

функция должна иметь одинаковые односторонние пределы, т.е.

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x);$$

односторонние пределы должны быть равны $f(a)$.

Если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, но $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$, то точка $x = a$ называется **точкой устранимого разрыва** функции.

Точка $x = a$ называется **точкой разрыва 1-го рода** для $f(x)$, если существуют конечные односторонние пределы функции $f(x)$ в точке a и

$$\lim_{x\to a-0} f(x) \neq \lim_{x\to a+0} f(x).$$

В противном случае имеем **точку разрыва 2-го рода**.

Скачком функции $f(x)$ в точке a называется разность ее односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) - \lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, если они различны.

В случае $f(a) = f(a+0)$ функция $f(x)$ **непрерывна справа в точке** $x = a$.

В случае $f(a) = f(a\text{-}0)$ функция $f(x)$ **непрерывна слева в точке** $x = a$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ $\Leftrightarrow$ $f(x)$ непрерывна в этой точке слева и справа.

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$, то $f(x) + g(x)$ и $f(x)\cdot g(x)$ непрерывны в этой точке; $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x = a$, если $g(a) \neq 0$.

Функция называется непрерывной в интервале, если она непрерывна во всех точках этого интервала.

Любая элементарная функция непрерывна в области определения.

Пример. Задана функция $y = f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

а) $f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$, б) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, в) $f(x)=\begin{cases} x^2, x \neq 0 \\ 1, x = 0. \end{cases}$, г) $f(x)=\begin{cases} xe^x, x < 0; \\ 1-\cos x, 0 \le x < \pi; \\ x-2, x \ge \pi. \end{cases}$

Решение а) При $x \neq 0$ $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. $f(x)$ непрерывна при $x \neq 0$. Рассмотрим т. $x = 0$. Вычислим $f(+0) = \lim\limits_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \Rightarrow x = 0$- точка разрыва 2-го рода. $f(-0) = \lim\limits_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}} = 0 = f(0) \Rightarrow f(x)$ непрерывна слева в точке $x = 0$. График функции $f(x)$ изображен на рис. 12.

б) Функция $f(x)$ определена при всех значениях x, кроме $x = 0$ (Dom $f = \mathbf{R}\backslash\{0\}$). Следовательно, $x = 0$ - точка разрыва. Исследуем ее характер.

Вычислим

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=\lim_{x\to0}1=1,\ f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{x}=\lim_{x\to0}(-1)=-1.$$

Так как $f(+0)\neq f(-0)$, но $f(+0)$, $f(-0)\in$ **R**, то $x=0$ - точка неустранимого разрыва 1-го рода. При $x<0$ $f(x)=-1$, при $x>0$ $f(x)=1\Rightarrow$ при $x\neq0$ $f(x)$ непрерывна. График функции $f(x)$ изображен на рис. 13.

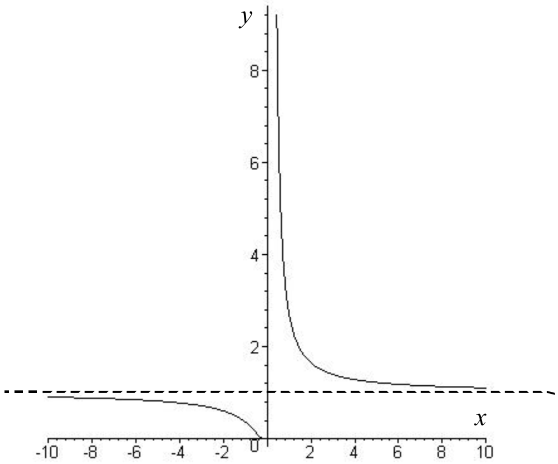


Рис. 12

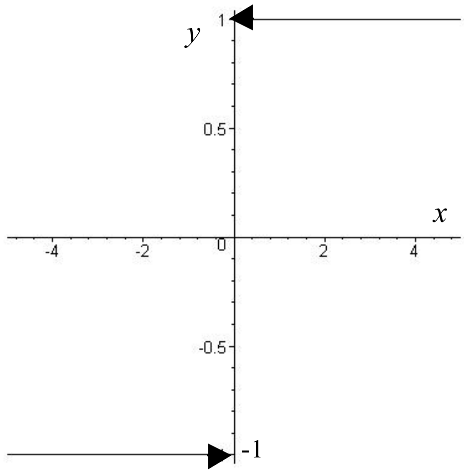


Рис. 13

в) При $x\neq0$ $f(x)=x^2\Rightarrow f(x)$ непрерывна в т. $x\neq0$.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}x^2=0\neq f(0)=1\Rightarrow x=0$ - точка устранимого разрыва.

Рассмотрев $\tilde{f}(x)=\begin{cases}x^2, x\neq0\\ 0, x=0\end{cases}=x^2$, т.е. изменив значение $f(x)$ в точке разрыва, получаем непрерывную функцию. График функции $f(x)$ изображен на рис. 14.

г) Поскольку элементарные функции xe^x, $1-\cos x$, $x-2$ непрерывны на **R**, то точками разрыва могут быть лишь $x=0$ и $x=\pi$. Имеем

$$f(x-0)=\lim_{x\to-0}xe^x=0==\lim_{x\to+0}(1-\cos x)=f(x+0).$$

Значит, в точке $x=0$ функция $f(x)$ непрерывна. Аналогично, $f(\pi-0)=\lim\limits_{x\to\pi-0}(1-\cos x)=2$, $f(\pi+0)=\lim_{x\to\pi+0}(x-2)=\pi-2$. Тогда в точке $x=\pi$ функция имеет разрыв первого рода с величиной скачка $\pi-4$. График функции $f(x)$ изображен на рис 15 .

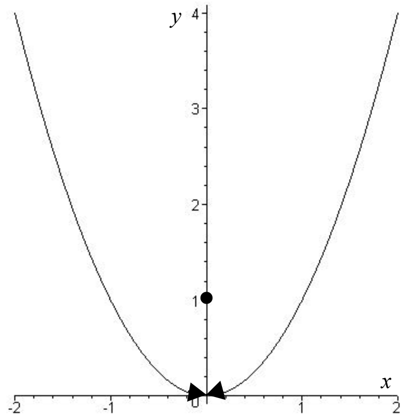


Рис. 14

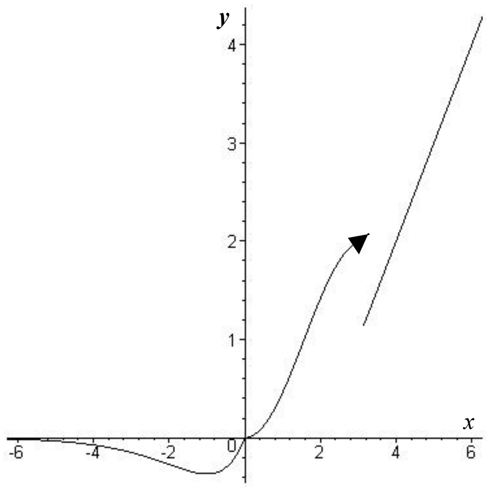


Рис. 15

Глава6. Решение типовых задач Контрольной работы №1

Задача 1. Используя теорему Кронекера - Капелли, доказать совместность системы линейных уравнений и решить её двумя способами: 1) методом Гаусса; 2) средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 7, \\ 2x + y - z = 4, \\ 3x + 3y - 2z = 10. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг r матрицы системы методом окаймляющих миноров. Рассмотрим минор $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 = 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; r \geq 2.$ Найдем определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 12 + 6 - 6 - 8 + 3 = 5 \neq 0 \;\Rightarrow\; r = 3.$$

Ранг расширенной матрицы системы также равен трем, поскольку система содержит три уравнения, а ранг матрицы системы равен трем. Следовательно, согласно теореме Кронекера - Капелли, система совместна.

Первый способ решения (метод Гаусса)

Умножим первую строку на (–2) и результат прибавим ко второй, потом умножим первую строку на (–3) и результат прибавим к третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & -2 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \\ 0 & 9 & -8 & -11 \end{pmatrix} \to$$

Разделим вторую строку на 5, потом умножим ее на (–9) и результат прибавили к третьей:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 9 & -8 & -11 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Из последней матрицы имеем $z = 7$; $y - z = -2$, $y = 5$; $x - 2y + 2z = 7$, $x = 3$.

Второй способ решения

Найдем алгебраические дополнения матрицы системы:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{21} = 2,$$

$$A_{22} = -8, \quad A_{23} = -9, \quad A_{31} = 0, \quad A_{32} = 5, \quad A_{33} = 5.$$

Запишем присоединенную матрицу и транспонируем ее:

$$A^V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -8 & -9 \\ 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}, \quad \left(A^V\right)^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение системы:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\left(A^V\right)^T \cdot B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -8 & 5 \\ 3 & -9 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 + 8 + 0 \\ 7 - 32 + 50 \\ 21 - 36 + 50 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x = 3$, $y = 5$, $z = 7$.

Данные для задач № 2 - №3. Пусть даны точки А(2;6), В(-4;3), С(-2;2), Д(2;-2).

Задача 2. 1) Написать уравнения прямых *АВ* и *СД*. Определить угловые коэффициенты этих прямых

2) Найти координаты точки их пересечения.

3) Найти угол между этими прямыми.

4) Найти расстояние от точки *А* до прямой *СД*.

Решение.

1) Для составления уравнения прямых удобно воспользоваться уравнением прямой, проходящей через две точки (см.гл.3, §2. №4) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$

АВ: $\dfrac{x-2}{-4-2}=\dfrac{y-6}{3-6}$, $\quad\dfrac{x-2}{-6}=\dfrac{y-6}{-3}$, умножим обе части уравнения на -6,

получим $x-2=2y-12, или \quad y=\dfrac{x}{2}+5 \rightarrow k_1=\dfrac{1}{2}$

Аналогично получим уравнение прямой *СД*:

$$\frac{x+2}{2+2}=\frac{y-2}{-2-2}, \qquad \frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-4}\rightarrow y=-x, \rightarrow k_2=-1$$

2) Чтобы найти точку пересечения прямых, надо систему уравнений этих прямых.

$\begin{cases} y=\dfrac{x}{2}+5 \\ y=-x \end{cases} \rightarrow \qquad \dfrac{x}{2}+5=-x, \qquad x+10=-2x, \qquad x=-\dfrac{10}{3}$, у найдем из второго уравнения системы $y=\dfrac{10}{3}$ Ответ: $\left(-\dfrac{10}{3};\dfrac{10}{3}\right)$

3) Для определения угла между прямыми воспользуемся формулой

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \quad tg\varphi=\frac{\frac{1}{2}-(-1)}{1-\frac{1}{2}}=3\rightarrow\varphi=arctg3 \text{ Ответ: } arctg3$$

4) Расстояние от точи $M_0(x_0;\, y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$, заданной общим уравнением, вычисляется по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Запишем уравнение прямой *СД* в общем виде $x+y=0$. Имеем $x_0=2, y_0=6$, A=1 и B=1. Подставляем в формулу и получим $d=\dfrac{|1\cdot 2+1\cdot 6|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{8}{\sqrt{2}}$

Ответ: $\dfrac{8}{\sqrt{2}}$

Задача 3. 1) Найти координаты векторов

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{СД}, \qquad \overrightarrow{BC}-\overrightarrow{ДA}, \qquad 3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{ДC}.$$

2) Написать разложение этих векторов по базису $\vec{i}, \vec{j}$

3) Найти длины этих векторов

4) Найти скалярное произведение $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{СД}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{ДC}$

5) Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{ДC}$.

6) Найти разложение вектора $\overrightarrow{ДC}$ *по базису* $\overrightarrow{AB}$ *и* $\overrightarrow{AД}$

Решение.

1) Вычислим координаты векторов $A\vec{B}$ и $СД$ (нужно из координат точки его конца вычесть координаты его начала):
$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (-4-2; 3-6) = (-6; -3)$.
$\overrightarrow{СД} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1) = (2+2; -2-2) = (4; -4)$
$AB + СД = (-6+4; -3+(-4)) = (-2; -7)$, аналогично, $BC - ДA = (2; -9)$
$3 \cdot AB = (-18; -9)$, $2 \cdot ДC = (-8; 8)$ и $\vec{}3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{ДC} = (-26; -1)$

2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{СД} = -2\vec{i} - 7\vec{j}$, $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{ДA} = 2\vec{i} - 9\vec{j}$ $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{ДC} = -26\vec{i} - \vec{j}$

3)
$| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{СД} | = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}$, $| \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{ДA} | = \sqrt{2^2 + (-9)^2} = \sqrt{85}$,
$| 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{ДC} | = \sqrt{(-26)^2 + (-1)^2} = \sqrt{676}$

4) Для вычисления угла между векторами воспользуемся формулой:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \text{ т,е,}$$

$$\cos\alpha = \frac{-6 \cdot (-8) + (-3) \cdot 8}{\sqrt{36+9} \cdot \sqrt{64+64}} = \frac{24}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{128}} = \frac{1}{\sqrt{10}}, \ \alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

5) Разложить вектор $\vec{D}C$ по векторам $A\vec{B}$ и $A\vec{D}$ - это значит представить вектор ДС в виде линейной комбинации векторов АВ и АД т. е.
$D\vec{C} = \lambda_1 \cdot A\vec{B} + \lambda_2 \cdot A\vec{D}$, где $\lambda_1, \lambda_2 \in R$. Имеем $(-8; 8) = \lambda_1 \cdot (-18; -9) + \lambda_2 \cdot (0; -8)$,
$(-8; 8) = (-18\lambda_1; -9\lambda_1) + (0; -8\lambda_2)$,
$(-8; 8) = (-18\lambda_1; -9\lambda_1 - 8\lambda_2)$, но у равных векторов соответственно равны координаты, следовательно, получим систему, из которой найдем λ_1 и λ_2.

$$\begin{cases} -8 = -18\lambda_1 \\ 8 = -9\lambda_1 - 8\lambda_2 \end{cases}, \ \lambda_1 = \frac{4}{9}, \lambda_2 = -\frac{3}{2} \qquad D\vec{C} = \frac{4}{9}A\vec{B} - \frac{3}{2}A\vec{D}.$$

Задача 2 а). Даны векторы $\vec{a}$ {1; 2; 3}, $\vec{b}$ {2; 2; 5}, $\vec{c}$ {3; 1; 4} и $\vec{d}$ {4; 3; 7} в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

Решение. Три вектора образуют базис, если $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} \neq 0$.

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 30 + 6 - 18 - 5 - 16 = 5 = \Delta \neq 0.$$

Найдем координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

$$\vec{d} = n\vec{a} + m\vec{b} + p\vec{c}.$$

Два вектора равны, если их соответствующие координаты равны.

$$\begin{cases} n + 2m + 3p = 4, \\ 2n + 2m + p = 3, \\ 3n + 5m + 4p = 7. \end{cases}$$

Решим систему методом Крамера:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad \Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 5;$$

$$n = \frac{\Delta_n}{\Delta} = 1, \; m = \frac{\Delta_m}{\Delta} = 0, \; p = \frac{\Delta_p}{\Delta} = 1.$$

Ответ: $\vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$.

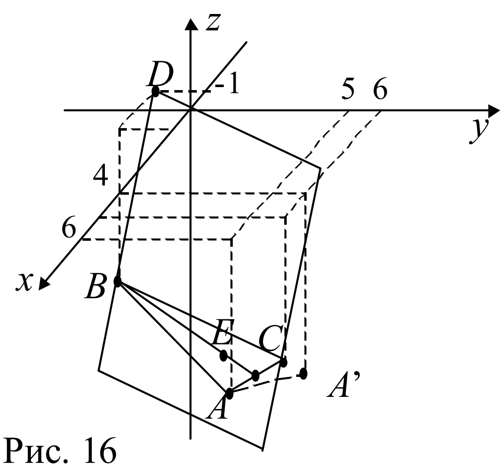


Рис. 16

Задача 3а) . Даны координаты вершин тетраэдра *ABCD*: *A*(6; 5; –4), *B*(1; –2; –4), *C*(5; 6; –4) и *D*(–1; –2; 0). Найти: 1) координаты точки пересечения медиан треугольника *ABC*; 2) уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно медиане, проведенной из вершины *B* треугольника *ABC*; 3) координаты точки, симметричной точке *A* относительно плоскости *BCD*. Сделать чертёж.

Решение

1) Найдем координаты т. *F* середины отрезка *AC* (рис. 16): $x_F = (x_A + x_C)/2 = 5{,}5$,
$y_F = (y_A + y_C)/2 = 5{,}5$, $z_F = (z_A + z_C)/2 = -4$, $F(5{,}5; 5{,}5; -4)$.

Точка *E* пересечения медиан треугольника делит медиану *BF* в отношении $\lambda = 2:1$, считая от вершины *B*. Найдем координаты точки *E*:
$x_E = (x_B + \lambda x_F)/(1+\lambda) = 4$,
$y_E = (y_B + \lambda y_F)/(1+\lambda) = 3$,
$z_E = (z_B + \lambda z_F)/(1+\lambda) = -4$, $E(4; 3; -4)$.

2) Найдем направляющий вектор прямой *BE*: $\overrightarrow{BE}\,\{x_E - x_B; y_E - y_B; z_E - z_B\} = \{3; 5; 0\}$. Уравнение прямой, проходящей через вершину *A* параллельно прямой *BE:*

$$\frac{x - x_A}{x_E - x_B} = \frac{y - y_A}{y_E - y_B} = \frac{z - z_A}{z_E - z_B}, \qquad \frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+4}{0}.$$

3) Найдем уравнение плоскости *BCD*:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+4 \\ 4 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32(x-1) - 16(y+2) + 16(z+4) = 0.$$

Найдем каноническое уравнение прямой, перпендикулярной плоскости *BCD* и проходящей через т. *A:* $(x - 6)/2 = (y - 5)/(-1) = z + 4$. Запишем каноническое уравнение прямой в параметрическом виде: $x = 2t + 6$, $y = -t + 5$, $z = t - 4$.

Найдем координаты точки *H* пересечения плоскости *BCD* и найденной прямой: $2(2t + 5) - (-t + 7) + t = 0$, $t = -0{,}5$; $x_H = 5$, $y_H = 5{,}5$, $z_H = -4{,}5$.

Координаты точки *A'*, симметричной точке *A* относительно плоскости *BCD* –
A'(4; 6; –5).

Ответ: 1) координаты точки пересечения медиан *E*(4; 3; –4); 2) уравнение прямой $\frac{x-6}{3} = \frac{y-5}{5} = \frac{z+4}{0}$; 3) координаты симметричной точки *A*'(4; 6; –5).

Задача 4. Линия задана уравнением $r = 5/(6 + 3\cos\varphi)$ в полярной системе координат. Требуется: 1) построить линию по точкам, начиная от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ и придавая φ значения через промежуток $\pi/8$; 2) найти уравнение данной линии в декартовой прямоугольной системе координат, у которой начало совпадает с полюсом, а положительная полуось абсцисс – с полярной осью, привести его к каноническому виду; 3) по уравнению в декартовой прямоугольной системе координат
определить, какая это линия.

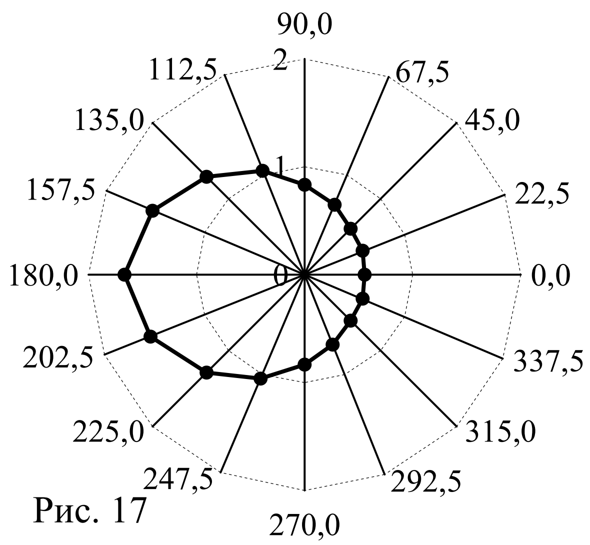


Рис. 17

Решение

1) Вычисляя значения *r* с точностью до сотых при указанных значениях φ, получим таблицу:

φ°	0	22,5°	45°	67,5°	90°	112,5°	135°	157,5°	180°
φ°	360°	337,5°	315°	292,5°	270°	247,5°	225°	202,5°	
Cosφ	1,00	0,92	0,71	0,38	0,00	–0,38	–0,71	–0,92	–1,00
R	0,56	0,57	0,62	0,70	0,83	1,03	1,29	1,54	1,67

Используя полученные табличные значения, построим кривую в полярной системе координат (рис. 17).

2) Используя формулы перехода
$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ r^2 = x^2 + y^2$ из полярной в декартовую систему координат, получим: $6\sqrt{x^2+y^2} = 5-3x$.

Возведем левую и правую части в квадрат: $27x^2 + 36y^2 + 30x = 25$. Выделим полный квадрат и приведем к каноническому виду:
$\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $c = 5/9$; $a^2 = 100/81$; $b^2 = 25/27$.

3) Это эллипс, смещенный на $(-c)$ вдоль оси OX.

Ответ: эллипс $\frac{(x+c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, где $c = 5/9$, $a^2 = 100/81$, $b^2 = 25/27$.

Задача 5. Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} -0.5x+1, & x \le -2; \\ x^2-2, & -2 < x < 1; \\ \ln x, & x \ge 1. \end{cases}$$

Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

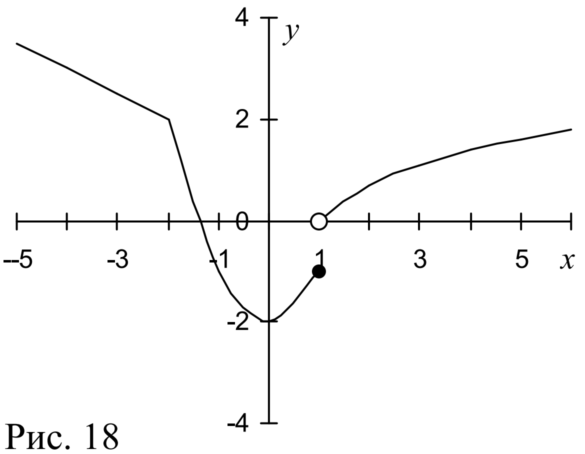


Рис. 18

Решение. Неэлементарная функция $f(x)$ определена на всей числовой оси. Она может иметь разрыв в точках $x = -2$ и $x = 1$, где меняется ее аналитическое выражение. Во всех остальных точках своей области определения функция $f(x)$ непрерывна, поскольку каждая из формул, которыми она задана, определяет собой элементарную функцию, непрерывную в своем интервале изменения аргумента x. Исследуем точки $x = -2$ и $x = 1$:

а) $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x) = \lim\limits_{x\to-2-0}(-0{,}5x+1) = 2, \quad \lim\limits_{x\to-2+0} f(x) = \lim\limits_{x\to-2+0}(x^2-2) = 2$.

Следовательно, в точке $x = -2$ выполняются все условия непрерывности, поэтому в этой точке функция $f(x)$ непрерывна.

б) $\lim\limits_{x\to1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to1-0}(x^2-2) = -1, \quad \lim\limits_{x\to1+0} f(x) = \lim\limits_{x\to1+0}\ln x = 0$.

Левый и правый пределы функции конечны, но не одинаковы, поэтому в точке $x = 1$ функция имеет разрыв (конечный). Скачок функции в точке разрыва конечный $f(1+0) - f(1-0) = 1$.

График функции приведен на рис. 18.

Ответ: функция имеет конечный разрыв в точке $x = 1$, ее скачок равен 1.

Задача 6. Найти пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+2}{4-x^2+x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2\,3x}{x\sin5x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+0} x^x$; г) $\lim\limits_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}$.

Решение

а) Разделив числитель и знаменатель на большую степень x^3, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+2}{4-x^2+x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-1/x^2+2/x^3}{4/x^3-1/x+1}=2;$$

б) Умножив числитель и знаменатель на $45x$ и используя первый замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{tg}^2\,3x}{x\sin5x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin^2 3x}{(3x)^2}\cdot\frac{5x}{\sin5x}\cdot\frac{9}{5\cos^2 3x}\right)=\frac{9}{5};$$

в) Логарифмируя и используя правило Лопиталя, получим

$\lim\limits_{x\to+0} x^x=\left(0^0\right)=A$,

$$\ln A=\lim_{x\to+0}x\ln x=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{1/x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+0}(-x)=0,\ A=1;$$

г) Сделав замену переменных и используя второй замечательный предел, получим

$$\lim_{x\to1}(2x-1)^{\frac{2x}{x-1}}=\left[1^\infty\right]=\left|\begin{matrix}2x-1=1+t,\\ x\to1,\quad t\to0\end{matrix}\right|=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{4+2t}{t}}=\lim_{t\to0}(1+t)^{\frac{4}{t}}(1+t)^2=e^4.$$

Методические указания к выполнению контрольной работы № 2

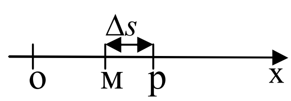
«*Производная и ее приложения. Приложения дифференциального исчисления*»

§1. Производная. Механический и геометрический смысл производной.

Для понимания понятия производной решим две различные задачи, физическую и геометрическую, процесс решения которых приводит к возникновению одной и той же математической модели.

<u>Задача 1</u>**.** Пусть тело движется прямолинейно и указан закон движения формулой s=s(t), где t – время движения, s(t) – положение тела на прямой(координата движущейся материальной точки) в момент времени t. Найти скорость движения тела в момент времени t т.е. v(t).

<u>Решение</u>**.** Предположим, что в момент времени t тело находилось в точке М, пройдя путь от начала движения ОМ= s(t).



Дадим аргументу t приращение Δt, тело в момент времени $t+\Delta t$ будет находиться в точке Р, пройдя расстояние от начала движения

$OP = s(t+\Delta t)$.Значит, за Δt тело прошло расстояние МР=ОР – ОМ= $s(t+\Delta t)-s(t)$. Полученную разность назовем приращением функции s(t) : $s(t+\Delta t)-s(t)=\Delta s$. Итак, расстояние Δs тело пошло за время Δt. Найдем среднюю скорость v_{cp} движения тела за промежуток времени $[t;t+\Delta t]$:

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Естественно, что **мгновенная скорость v(t) –** это средняя скорость движения за промежуток времени $[t;t+\Delta t]$ при условии, что $\Delta t \to 0$.

$$v(t) = \lim_{\Delta t\to 0} v_{cp} \text{ или } v(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Задача 2. Дан график функции y= y(x). На нем выбрана точка M(x_0 ; y(x_0)), в этой точке к графику функции проведена касательная (мы предполагаем, что она существует). Найти угловой коэффициент касательной k_{kac}.

Решите эту задачу самостоятельно (или прочитайте решение в учебниках)

При решении мы получим, что $k_{kac} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Подведем итоги. Две различные задачи в процессе решения приводят к одной и той же математической модели - пределу отношения приращения функции к приращению аргумента при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

Определение. Производной функции y= $f(x)$ в точке x называется предел (если он существует) отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

1.1 Механический и геометрический смысл производной. Уравнение касательной к кривой в точке.

А) $S'(t)=V(t),\qquad V'(t)=a(t)$

Определение. Касательной к кривой y = f(x) в ее точке M_o (x_o,y_o) называется предельное положение секущей MM_o , когда точка M стремится к M_o вдоль данной кривой.

Б) Угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой y = f(x) в точке (x_0 ; y_0), равен значению производной функции в абсциссе точки касания.

$$\underline{f'(x_0)=k,}\qquad k = tg\alpha,\ где\ \alpha - угол\ наклона\ касательной\ к\ оси\ Ox$$

В) Уравнение касательной к кривой y = f (x) в точке (x_0 ;y_0) имеет вид:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

Пользуясь определением производной, мы можем вычислить производные для всех элементарных функций и составить таблицу производных .

§2. Таблица производных

1) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$ (n - постоянное число);

2) $\left(\sin x\right)' = \cos x$;

3) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;

4) $\left(\operatorname{tg} x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

5) $\left(\operatorname{ctg} x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

6) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

7) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

8) $\left(\operatorname{arctg} x\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

9) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

10) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad (a>0)$;

$\left(e^x\right)' = e^x$;

11) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a} \quad (a>0,\ a\neq 1)$;

$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;

12) $\left(\operatorname{sh} x\right)' = \operatorname{ch} x$;

13) $\left(\operatorname{ch} x\right)' = \operatorname{sh} x$;

14) $\left(\operatorname{th} x\right)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

15) $\left(\operatorname{cth} x\right)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

§3. Правила дифференцирования

Если C - постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ имеют производные, то

а) $C' = 0$; б) $\left(Cu\right)' = Cu'$; в) $\left[u(x) \pm v(x)\right]' = u'(x) \pm v'(x)$;

г) $\left(uv\right)' = u'v + v'u$; д) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ ($v \neq 0$);

Производные **показательно-степенных** функций вычисляют по формуле

$$\left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\ln u(x)}\right)' = \left(u(x)\right)^{v(x)} v'(x)\ln u(x) + \left(u(x)\right)^{v(x)-1} v(x)u'(x).$$

Производная второго порядка от функции $y=f(x)$ определяется как $f''(x)=f^{(2)}(x)=\left(f'(x)\right)'$. Аналогично определяются производные высших порядков $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$, $n = 3, 4, \ldots$

§4. Дифференциал функции

Если приращение функции $y=f(x)$ от независимой переменной x может быть представлено в виде $\Delta y=A(x)\Delta x+o(dx)$, где $dx=\Delta x$, то главная линейная часть этого приращения называется **дифференциалом** функции y: $dy=A(x)dx$. Для существования дифференциала функции $y=f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y'=f'(x)$, причем имеем $dy=y'dx$. Последняя формула будет верна и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (свойство инвариантности первого дифференциала). Дифференциалы высших порядков от функции $y=f(x)$ последовательно определяются формулами $d^n y=d\left(d^{n-1}y\right)$,
$n = 2, 3, \ldots$, где принято $d^1y=dy=y'dx$. Если x - независимая переменная, то полагают $d^2x=d^3x=\ldots=0.$ В этом случае справедливы формулы
$d^n y=y^{(n)}dx^n$ и $y^{(n)}=\dfrac{d^n y}{dx^n}$.

§5. Производная обратной функции

Дифференцируемая функция $y=f(x)$ ($a<x<b$) с производной $f'(x)\neq 0$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x=f^{-1}(y)$, причем обратная функция также дифференцируема и справедлива формула $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

§6. Производная функции, заданной параметрически

Система уравнений $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t), \end{cases}$ где $\varphi(t)$ и $\phi(t)$ - дифференцируемые функции и $\varphi'(t)\neq 0$, определяет y в некоторой области как однозначную дифференцируемую функцию от x: $y=\phi\left(\varphi^{-1}(x)\right)$, причем производная этой функции может быть найдена по формуле $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$. Для вычисления второй производной y''_{xx} используют формулу $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d\left(\dfrac{y'_t}{x'_t}\right)}{dx}=\dfrac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{\left(x'_t\right)^3}$.

§7. Производная функции, заданной в неявном виде

Если дифференцируемая функция $y = f(x)$ удовлетворяет уравнению $F(x,y) = 0$, то производная $y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения $\frac{d}{dx}\left[F(x,y)\right] = 0,$ где $F(x,y)$ рассматривается как сложная функция переменной x.

Пример 1. Найти производные dy/dx данных функций:

а) $y = \frac{\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{1-x^2}}$; в) $y = x^{\sin^2 x}$;

б) $y = \ln(\arcsin x)\cdot\cos^3\sqrt{x+1}$; г) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + y^2\right) = 0$.

Решение

а) Комбинируя правила нахождения производных сложной функции и частного, получим

$$y' = \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\sqrt{1-x^2} - \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\sqrt[3]{x+1}}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}} =$$

$$= \frac{1 - x^2 + 3x(x+1)}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}} = \frac{2x^2 + 3x + 1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}.$$

б) Комбинируя правила нахождения производных сложной функции и произведения функций, будем иметь

$$y' = (\arcsin x)^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cos^3\sqrt{x+1} + \ln(\arcsin x)\cdot 3\cos^2\sqrt{x+1}\cdot\left(-\sin\sqrt{x+1}\right)\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.$$

в) Запишем данную функцию в виде $y = e^{\sin^2 x\cdot\ln x}$ и применим правило дифференцирования сложной функции:

$$y' = e^{\sin^2 x\cdot\ln x}\left[2\sin x\cdot\cos x\cdot\ln x + \sin^2 x\cdot\frac{1}{x}\right] = e^{\sin^2 x\cdot\ln x}\sin x\cdot\left[2\cos x\cdot\ln x + \sin x\cdot\frac{1}{x}\right].$$

г) Продифференцируем обе части тождества по x, считая $y = y(x)$.

$$\frac{1}{1+(y/x)^2}\left(\frac{y'x - y}{x^2}\right) - \frac{x + yy'}{\left(x^2 + y^2\right)} = \frac{y'x - y - x - yy'}{\left(x^2 + y^2\right)} = 0.$$

Следовательно, числитель последней дроби равен нулю: $y'(x - y) - (y + x) = 0.$ В итоге получаем $y' = \frac{x + y}{x - y}.$

Пример 2. Найти dy/dx и d^2y/dx^2 для заданных функций:

а) $y = e^{\operatorname{arctg} x}$; б) $\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = t^2 - t. \end{cases}$

Решение

а) $y' = e^{arctgx}\left(1 + x^2\right)^{-1}$;

$$y'' = e^{arctgx}\left(1 + x^2\right)^{-2} - 2x\left(1 + x^2\right)^{-2} e^{arctgx} = e^{arctgx}\left(1 + x^2\right)^{-2}\left(1 - 2x\right).$$

б) Применим правила нахождения производных от функции, заданной параметрически $\frac{dy}{dx} = \frac{2t - 1}{3t^2 + 1}$. Так как $x'_t = 3t^2 + 1$, $y'_t = 2t - 1$, $x''_{tt} = 6t$, $y''_{tt} = 2$, то

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{6t^2 + 2 - 12t^2 + 6t}{\left(3t^2 + 1\right)^3} = \frac{-6t^2 + 6t + 2}{\left(3t^2 + 1\right)^3}.$$

§8. Монотонность и экстремумы функции.

Определение1. Функция y = f (x) называется возрастающей в интервале (a,b), если большему значению аргумента x из этого интервала соответствует и большее значение функции.

Определение 2. Функция y = f (x) называется убывающей в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Достаточное условие возрастания (убывания) функции:

Если во всех точках $x \in (a;b)$ выполняется неравенство $f'(x) \geq 0$ (причем равенство $f'(x) = 0$ выполняется лишь в отдельных точках и не выполняется ни на каком сплошном промежутке), то функция $f(x)$ возрастает в интервале (a; b).

Если в данном промежутке производная данной функции неотрицательна, то функция в этом промежутке убывает.

Справедливы и обратные утверждения.

Определение 3. *Максимумом* функции y = f(x) такое ее значение $y_1 = f(x_1)$, которое больше всех ее значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_1 и отличных от нее, т. е. $f(x_1) > f(x)$, где x- любая точка из интервала, содержащего точку x_1 (x_1 - точка *максимума*)

Определение 4. *Минимумом* функции y = f(x) называется такое ее значение $y_2 = f(x_2)$, которое меньше всех других ее значений, принимаемых в точках x, достаточно близких к точке x_2 и отличных от нее, т. е. $f(x_2) < f(x)$, где x – любая точка из некоторого интервала, содержащего точку x_2 . (x_2 - точка *минимума*)

Максимум или минимум функции называется *экстремумом* функции. Точки,

в которых достигается экстремум, называются *точками экстремума.*

Функция может иметь экстремум в тех точках области определения, в которых производная равна нулю или не существует . Такие точки называются критическими .

<u>Достаточное условие экстремума.</u>

Если в точке x = x_o производная функции y = f (x) обращается в нуль или не существует, и меняет знак при переходе через эту точку, то f(x_o) - экстремум функции, причем

1) функция имеет максимум в точке x_o , если знак производной меняется с «+» на «-»

2) функция имеет минимум в точке x_o , если знак производной меняется с «-» на «+»

3) функция не имеет экстремума, если знак производной не меняется.

Алгоритм исследования непрерывной функции y=f(x) на монотонность и экстремумы.

1. Найти область определения и производную $f'(x)$.

2. Найти критические точки.

3 Отметить критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.

4.Опираясь на теоремы сделать выводы о монотонности и о ее точках экстремума.

Пример 3. Исследовать функцию $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 5$ на монотонность и экстремумы.

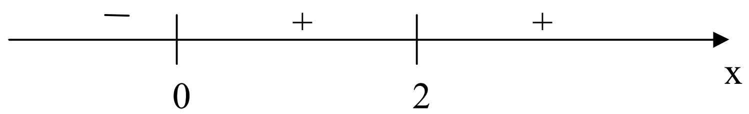
Решение. 1. Найдем область определения: $x \in R$ и производную данной функции:

$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 48x,\qquad f'(x) = 12x\left(x^2 - 4x + 4\right),\qquad f'(x) = 12x(x-2)^2$

2. Найдем критические точки.

$f'(x) = 0 \to 12x(x-2)^2 = 0 \to x_1 = 0; x_2 = 2$ *– это две критические точки.*

3.Отметим полученные точки на числовой прямой и схематически укажем знаки производной по промежуткам области определения.



x=0 - точка минимума функции, а x=2 точкой экстремума не является.

На промежутке $(-\infty;0)$ функция убывает, а на промежутке $(2;+\infty)$ функция возрастает.

§ 9. Наибольшее (наименьшее) значения непрерывной и дифференцируемой функции y = f (x) на отрезке [a,b]

1) Находим критические точки, принадлежащие отрезку.

2) Находим значения функции в полученных точках и на концах отрезка. Среди полученных значений выбираем наибольшее (наименьшее).

9.1. Наибольшее (наименьшее) значение функции на интервале.

При вычислении наибольшего (наименьшего) значения функции на интервале мы не можем вычислить значения функции на концах, поэтому часто используют теорему Ферма: если функция на интервале имеет единственный *максимум* (*минимум*), то он совпадает с наибольшим (наименьшим) значением функции на этом интервале.

Пример 4 . Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, где $f(x)=2x^3-3x^2-36x-8$, $[a,b]=[-3;6]$.

Решение. Заметим, что $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на данном отрезке. Вычисления дают:

1) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6x-36=0 \Leftrightarrow x=-2, x=3$ (обе точки лежат внутри данного промежутка).

2) Находим $f(-2)=36, f(3)=-89$.

3) Вычисляем значения функции на концах промежутка:

$$f(-3)=19, f(6)=100.$$

4) В итоге имеем: $\max\limits_{[-3,6]} f(x)=\max\{19,36,-89,100\}=100=f(6)$,

$$\min\limits_{[-3,6]} f(x)=\min\{19,36,-89,100\}=-89=f(3).$$

x=0 - точка минимума функции, а x=2 точкой экстремума не является.

На промежутке $(-\infty;0)$ функция убывает, а на промежутке $(2;+\infty)$ функция возрастает.

§10. Теоремы о среднем.

Теорема Лагранжа. Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то $\exists\zeta\in(a,b)$ такая, что $f(b)-f(a)=f'(\zeta)(b-a)$ (формула конечных приращений).

Теорема Ролля. Если выполнены условия теоремы Лагранжа и $f(b)=f(a)$, то $\exists\zeta\in(a,b)$: $f'(\zeta)=0$.

Теорема Коши. Если $f(x)$, $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы на (a,b), причем $g'(x)\neq 0$, то $\exists\zeta\in(a,b)$ такая, что верна формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\zeta)}{g'(\zeta)}.$$

§ 11. Построение графиков функций

Общая схема исследования функции и построения ее графика:

1. Найти область определения функции ($Dom\, f$). Исследовать поведение $f(x)$ в граничных точках $Dom\, f$.

2. Установить, не является ли $f(x)$ четной (или нечетной).

3. Является ли $f(x)$ периодической?

4. Исследовать $f(x)$ на непрерывность. Найти точки разрыва и установить их характер. Указать вертикальные асимптоты.

5. Найти уравнения наклонных асимптот.

6. Найти нули $f(x)$, т.е. x: $f(x)=0$, и $y=f(0)$. Найти интервалы знакопостоянства.

7. Вычислить $f'(x)$. Исследовать $f(x)$ на монотонность и экстремумы.

8. Вычислить $f''(x)$. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.

9. Свести результаты в таблицу, добавить значения функции в характерных точках (экстремума, перегиба и т.д.) и построить эскиз графика $f(x)$.

К числу характерных точек графика относятся точки пересечения его с осями координат. В случае непрерывной функции $f(x)$ для нахождения абсцисс точек пересечения графика с осью Ox нужно найти корни уравнения $f(x)=0$, лежащие в области существования графика. Удаляя из этой области найденные точки, получим разбиение области определения функции на интервалы знакопостоянства.

Из теоремы Ферма следует, что в точках локального экстремума непрерывной функции $f'(x)=0$, если производная существует. Точки, удовлетворяющие этому условию, называются критическими точками функции $f(x)$. Достаточные условия локального экстремума в критической точке x_0 заключаются в смене знака $f'(x)$ при переходе через эту точку из левой ее полуокрестности в правую. При этом смена знака с $(+)$ на (–) отвечает максимуму, а смена знака с (–) на (+) – минимуму. Другой достаточный признак экстремума связан со знаком второй производной в критической точке. Если дважды дифференцируемая функция такова, что $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$, то x_0 - точка локального максимума. Если же $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)>0$, то x_0 - точка локального минимума. На практике для нахождения интервалов монотонности нужно удалить из области определения функции все точки локального экстремума. Оставшееся множество состоит из интервалов монотонности. О возрастании и убывании функции на этих интервалах можно судить по знаку $f'(x)$.

Дуга графика на интервале (a,b) называется выпуклой вверх, если она расположена под каждой касательной к ней. Достаточным условием выпуклости вверх является $f''(x)\le 0$ для всех $x\in(a,b)$. Аналогично, дуга графика на интервале (a,b) называется выпуклой вниз, если она расположена над каждой касательной к ней. Достаточным условием выпуклости вниз является $f''(x)\ge 0$ для всех $x\in(a, b)$.

Точки перегиба на графике дифференцируемой функции обладают свойством: по обе стороны от них график имеет разное направление выпуклости. Достаточным условием перегиба является существование $f''(x)$

в окрестности точки x_0 и смена знака $f''(x)$ при переходе через точку x_0. При этом $f''(x_0)=0$.

Вертикальные асимптоты к графику функции $f(x)$ - это прямые вида $x=a$, такие, что хотя бы один из односторонних пределов этой функции при $x\to a$ равен бесконечности. Это может иметь место в точках разрыва второго рода либо в граничных точках области определения функции. Наклонная асимптота при $x\to+\infty$ - это прямая $y=kx+b$,

где $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)$. Аналогично определяется наклонная асимптота при $x\to-\infty$. Наклонные асимптоты возможны только в случае, когда область определения функции не ограничена.

Пример 5. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y=f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график: а) $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, б) $f(x)=xe^{-x^2/2}$.

Решение

а) 1. Очевидно, что $Dom\, f=\mathbf{R}\setminus\{-1\}$.

2. $f(-x)=\dfrac{(-x-1)^3}{(-x+1)^2}=-\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. Заметим, что $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)\Rightarrow f(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

3. Функция x^2 не является периодической , поскольку $\forall\ T\neq 0$ $(x+T)^2=x^2+2xT+T^2\neq x^2$.

Аналогично убеждаемся в том, что x^3 не является периодической функцией. Следовательно, $f(x)=\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$ не является периодической функцией.

4. $x=-1\notin Dom\, f\Rightarrow x=-1$ - точка разрыва. Найдем $f(-1\pm 0)$.

$f(-1\pm 0)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-1)^3}{(x+1)^2}=-\infty$ $\Rightarrow$ прямая x = -1 является вертикальной асимптотой.

5. Найдем уравнения наклонных асимптот. Вычисления дают:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3}{x(x+1)^2}=1\Rightarrow k=1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(x-1)^3-x(x+1)^2}{(x+1)^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-5$$ $\Rightarrow$ $y=x-5$ - наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

6. Заметим, что $f(0) = -1$ и $f(x) = 0$ при $x = 1$.

7. Находим: $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2(x+5)}{(x+1)^3}$. Тогда, исследуя знаки $f'(x)$ методом интервалов, заключаем, что $f(x)$ возрастает на $(-\infty, -5)$, $(-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ и убывает на (-5, -1). Таким образом, в точке x = -5 $f(x)$ имеет экстремум: $f_{\max} = f(-5) = -13{,}5$. В точке $x = 1$ экстремума нет (почему мы не рассматриваем точку x = -1?). Однако указанные особенности поведения функции еще не позволяют нам однозначно судить о виде графика $f(x)$. Очевидно, что окончательный ответ на этот вопрос мы можем получить, только исследовав промежутки выпуклости $f(x)$.

8. Находим: $f''(x) = \dfrac{24(x-1)}{(x+1)^4}$. Точка возможного перегиба – $x = 1$, интервалы выпуклости – $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $[1, +\infty)$. Установим знаки $f''(x)$ на каждом из этих интервалов. Заключаем, что $f(x)$ выпукла вверх на $(-\infty, -1]$ и $(-1, 1]$ и выпукла вниз на $[1, +\infty)$. Точка $x = 1$ является точкой перегиба.

9. Сведем полученные данные в таблицу 1. Добавим значение $f(10) = 6{,}05$.

Таблица 1

x	$(-\infty,-5)$	-5	$(-5,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
$f(x)$	-	-13,5	-	$-\infty$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-	не сущ.	+	0	+
$f''(x)$	-	0	-	не сущ.	-	0	+
Выводы	Функция возрас-тает	Точка макси-мума	Функция убывает	Точка разрыва 2-го рода	Функция возрас-тает	Точка перегиба	Функция возрастает

Эскиз графика $f(x)$ представлен на (рис. 19).

б) 1. Функция определена и непрерывна на **R**.

2. Функция нечетная: $f(-x) = -xe^{-(-x)^2/2} = -f(x)$. Следовательно, ее график симметричен относительно начала координат.

3. Не периодическая.

4. Точек разрыва нет, следовательно, нет вертикальных асимптот.

5. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - 0\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{e^{-\frac{x^2}{2}}} = 0$$

(предел находится по правилу Лопиталя). Итак, наклонная асимптота имеет уравнение $y = 0$.

6. Очевидно, $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0$. График проходит через начало координат и других общих точек с осями координат не имеет. На $(-\infty,0)$ имеем $f(x)<0$, следовательно, график расположен ниже оси абсцисс. На $(0,+\infty)$ имеем $f(x)>0$, следовательно, график расположен выше оси абсцисс.

7. Исследуем функцию с помощью $f'(x)$. Имеем $f'(x)=e^{-x^2/2}\left(1-x^2\right)$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=-1, x_2=1$ - критические точки. На $(-\infty,-1)u(1,+\infty)$ функция убывает, так как $f'(x)<0$. На $(-1,1)$ функция возрастает, так как $f'(x)>0$. Следовательно, $x=-1$ - точка минимума, $f(-1)=-e^{-1/2}$; $x=1$ - точка максимума, $f(1)=e^{-1/2}$.

8. Исследуем функцию с помощью $f''(x)$. Имеем $f''(x)=e^{-x^2/2}\left(x^3-3x\right)$. Отсюда $f''(x)=0 \Leftrightarrow x_3=-\sqrt{3}, x_0=0, x_4=\sqrt{3}$ - точки возможного перегиба. На $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)u\left(0,\sqrt{3}\right)$ $f''(x)<0$ - график выпуклый вверх. На интервалах$\left(-\sqrt{3},0\right)u\left(\sqrt{3},+\infty\right)$ $f''(x)>0$ - график выпуклый вниз. Точки перегиба x_0, x_3, x_4. Значения функции в этих точках $f\left(\pm\sqrt{3}\right)=\pm\sqrt{3}e^{-3/2}$, $f(0)=0$.

9. Сводим результаты исследования в таблицу 2, пользуясь нечетностью функции, и строим эскиз графика (рис. 20).

Таблица 2

x	$(0,1)$	1	$\left(1,\sqrt{3}\right)$	$\sqrt{3}$	$\left(\sqrt{3},+\infty\right)$
$f(x)$	+	$e^{-1/2}$	+	$\sqrt{3}e^{-3/2}$	+
$f'(x)$	+	0	-	$-2e^{-3/2}$	-
$f''(x)$	-	$-2e^{-1/2}$	-	0	+
Выводы	Функция возрастает	Точка максимума	Функция убывает	Точка перегиба	Функция убывает

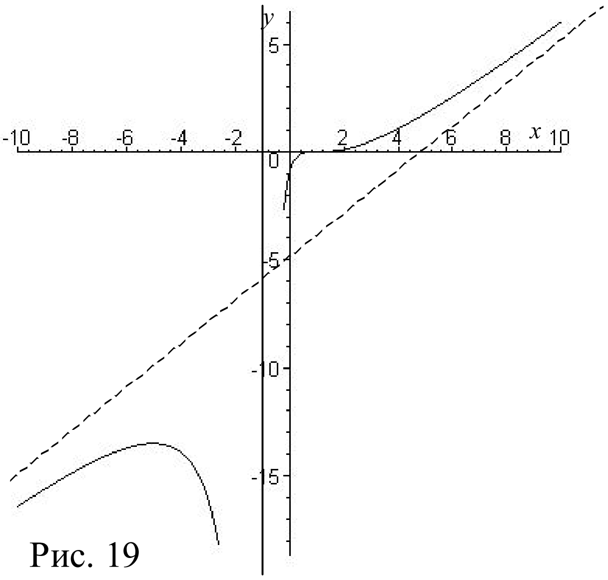


Рис. 19

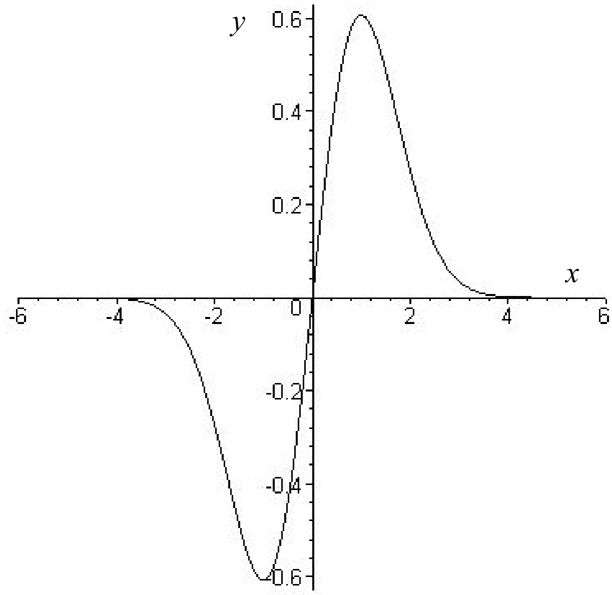


Рис. 20

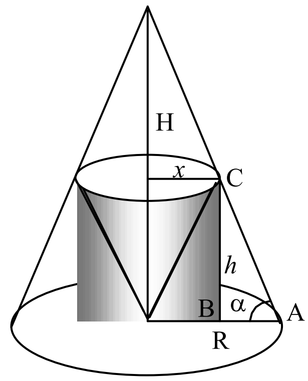


Рис. 21

<u>Пример 6.</u> Дан прямой круговой конус K с радиусом основания R, образующая его наклонена к плоскости основания под углом α. Требуется вписать в K прямой круговой конус Q наибольшего объема при условии, что вершина Q совпадает с центром основания конуса K.

Решение. Сделаем чертеж (рис. 21). Рассмотрим осевое сечение конуса K. Пусть x - радиус основания вписанного конуса. Его высота h находится из прямоугольного треугольника ABC. Так как $AB = R - x$, то $h = (R - x)tg\alpha$. Итак, объем вписанного конуса $V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 (R - x)tg\alpha$. Найдем максимум этой функции на промежутке $0 \le x \le R$. Производная $V'(x) = \frac{1}{3}\pi tg\alpha\left(2Rx - 3x^2\right)$. Отсюда $x = 0$ или $x = \dfrac{2}{3}R$. При $x = 0$ объем конуса Q равен нулю. При переходе через вторую критическую точку производная $V'(x)$ меняет знак с плюса на минус. Значит, объем конуса будет максимальным при $x = \dfrac{2}{3}R$.

Ответ: $V_{\max} = \dfrac{4}{81}\pi R^3 tg\alpha$. Объем конуса Q составляет $\dfrac{4}{27}$ объема конуса K.

§12. Уравнение касательной в точке $r(t_0)$, уравнение нормальной плоскости, проходящей через $r(t_0)$ и кривизна кривой Γ в точке $r(t_0)$, заданной векторно-параметрическим уравнением $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$, $t \in [a,b]$

Касательный вектор к кривой Γ в точке $r(t_0)$ определяется по формуле $\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}$. Предполагается, что $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ существуют и одновременно не равны нулю. Тогда искомые уравнения касательной имеют вид

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Соответственно уравнение нормальной плоскости имеет вид

$$x'(t_0)\big(x - x(t_0)\big) + y'(t_0)\big(y - y(t_0)\big) + z'(t_0)\big(z - z(t_0)\big) = 0.$$

Кривизна кривой Γ в точке $r(t_0)$ есть величина $k = \dfrac{\left|r'(t_0) \times r''(t_0)\right|}{\left|r'(t_0)\right|^3}$.

Пример 7. Найти уравнение касательной, уравнение нормальной плоскости и вычислить кривизну линии $\vec{r}(t) = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + e^t \cdot \vec{k}$ в точке $t_0 = 0$.

Решение. Вычисления дают $x(t_0) = 1,\ y(t_0) = 0,\ z(t_0) = 1$,
$x'(t_0) = 0,\ y'(t_0) = 1,\ z'(t_0) = 1, \quad x''(t_0) = -1,\ y''(t_0) = 0,\ z''(t_0) = 1$.

Искомые уравнения касательной $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-1}{1}$. Искомое уравнение нормальной плоскости $0(x-1) + 1(y-0) + (z-1) = 0$ то есть $y + z - 1 = 0$. Найдем числитель в формуле для кривизны

$r'(t_0) \times r''(t_0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Длина этого вектора равна $\sqrt{3}$. Длина вектора $r'(t_0)$ равна $\sqrt{2}$. Подставляя эти значения в формулу для кривизны, получим $k = \dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Методические указания к выполнению контрольной работы № 2 «*Неопределенный и определенный интегралы*»

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, поэтому основные формулы интегрирования получают из формул дифференцирования. Отыскание неопределенного интеграла некоторой функции называется интегрированием.

Сравнивая операции дифференцирования и интегрирования функций, сделаем два замечания:

1. Если для дифференцируемости функции в точке непрерывность функции в этой точке является условием необходимым, но недостаточным, то для интегрируемости функции на отрезке, наоборот, непрерывность

функции на этом отрезке является только условием достаточным, но не необходимым.

2. Каждая дифференцируемая функция имеет единственную производную, а операция интегрирования многозначна, так как функция имеет одну первообразную на отрезке, то она имеет и бесконечное множество первообразных на этом отрезке, отличающихся одна от другой на постоянное число.

§1. Определение и основные свойства неопределенных интегралов

Первообразной функцией $f(x)$ в данном интервале называется функция $F(x)$, если в каждой точке этого интервала $F'(x) = f(x)$.

Нетрудно доказать, что первообразные функции $f(x)$, и только они, содержатся в выражении $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Если $F(x)$ – первообразная функция $f(x)$ в некотором интервале, то выражение $F(x) + C$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$, т.е. $\int f(x)dx = F(x) + C$,

где $f(x)dx$ называется подынтегральным выражением.

Интегрирование проверяется дифференцированием, поэтому

$$d(F(x) + C) = f(x)dx \quad \text{или} \quad (F(x) + C)' = f(x).$$

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Действия интегрирования и дифференцирования являются взаимно обратными: $\int d(f(x)) = f(x) + C$, в частном случае

$$\int dx = x + C; \qquad d\int f(x)dx = f(x)dx; \qquad \left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

2. Постоянный множитель, стоящий под знаком интеграла, можно вынести за знак интеграла: $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, где C – константа.

3. Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов слагаемых:

$$\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx .$$

Приведем таблицу интегралов, на которую мы в дальнейшем будем ссылаться.

1) $\int dx = x + C$.

2) $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

14) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

15) $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

16) $\int \dfrac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$.

17) $\int \dfrac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + C$.

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7) $\int \cos x dx = \sin x + C$.

8) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

10) $\int e^x dx = e^x + C$.

11) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.

12) $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

13) $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

18) $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

19) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$.

20) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + k}} = \ln | x + \sqrt{x^2 + k} | + C$.

22) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

23) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$.

24) $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$.

25) $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$.

Часто при вычислении интегралов используют следующее равенство: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

Этот прием позволяет упростить вычисление ряда интегралов.

Пример. Вычислить интеграл $J = \int e^{3x+1} dx$.

Решение. $J = \int e^{3x+1} dx = \frac{1}{3}\int e^{3x+1} d(3x+1) = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.

Ответ: $J = \frac{1}{3} e^{3x+1} + C$.

§2. Интегрирование путем подстановки

2.1. Подведение под знак дифференциала

По определению дифференциала:

$$f'(x)dx = d\big(f(x)\big).$$

Переход в этом равенстве слева направо называют подведением множителя $f'(x)$ под знак дифференциала.

Например:

1. $2x\, dx = d(x^2)$

4. $\frac{dx}{1+x^2} = d(\operatorname{arctg} x)$

2. $\sin x\, dx = -\, d(\cos x)$ 5. $\dfrac{dx}{x} = d(\ln x)$.

3. $\cos x \cdot dx = d(\cos x)$ 6. $e^x \cdot dx = d(e^x)$ и т. д.

Справедлива формула

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))\,d\varphi(x) = \int f(u)\,du\,.$$

В данной контрольной работе составлены примеры на эту формулу в задаче 13(а).

Задача 13(а). Найти неопределенные интегралы:

1. $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx$, 2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$, 3. $\displaystyle\int \frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx$.

Решение. 1. $\displaystyle J = \int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \int \ln^2 x \frac{dx}{x} = \int \ln^2 x\, d(\ln x)$.

Пусть $u = \ln x$, тогда $\displaystyle J = \int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + C$. Переходя к первоначальной переменной x, окончательно получим $\displaystyle\int \frac{\ln^2 x}{x}dx = \frac{\ln^3 x}{3} + C$.

Сделаем проверку: $\displaystyle\left(\frac{\ln^3 x}{3} + C\right)' = \frac{3\ln^2 x}{3}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\ln^2 x}{x}$ - это подынтегральная функция. Следовательно, интеграл вычислен верно.

Ответ: $\dfrac{\ln^3 x}{3} + C$.

1. $\displaystyle J = \int \frac{\sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx = \int \sqrt[3]{\operatorname{arctg} x}\, d(\operatorname{arctg} x) = \int (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{3}} d(\operatorname{arctg} x)$.

Здесь, очевидно, $\operatorname{arctg} x = u$. При некотором навыке замена функции через u обычно происходит устно.

$$J = \int u^{\frac{1}{3}}du = \frac{u^{\frac{4}{3}}}{4/3} + C = \frac{(\operatorname{arctg} x)^{\frac{4}{3}}}{4/3} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x} + C\,.$$

Ответ: $\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{\operatorname{arctg}^4 x} + C$.

3. $\displaystyle J = \int \frac{e^x}{\sqrt[4]{e^x+1}}dx = \int \frac{d(e^x)}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \int (e^x+1)^{-\frac{1}{4}} d(e^x+1) = \begin{vmatrix}\text{Пусть}\\ u = e^x+1\end{vmatrix} = \int u^{-\frac{1}{4}}du = \frac{u^{-\frac{1}{4}+1}}{3/4} =$

$= \dfrac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{4}} + C$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{4}} + C$.

2.2. Интегрирование по частям

Метод опирается на равенство

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Для применения этого метода подынтегральное выражение следует представить в виде произведения одной функции на дифференциал другой функции. При этом целесообразно в качестве u выбирать функцию, упрощающуюся при дифференцировании ($\ln x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$).

Интегрированием по частям легко решаются интегралы вида:

1. $\int x^n \ln x \, dx$,	$u = \ln x$;	4. $\int x^n \operatorname{arctg} x \, dx$,	$u = \operatorname{arctg} x$;
2. $\int x^n \arcsin x \, dx$,	$u = \arcsin x$;	5. $\int x^n e^x \, dx$,	$u = x^n$;
3. $\int x^n \sin x \, dx$,	$u = x^n$;	6. $\int x^n \cos x \, dx$,	$u = x^n$.

Задача 13(б). Найти неопределенный интеграл $\int x^2 e^{3x} \, dx$.

Решение. Все интегралы вычисляются с помощью интегрирования по частям:

$$J = \int x^2 e^{3x} \, dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, & dv = e^{3x} dx \\ du = 2x dx, & v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} e^{3x} \end{matrix} \right| = x^2 \frac{1}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} 2x dx =$$

$$= \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} \, dx .$$

Для вычисления интеграла $\int x e^{3x} \, dx$ применим еще раз интегрирование по частям: $\int x e^{3x} \, dx = \left| \begin{matrix} u = x, & dv = e^{3x} dx \\ du = dx, & v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{matrix} \right| = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{x}{3} e^{3x} - \frac{e^{3x}}{9} + C .$

Тогда $J = \frac{x^2}{3} e^{3x} - \frac{2x}{9} e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x} + C = e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) + C .$

Ответ: $e^{3x} \left(\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{9} + \frac{2}{27} \right) + C .$

2.3. Указания к решению задач 1) в, г,

В предлагаемой литературе, приведенной в контрольном задании, подробно рассмотрены основные классы интегрируемых функций. Изучите примеры и методы их интегрирования.

В задаче 13(в) представлены интегралы вида:

1. $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$,	3. $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$,
2. $\int \frac{mx + n}{ax^2 + bx + c} dx$,	4. $\int \frac{mx + n}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$,

которые легко свести к одному из табличных интегралов №16 - 21. Для этого необходимо уметь выделять полный квадрат из квадратного трехчлена:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Задача 13 (в). Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x-1}}dx$.

Решение. Выделим полный квадрат: $x^2 + 4x - 1 = (x + 2)^2 - 5$.

$$\int \frac{x+4}{\sqrt{x^2+4x-1}}dx = \int \frac{x+4}{\sqrt{(x+2)^2-5}}dx = \left|\begin{matrix} x+2=t, \\ dx=dt \end{matrix}\right| = \int \frac{t+2}{\sqrt{t^2-5}}dt =$$

$$= \int \frac{tdt}{\sqrt{t^2-5}} + 2\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-5}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2-5)}{\sqrt{t^2-5}} + 2\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right| = \sqrt{t^2-5} + 2\ln\left|t+\sqrt{t^2-5}\right| + C =$$

$$= \sqrt{x^2+4x-1} + 2\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x-1}\right| + C.$$

Задача 13(г). Найти неопределенный интеграл $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx$.

Решение. В задаче 13(г) используется схема интегрирования рациональных дробей. Дробь $\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}$ рациональная, правильная (степень числителя меньше степени знаменателя), поэтому ее можно представить в виде суммы простейших дробей, а именно:

$$\frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{x^2-3x+2}{x(x+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}.$$

Приводя правую часть к общему знаменателю и приравнивая числители, получим тождество:

$x^2 - 3x + 2 = A(x^2 + 2x + 1) + B(x^2 + x) + Cx$,

$x^2 - 3x + 2 = (A + B)x^2 + (2A + B + C)x + A$.

Коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества должны быть равны, поэтому получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=1, \\ 2A+B+C=-3, \\ A=2, \end{cases}$$

откуда $A = 2$, $B = -1$, $C = -6$.

Прием, с помощью которого найдены неизвестные A, B, C, называется способом сравнения коэффициентов.

Для определения коэффициентов часто бывает удобнее применить способ частных значений, состоящий в том, что после приравнивания числителей аргументам x придают некоторые удобные значения (читайте литературу).

Итак, $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{-6}{(x+1)^2}dx =$

$$=2\int\frac{dx}{x}-\int\frac{d(x+1)}{x+1}-6\int(x+1)^{-2}d(x+1)=2\ln|x|-\ln|x+1|+\frac{6}{x+1}+C.$$

Ответ: $2\ln|x|-\ln|x+1|+\dfrac{6}{x+1}+C$.

Задача 13(д). Найти неопределенный интеграл $J=\int\dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx$.

Решение. В задаче 13(д) представлен интеграл, который надлежащей заменой переменной может быть сведен к интегралам от рациональных функций.

Так как $\sqrt{x+3}=(x+3)^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{x+3}=(x+3)^{\frac{1}{3}}$, то наименьший общий знаменатель равен 6. Следовательно, сделаем замену:

$x+3=t^6$, $x=t^6-3$, $dx=6t^5dt$, $t=\sqrt[6]{x+3}$.

Тогда $J=\int\dfrac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}}dx=\int\dfrac{\sqrt{t^6}}{1+\sqrt[3]{t^6}}\cdot 6t^5dt=6\int\dfrac{t^8}{1+t^2}dt$.

Дробь $\dfrac{t^8}{1+t^2}$ рациональная, неправильная (степень числителя больше степени знаменателя), поэтому выделим целую часть:

$$\begin{array}{l|l}
-\ t^8 & t^2+1 \\
\ \ \underline{t^8+t^6} & \overline{t^6-t^4+t^2-1} \\
\qquad -\ -t^6 & \\
\qquad\ \ \underline{-t^6-t^4} & \\
\qquad\qquad -\ t^4 & \\
\qquad\qquad\ \ \underline{t^4+t^2} & \\
\qquad\qquad\qquad -\ -t^2 & \\
\qquad\qquad\qquad\ \ \underline{-t^2-1} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \text{ – остаток} &
\end{array}$$

$$\frac{t^8}{1+t^2}=t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}.$$

$$J=6\int\frac{t^8}{1+t^2}dt=6\int\left(t^6-t^4+t^2-1+\frac{1}{t^2+1}\right)dt=6\int t^6dt-6\int t^4dt+6\int t^2dt-6\int dt+$$

$$+6\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{6t^7}{7}-\frac{6t^5}{5}+\frac{6t^3}{3}-6t+6\operatorname{arctg}t+C.$$

Перейдем к аргументу x:

$$J=\frac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^7}{7}-\frac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^5}{5}+2\left(\sqrt{x+3}\right)-6\cdot\sqrt[6]{x+3}+6\operatorname{arctg}(x+3)+C.$$

Ответ: $\dfrac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^7}{7}-\dfrac{6\left(\sqrt[6]{x+3}\right)^5}{5}+2\left(\sqrt{x+3}\right)-6\cdot\sqrt[6]{x+3}+6\operatorname{arctg}(x+3)+C$.

В **задаче 13(е)** рассматриваются интегралы вида

$\int R(\sin x; \cos x)\, dx$, где $R(\sin x; \cos x)$ - рациональная функция от $\sin x$ и $\cos x$.

С помощью универсальной подстановки $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ интеграл сводится к интегралу от рациональной дроби нового аргумента *t*. При такой подстановке:

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Замечание. Универсальная подстановка $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$ нередко приводит к сложным выкладкам, поэтому изучите частные подстановки (читайте предлагаемую литературу).

Задача 13(е). Найти неопределенный интеграл $J = \int \frac{dx}{3\sin x - 5\cos x + 4}$.

Решение. Используем универсальную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, тогда

$$J = \int \frac{dx}{4\sin x - 5\cos x - 1} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4 \cdot \frac{2t}{1+t^2} - 5 \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} - 1} = \int \frac{2dt}{8t - 5 + 5t^2 - 1 - t^2} =$$

$$= \int \frac{2dt}{4t^2 + 8t - 6} = \frac{2}{4}\int \frac{dt}{t^2 + 2t - \frac{3}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{(t+1)^2 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{t + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}\right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{2t + 2 - \sqrt{2}}{2t + 2 + \sqrt{2}}\right| + C.$$

Перейдем к переменной *x*: $\qquad J = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{2}}\right| + C.$

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{2}}\right| + C.$

§3. Определенный интеграл

Приступая к изучению этой темы, необходимо усвоить определение и основные свойства определенного интеграла.

При вычислении определенного интеграла используют формулу **Ньютона – Лейбница**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная функция $f(x)$.

Методы вычисления определенных интегралов:

1. Замена переменной осуществляется по формуле

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt,$$

где $x = \varphi(x)$; $a = \varphi(\alpha)$; $b = \varphi(\beta)$.

Эта формула справедлива, если $f(x)$ – непрерывная функция, а подстановка $x = \varphi(x)$ сама непрерывна на отрезке $[\alpha; \beta]$. Подчеркнем, что при вычислении определенного интеграла методом замены переменной, в отличие от неопределенного интеграла, возврат к старой переменной не требуется.

2. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на $[a; b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu,$$

где символ $uv\Big|_a^b$ обозначает разность $u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

§3. Приложения определенного интеграла

В этой теме предусмотрено применение определенного интеграла для вычисления площадей различных фигур, объемов тел вращения, длин кривых, работы и силы давления.

3.1. Вычисление площади в прямоугольных координатах

а) Если непрерывная кривая задана уравнением $y = f(x)$ $(f(x) \geq 0)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ и осью Ox (рис. 22), вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

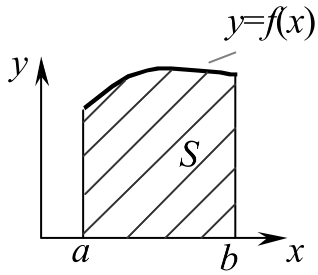


Рис. 22

б) Если криволинейная трапеция ограничена непрерывными кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, причем $y_1(x) \leq y_2(x)$, и прямыми $x = a$, $x = b$ $(a < b)$, то ее площадь вычисляется по формуле $S = \int_a^b \big(y_2(x) - y_1(x)\big)dx$ (рис. 23).

В отдельных случаях какая-либо граница $x = a$ и $x = b$ может выродиться в

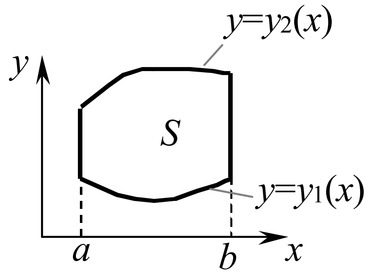


Рис. 23

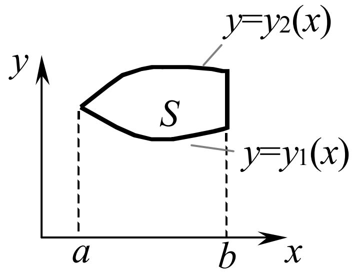


Рис. 24

точку пересечения кривых $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ (рис. 24).

3.2. Параметрически заданная кривая $x = x(t)$, $y = y(t)$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$) и осью Ox, выражается интегралом

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt,$$

где t_1, t_2 определяются из уравнений $a = x(t_1)$ и $b = x(t_2)$.

3.3. Вычисление площади в полярных координатах

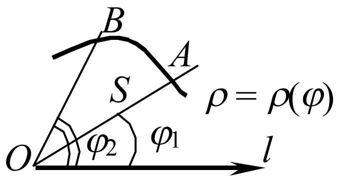


Рис. 25

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то площадь криволинейного сектора OAB (рис. 25) вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi.$$

3.4. Объем тела вращения

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 22),

вычисляется по формуле $V_x = \pi\int_a^b y^2 dx = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной кривой $x = \varphi(y)$, осью ординат и прямыми $y = c$, $y = d$ ($c < d$) (рис. 26), вычисляются по формуле

$$V_y = \pi\int_c^d x^2 dy = \pi\int_c^d \varphi^2(y)dy.$$

Если $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями

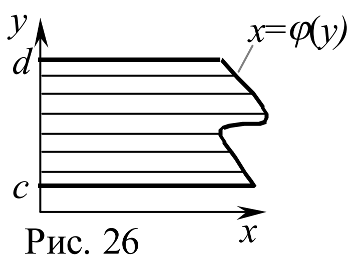


Рис. 26

$x = x(t)$, $y = y(t)$, то формула принимает вид

$$V_x = \pi \int_{t_1}^{t_2} y^2(t)x'(t)dt,$$

где t_1 и t_2 находятся из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$.

3.5. Длина плоских кривых

Если плоская кривая задана уравнением $y = y(x)$ и производная $y'(x)$ непрерывна, то длина дуги этой кривой выражается интегралом

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx,$$

где a и b – абсциссы концов дуги.

1. Если кривая задана уравнениями вида $x = g(y)$, то

$$l = \int_c^d \sqrt{1 + (x')^2}\,dy,$$

где c и d ($c < d$) – ординаты концов дуги.

2. Если кривая задана в параметрической форме $x = x(t)$, $y = y(t)$ и производные $x'(t)$, $y'(t)$ непрерывны на отрезке $[t_1; t_2]$, то длина дуги кривой выражается интегралом

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt,$$

где t_1, t_2 – значения параметра t, соответствующие концам дуги ($t_1 < t_2$).

3. Если гладкая кривая задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ (см. рис. 25) в полярных координатах, то длина дуги l кривой выражается интегралом

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 – значения полярного угла φ в концах дуги ($\varphi_1 < \varphi_2$).

3.6. Физическое приложение

1) **Общая схема применения определенного интеграла**

Пусть требуется найти некоторую физическую величину Q, имеющую определенное значение на отрезке $[a, b]$. Предполагается, что Q является аддитивной величиной, т. е. если отрезок $[a, b]$ делится на части, то величина Q складывается из суммы значений Q, соответствующих этим частям. Из условия задачи находят «элемент» dQ величины Q, отвечающий «элементарному» промежутку $[x, x + dx]$ в виде $dQ = q(x)dx$. После этого, интегрируя по отрезку $[a, b]$, получают величину $Q = \int_a^b q(x)dx$.

2) **Путь, пройденный точкой**.

Пусть точка движется по прямой с переменной скоростью $v = v(t)$. Определить путь, пройденный точкой от момента времени t_1 до момента t_2.

Решение. За элементарный промежуток времени $[t, t + dt]$ точка пройдет путь

$dS = v(t)dt$, где dS – «элемент пути» и $S = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)dt$.

3)**Работа силы**.

Пусть материальная точка движется вдоль оси Ox от точки $x = a$ до точки $x = b$ $(a < b)$ под действием переменной силы $F = F(x)$, причем направление силы совпадает с направлением движения. Найти работу, произведенную силой при этом перемещении.

Решение. На элементарном перемещении $[x, x + dx]$ работа силы равна

$dA = F(x)dx$. Мы получили «элементарную» работу dA, $A = \int\limits_a^b F(x)dx$.

4) **Сила давления жидкости на пластину** выражается формулой

$$P = \rho g \int\limits_{x_0}^{x_1} xy(x)dx,$$

где x_0 – глубина, на которой находится самая верхняя точка пластинки; x_1 – глубина, на которой находится самая нижняя ее точка; ρ - удельная плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; x – расстояние точек пластинки до уровня жидкости; $y(x)$ – длина горизонтального сечения пластинки (это неизвестная функция, зависящая от формы пластинки).

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями

$$yx = 5, \quad y + x = 6.$$

Решение. Построим данную фигуру: $y = \dfrac{5}{x}$ - гипербола, $y = 6 - x$ – прямая (рис. 27).

Найдем абсциссы точек пересечения прямой и гиперболы, решив систему уравнений $\begin{cases} y = \dfrac{5}{x}, \\ y = 6 - x \end{cases} \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 1.$

Искомая площадь равна:

$$S = \int\limits_1^5 \left(6 - x - \frac{5}{x}\right)dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - 5\ln|x|\right)\Bigg|_1^5 =$$

$$\left(6 \cdot 5 - \frac{5^2}{2} - 5\ln 5\right) - \left(6 \cdot 1 - \frac{1^2}{2} - 5\ln 1\right) = 12 - 5\ln 5.$$

Ответ: $S = 12 - 5\ln 5$ ($ед^2$).

Пример2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\rho = \cos\varphi, \quad \rho = \sin\varphi.$$

Решение. Уравнения в полярных координатах $\rho = \cos\varphi$ и $\rho = \sin\varphi$ являются окружностями (рис. 28). Кривые, заданные в полярных координатах, можно строить по точкам с помощью ЭВМ. Основные кривые рассматриваются в предлагаемой литературе.

Очевидно, что $S_1 = S_2 \Rightarrow S = 2S_1$. Площадь криволинейного сектора можно найти по формуле $S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

$$\begin{cases} \rho = \cos\varphi, \\ \rho = \sin\varphi \end{cases} \Rightarrow \cos\varphi = \sin\varphi,\ \mathrm{tg}\varphi = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in Z.$$

Уравнение луча OA: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

$$S = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2\varphi}{2} d\varphi = \left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{\pi - 2}{8}.$$

Ответ: $S = \dfrac{\pi - 2}{8}$.

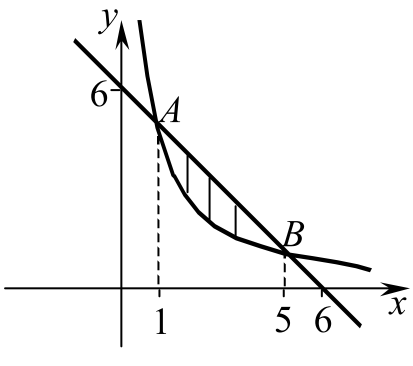


Рис. 27

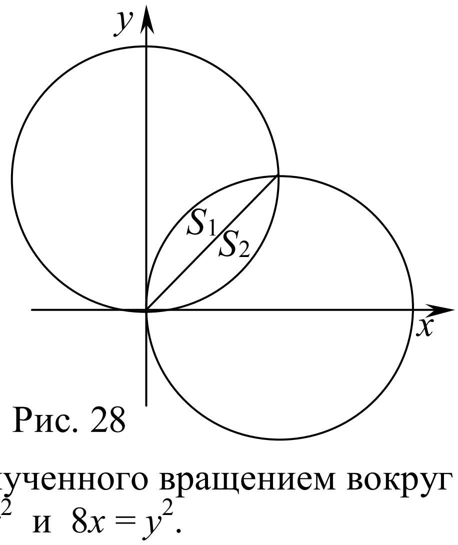


Рис. 28

Пример 3. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$ и $8x = y^2$.

Решение. Очевидно, что $V = V_1 - V_2$, где V_1 – объем тела, полученный вращением трапеции $OABC$, V_2 – объем тела, полученный вращением трапеции $ODBC$ (рис. 29).

Найдем ординаты точек пересечения парабол:

$$\begin{cases} y = x^2, \\ 8x = y^2 \end{cases} \Rightarrow \; y_1 = 0, y_2 = 4\,.$$

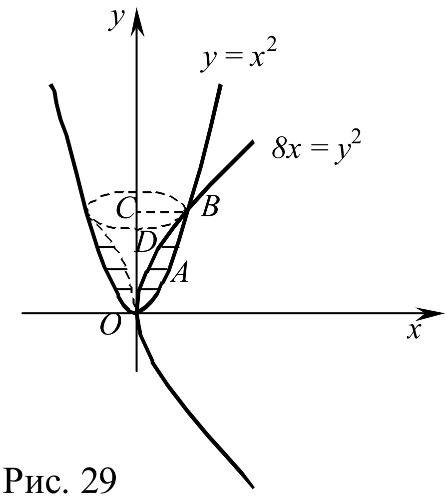


Рис. 29

Уравнение параболы $y = x^2$ (кривая OAB) запишем в виде $x = \sqrt{y}$, тогда

$$V_1 = \pi\int_0^4 \left(\sqrt{y}\right)^2 dy = \pi\int_0^4 y dy = \pi\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4 = 8\pi\,,$$

$$V_2 = \pi\int_0^4 \left(\frac{y^2}{8}\right)^2 dy = \pi\int_0^4 \frac{y^4}{64}dy = \pi\left.\frac{y^5}{5\cdot 64}\right|_0^4 = \pi\frac{16}{5}\,.$$

Следовательно, $V = 8\pi - \frac{16\pi}{5} = \frac{24\pi}{5}$.

Ответ: $4{,}8\pi$.

Пример 4. Вычислить объем тела, которое получается от вращения фигуры, ограниченной кардиоидой $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

Решение. Искомый объем представляет собой разность объемов, получаемых от вращения вокруг оси Ox (она же и полярная ось) фигуры $MNKLO$ и OKL (рис. 30).

Перейдем к параметрическому заданию кривой, приняв за параметр полярный угол φ: $x = \rho\cos\varphi = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi = a(1 + \cos\varphi)\sin\varphi$.

Очевидно, что абсцисса точки M равна $2a$ (значение x при $\varphi = 0$). Абсцисса точки K есть значение минимума функции $x = a(1 + \cos\varphi)\cos\varphi$.

Найдем этот минимум: $\frac{dx}{d\varphi} = a(-\sin\varphi - 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi)$, $a\sin\varphi(1 + 2\cos\varphi) = 0$,

$\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \arccos(-0{,}5) = 2\pi/3$. При $\varphi_1 = 0$, $x = 2a$, при $\varphi_2 = 2\pi/3$ получаем $x = -a/4$.

Координаты точки $L(-a/4, 0)$. Следовательно, искомый объем

$$V = \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{2a} y^2(x)dx - \pi\int_{-\frac{a}{4}}^{0} y^2(x)dx = \pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{0} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\cdot(-a\sin\varphi)(1+2\cos\varphi)d\varphi -$$

$$-\pi\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2\sin^2\varphi\cdot(-a\sin\varphi)(1+2\cos\varphi)d\varphi =$$

$$= \pi a^3\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^2\sin^3\varphi(1+2\cos\varphi)d\varphi = \begin{vmatrix} t = \cos\varphi, & \varphi = 0 \Rightarrow t = 1; \\ dt = -\sin\varphi d\varphi, & \varphi = \pi \Rightarrow t = -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \pi a^3\int_{-1}^{1}(1-t)^2(1+t)^3(1+2t)dt = \frac{8}{3}\pi a^3\,.$$

Ответ: $\frac{8}{3}\pi a^3$.

Пример 5. Найти силу давления, испытываемую пластиной с одной стороны в форме полукруга радиуса r, погруженного в жидкость так, что диаметр совпадает с поверхностью жидкости.

Решение. Вычислим силу давления, испытываемую «элементом» пластины $ABCD$ на глубине x ($0 \le x \le r$):

$$dP = \rho gxdS,$$

где dS – площадь элемента пластины $ABCD$ (рис. 31), $dS = AB\cdot dx$.

Из ΔAOK по теореме Пифагора находим:

$$AK = \sqrt{r^2 - x^2}\,,\; AB = 2AK = 2\sqrt{r^2 - x^2}\,.$$

Тогда $dS = 2\sqrt{r^2 - x^2}dx$, $dP = 2\rho gx\sqrt{r^2 - x^2}dx$.

Вычислим силу давления на пластину:

$$P = \int_0^r 2\rho gx\sqrt{r^2 - x^2}dx = -\rho g\int_0^r \left(r^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}} d\left(r^2 - x^2\right) = -\frac{2\rho g}{3}\left(r^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^r = \frac{2}{3}\rho gr^3$$

Ответ: $\frac{2}{3}\rho gr^3$.

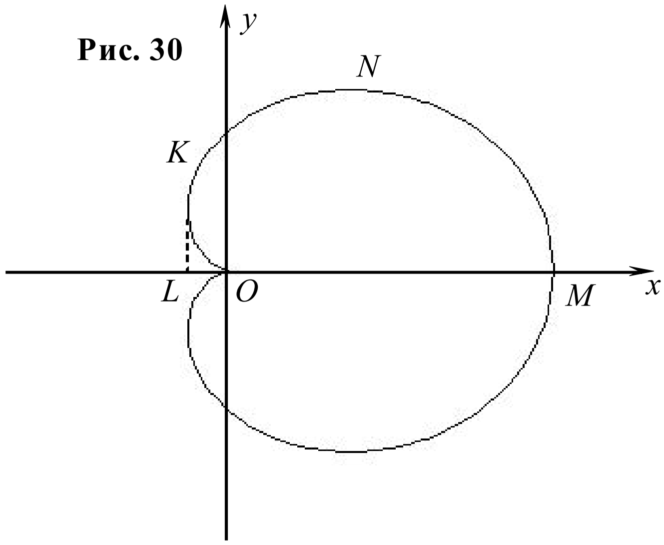


Рис. 30

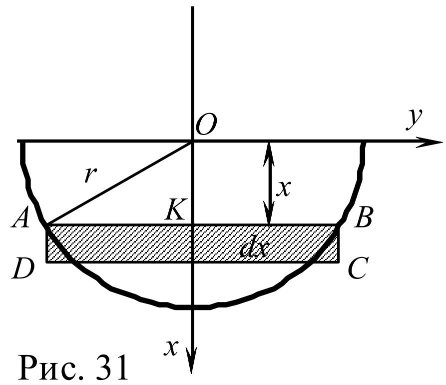


Рис. 31

Методические указания к выполнению контрольной работы № 2: «*Дифференциальные уравнения*»

Глава 1. Дифференциальные уравнения первого порядка

§1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные $y', y'', \ldots \mathrm{y}^{(\mathrm{n})}$.

Символически дифференциальное уравнение можно написать так:

$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$, или $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0$.

Неизвестной здесь является функция y, входящая под знак производных (или дифференциалов).

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным.**

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Например, уравнение $x^3 y' - 4xy^2 = y^3$ есть уравнение первого порядка, а уравнение $y'' - \frac{1}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = x^2$ - уравнение второго порядка.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Решение $F(x, y) = 0$, заданное в неявном виде, называется интегралом дифференциального уравнения.

График дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Общим решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция

$y = \varphi(x, y, C_1, C_2 \ldots, C_n)$, зависящая от x и n произвольных независимых постоянных C_1, C_2, … , Cn, обращающая это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots C_n) = 0$ называется **общим интегралом**.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным.

Частным интегралом называется интеграл, полученный из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным.

§2. Уравнения с разделяющимися переменными

Если дифференциальное уравнение первого порядка можно привести к виду $M_1(x) \cdot N_1(y) dx + M_2(x) \cdot N_2(y) dy = 0$, где множители $M_1(x)$ и $M_2(x)$ зависят только от переменной x, а множители $N_1(y)$ и $N_2(y)$ зависят только от переменной y, то оно называется **уравнением с разделяющимися переменными.**

Это уравнение решается путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y) \cdot M_2(x)$:

$$\frac{M_1(x)\cdot N_1(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}dx+\frac{M_2(x)\cdot N_2(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}dy=0 \quad \text{или} \quad \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0.$$

Общий интеграл полученного уравнения имеет вид

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C.$$

Пример. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$y'=\frac{1+y^2}{(2x-6)y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{(2x-6)y}.$$

Решение. Разделим переменные $\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{dx}{2x-6}$ и интегрируем

$\int\frac{y}{1+y^2}dy=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-3}$. В результате вычисления интегралов получим:

$\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|=\frac{1}{2}\ln|x-3|+C_1$. Это выражение можно записать в иной форме:

$\frac{1}{2}\ln\left|1+y^2\right|=\frac{1}{2}\ln|x-3|+\ln C$, т.к. всякое число можно представить в виде логарифма другого.

Таким образом, общий интеграл данного уравнения будет иметь вид

$$\frac{1+y^2}{x-3}=C^2 .$$

§3. Однородные уравнения первого порядка

Рассмотрим сначала понятие однородной функции двух переменных.

Функция двух переменных $f(x,y)$ называется **однородной функцией измерения** n, если при любом t справедливо тождество $f(tx,ty)=t^n f(x,y)$.

Пример. Функция $f(x,y)=x^2-3xy+5y^2$ есть однородная функция второго измерения, т.к.

$f(tx,ty)=(tx)^2-3txty+5(ty)^2=t^2\left(x^2-3xy+5y^2\right)=t^2 f(x,y)$.

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения.

Уравнение $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка**, если функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения.

Однородные дифференциальные уравнения решаются введением новой переменной U по формуле $U=\frac{y}{x}$ или $y=Ux$, при этом $dy=Udx+xdU$.

После подстановки данное однородное уравнение будет являться уравнением с разделяющимися переменными x и U; из него определяется U, а из формулы $y=Ux$ искомая функция y.

Пример. Решить уравнение $\left(y^2-3x^2\right)dx+2xydy=0$, если $y=0$ при $x=0$.

Решение. Здесь $M(x,y)=y^2-3x^2$ и $N(x,y)=2xy$ - однородные функции второго измерения. Применим подстановку $y=Ux$, при этом $dy=Udx+xdU$. Получим: $\left(U^2x^2-3x^2\right)dx+2x^2(Udx+xdU)=0$, или $x^2\left(U^2-3\right)dx+2x^2U(Udx+xdU)=0$. Сгруппируем слагаемые относительно dx и dU: $3\left(U^2-1\right)dx+2UxdU=0$. Разделим переменные:

$$\frac{3}{x}dx+\frac{2UdU}{U^2-1}=0,\quad 3\int\frac{dx}{x}+\int\frac{d\left(U^2-1\right)}{U^2-1}=C_1,$$

$3\ln|x|+\ln\left|U^2-1\right|=\ln C,\quad \ln\left|x^3\left(U^2-1\right)\right|=\ln C,\quad x^3\left(U^2-1\right)=C$. Так как $U=\dfrac{y}{x}$,

то $x^3\left(\dfrac{y^2}{x^2}-1\right)=C,\quad x\left(y^2-x^2\right)=C$ - общий интеграл. Используя начальные условия $y(0)=0$ имеем $0\left(0^2-0^2\right)=C,\ \Rightarrow\ C=0$. Тогда $x\left(y^2-x^2\right)=0$ и $y=\pm x$ - частное решение данного уравнения.

§4. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение $y'+py=q$, где $p=p(x)$ и $q=q(x)$ - заданные непрерывные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Если функция $q(x)$, стоящая в правой части уравнения, тождественно равна нулю, т.е. $q(x)=0$, то уравнение называется **линейным однородным**, в противном случае – **линейным неоднородным**.

Таким образом, $y'+py=0$ - линейное однородное уравнение, а $y'+py=q$ - линейное неоднородное уравнение.

Рассмотрим два метода интегрирования линейных уравнений.

I метод. Для решения уравнения применяют подстановку $y=UV$, причем функцию $U=U(x)$ считают новой неизвестной функцией, а функцию $V=V(x)$ подчиняют условию: $\dfrac{dV}{dx}+pV=0$. Данная подстановка приводит к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно U и V. Произведение полученных функций даст общее решение линейного уравнения: $y=UV$.

Пример. Решить уравнение $y'-\dfrac{y}{x}=x$.

Решение. Здесь $p=-\frac{1}{x}$, $q=x$. Имеем: $y=UV$, $y'=U'V+V'U$.

$$U'V+V'U-\frac{UV}{x}=x,\ U'V+U\left(V'-\frac{V}{x}\right)=x,\ V\frac{dU}{dx}+U\left(\frac{dV}{dx}-\frac{V}{x}\right)=x,\ \frac{dV}{dx}-\frac{V}{x}=0,$$

$$\frac{dV}{dx}=\frac{V}{x}\ \Rightarrow\ \int\frac{dV}{dx}=\int\frac{dx}{x},\ \ln V=\ln x,\ V=x,\ \frac{xdU}{dx}=x,\ dU=dx,\ U=x+C,$$

$y=UV\ \Rightarrow\ y=x(x+C)$ - общее решение линейного уравнения.

II метод (Метод вариации произвольной постоянной).

В линейном однородном уравнении $y'+py=0$ переменные разделяются и его общее решение, которое мы обозначим через Y, легко находится. Затем находят общее решение неоднородного линейного уравнения $y'+py=q$, считая, что оно имеет такую же форму, как и общее решение соответствующего однородного уравнения Y, но где C есть не постоянная величина, а неизвестная функция от x, т.е. считая, что $y=C(x)$.

Полученное общее решение состоит из двух слагаемых: общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'-\frac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$.

Решение. Интегрируем соответствующее однородное уравнение:
$\frac{dy}{dx}-\frac{2xy}{1+x^2}=0$, $\frac{dy}{y}=\frac{2xdx}{1+x^2}$, $\ln y=\ln\left|1+x^2\right|+\ln C$, $Y=C\left(1+x^2\right)$. Считаем C функцией x: $y=C(x)\left(1+x^2\right)$, $y'=C'(x)\left(1+x^2\right)+C(x)\cdot 2x$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$C'(x)\left(1+x^2\right)+C(x)\cdot 2x-\frac{2xC(x)\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=1+x^2,\ \ C'(x)\left(1+x^2\right)=1+x^2,$$

$$\frac{dC}{dx}=1,\ C=x+C_1,\ \ y=\left(x+C_1\right)\left(1+x^2\right)$$

§5. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y'+py=qy^n$ (здесь $n\neq 0$ и $n\neq 1$).

Это уравнение приводится к линейному с помощью подстановки $y^{-n+1}=z$. Решим линейное уравнение относительно функции z и подставим вместо z выражение y^{-n+1}. Получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Пример. Найти общее решение уравнения $xy'+y=y^2\ln x$.

Решение. Разделив обе части уравнения на y^2, получим: $xy^{-2}y' + \frac{1}{y} = \ln x$.

Введем новую переменную $z = \frac{1}{y}$, тогда $z' = -\frac{1}{y^2}y'$. Подставляя в уравнение, получим: $xz' - z = -\ln x$. Это линейное уравнение относительно функции z. Применим метод вариации произвольной постоянной:

$$xz' - z = 0,\quad x\frac{dz}{dx} = z,\quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},\quad \ln z = \ln x + \ln C,\quad Z = Cx,\quad z = C(x)x,$$

$$z' = C'(x)x + C(x),\quad x\left[C'(x)x + C(x)\right] - C(x)x = -\ln x,\quad x^2C'(x) = -\ln x,$$

$$x^2\frac{dC}{dx} = -\ln x,\quad dC = -\frac{\ln x}{x^2}dx,\quad C = -\int\frac{\ln x}{x^2}dx + C_1.$$

Интегрируя по частям, находим

$\int\frac{\ln x}{x^2dx} = -\frac{1}{x}\ln x + \int\frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + C_1$, следовательно,

$C = \frac{1}{x}(\ln x + 1) + C_1$, а $z = \ln x + 1 + C_1x$. Заменяя теперь z на $\frac{1}{y}$, получим:

$\frac{1}{y} = \ln x + 1 + C_1x$ или $y = \frac{1}{C_1x + \ln x + 1}$. Это и есть общее решение исходного уравнения.

Глава 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

§1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Решение данного уравнения получается последовательным интегрированием его левой и правой частей.

Пример. Найти частное решение уравнения $y''' = \sin 2x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1,\ \ y'''(0) = 0$.

Решение: $\int y'''dx = \int\sin 2xdx,\quad y'' = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1,$

$$y' = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1x + C_2,\quad y = \frac{1}{8}\cos 2x + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Это и есть общее решение. Чтобы найти частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, достаточно определить соответствующие значения C_1, C_2, C_3:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} + C_1, \\ 1 = C_2, \\ 0 = \frac{1}{3} + C_3, \end{cases} \quad\Rightarrow\quad C_1 = \frac{1}{2},\quad C_2 = 1,\quad C_3 = -\frac{1}{8}.$$

Таким образом, искомое частное решение имеет вид:

$$y=\frac{1}{8}\cos 2x+\frac{1}{4}x^2+x-\frac{1}{8}.$$

§2. Некоторые типы дифференциальных уравнений второго прядка, приводимые к уравнениям первого порядка

2.1. Уравнения не содержащие *y*

Уравнение вида $y''=f(x,y')$ не содержит явным образом искомой функции y. Порядок такого уравнения может быть понижен с помощью подстановки $y'=p$.

Пример. Решить уравнения $x^3y''+x^2y'=1$.

Решение. Положим $y'=p$, тогда $y''=\dfrac{dp}{dx}$, и мы получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p: $x^3\dfrac{dp}{dx}+x^2p=1$. Это уравнение является линейным. Найдем его общее решение, используя метод вариации произвольной постоянной. $x^3\dfrac{dp}{dx}+x^2p=0$,

$$\frac{dp}{p}=-\frac{dx}{x},\quad \ln p=-\ln x+\ln C,\quad p^*=\frac{C}{x},\quad p^*=\frac{C(x)}{x},\quad \frac{dp}{dx}=\frac{1}{x}\cdot\frac{dC}{dx}-\frac{1}{x^2}C(x),$$

$$x^3\left[\frac{1}{x}\cdot\frac{dC}{dx}-\frac{1}{x^2}C(x)\right]+x^2\frac{C(x)}{x}=1,\quad x^2\frac{dC}{dx}=1,\quad dC=\frac{dx}{x^2},\quad C(x)=-\frac{1}{x}+C_1$$

Итак, $p=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{C_1}{x}$, т.е. $y'=-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{C_1}{x}$. Следовательно,

$$y=\frac{1}{x}+C_1\ln x+C_2.$$

Замечание. Аналогичным способом можно проинтегрировать уравнение $y^{(n)}=f\left(x,y^{(n-1)}\right)$, полагая $y^{(n-1)}=p$.

2.2. Уравнения, не содержащие *x*

Уравнение вида $y''=f(y,y')$ не содержит явным образом независимую переменную x. Порядок этого уравнения также может быть понижен. И в этом случае полагаем $y'=p$, но теперь мы будем считать p функцией от y (а не от x, как прежде).

Пример. Найти частное решение уравнения $y''=\dfrac{1}{3}\sqrt{y}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(1)=0,\quad y'(1)=0$.

Решение. Данное уравнение не содержит x. Положим $y' = p$, рассматривая p как функцию от y. Тогда $y'' = p\frac{dp}{dy}$, и мы получаем уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p: $p\frac{dp}{dy} = \frac{1}{3}\sqrt{y}$. Разделяя переменные, будем иметь: $pdp = \frac{1}{3}\sqrt{y}dy$. Откуда $\frac{p^2}{2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}C_1$ или $p = \pm\frac{2}{3}\sqrt{y^{\frac{3}{2}} + C_1}$, т.е. $y' = \pm\frac{2}{3}\sqrt{y^{\frac{3}{2}} + C_1}$. Здесь мы можем сразу определить значение произвольной постоянной C_1, используя начальные условия: $0 = \pm\frac{2}{3}\sqrt{0 + C_1}$, $C_1 = 0$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = \pm\frac{2}{3}y^{\frac{3}{4}}$.

Разделяя переменные и интегрируя, получим:

$\int y^{-\frac{3}{4}}dy = \pm\frac{2}{3}\int dx$, $4y^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}C_2$ или $y^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{6}(C_2 \pm x)$. Пользуясь тем, что $y(1) = 0$, найдем C_2: $C_2 = 1$. Искомое частное решение запишется: $y^{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{6}(x - 1)$.

2.3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, т.е. уравнение $y'' + py' + qy = 0$, где p и q - постоянные числа.

Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых частных решения в виде $y = e^{kx}$, где $k = Const$.

Подставляя эту функцию и ее производные $y' = ke^{kx}$ и $y'' = k^2e^{kx}$ в рассматриваемое уравнение, получим: $e^{kx}\left(k^2 + pk + q\right) = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, значит $k^2 + pk + q = 0$.

Следовательно, если k будет удовлетворять полученному уравнению, которое называется **характеристическим**, то e^{kx} будет решением исходного уравнения.

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня: обозначим их через k_1 и k_2. При этом

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Здесь возможны следующие случаи:

а) Корни характеристического уравнения действительны и различны.

В этом случае частными решениями будут функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Общим решением уравнения будет $Y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y' - 6y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 6 = 0$. Корни характеристического уравнения: $k_1 = 2,\ \ k_2 = -3$. Общее решение: $Y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}$.

б) Корни характеристического уравнения действительные и равные.

В этом случае мы имеем только одно частное решение $y = e^{kx}$, т.к. $k_1 = k_2 = k$. При этом общее решение будет $Y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$.

Пример. Решить уравнение $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 9 = 0$. Найдем его корни: $k_1 = -3,\ \ k_2 = -3$. Общим решением будет функция $Y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$.

в) Корни характеристического уравнения комплексные.

Так как коэффициенты p и q характеристического уравнения действительные числа, то комплексные корни будут сопряженными. Причем, $k_1 = \alpha + i\beta,\ \ k_2 = \alpha - i\beta$, где $\alpha = \frac{p}{2},\ \ \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$. Общее решение в рассматриваемом случае имеет вид $Y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$.

Пример. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$. Найдем его корни $k_{1,2} = -1 \pm 2i$. Следовательно, общее решение есть $Y = e^{-x}\left(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\right)$. Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. На основании первого условия находим $0 = e^{-0}\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right)$, откуда $C_1 = 0$. Заметив, что $y' = e^{-x} 2C_2 \cos 2x - e^{-x} C_2 \sin 2x$, из второго условия получаем: $1 = 2C_2$, т.е. $C_2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, искомое частное решение есть $y = \frac{1}{2} e^{-x} \sin 2x$.

2.4. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные неоднородные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q - действительные числа.

Общее решение линейного неоднородного уравнения представляется как сумма какого-нибудь частного решения y^* этого уравнения и общего решения Y соответствующего однородного уравнения, т.е. $y = Y + y^*$.

Вид частного y^* решения неоднородного уравнения зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые случаи.

а) $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 \quad (a_2 \neq 0)$. Если $q \neq 0$, то частное решение неоднородного уравнения ищем также в форме квадратного трехчлена: $y^* = A_2x^2 + A_1x + A_0$, где A_2, A_1, A_0 - неопределенные коэффициенты. Если $q = 0$, то частное решение y^* ищем в виде $y^* = x(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда один из корней характеристического уравнения равен нулю, и в виде $y^* = x^2(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда оба корня характеристического уравнения нули. Аналогично обстоит дело, если $f(x)$ - многочлен $P(x)$ произвольной степени.

Пример. Решить уравнение $y'' + y' = 2x + 1$.

Имеем: $k^2 + k = 0,\ \ k_1 = 0,\ \ k_2 = -1,\ \ Y = C_1 + C_2e^{-x}$. Так как ноль – однократный корень характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $y^* = x(A_1x + A_0)$. Отсюда имеем: $y^{*'} = 2A_1x + A_0,\ \ y^{*''} = 2A_1$. Подставляем в исходное уравнение: $2A_1 + 2A_1x + A_0 = 2x + 1$. Искомые коэффициенты будут: $A_1 = 1,\ \ A_0 = -1$. Значит, частное решение будет $y^* = x^2 - x$, а общее решение получается в виде $y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - x$.

б) $f(x) = ae^{bx} \quad (a \neq 0)$. Частное решение ищем в виде $y^* = Ae^{bx}$, где A - неопределенный коэффициент. Если b- корень характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y^* = Axe^{bx}$, когда b - однократный корень, и в виде $y^* = Ax^2e^{bx}$, когда b - двукратный корень. Аналогично будет, если $f(x) = P(x)ae^{bx}$, где $P(x)$ - многочлен.

Пример. Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

Имеем: $k^2 - 2k + 1 = 0,\ \ k_1 = k_2 = 1,\ \ Y = (C_1 + C_2x)e^x$. Так как в характеристическом уравнении корень имеет кратность, равную двум, то частное решение данного уравнения ищем в виде $y^* = Ax^2e^x$. Далее имеем:

$$y^{*'} = Ax(x+2)e^x, \quad y^{*''} = A\left(x^2+4x+2\right)e^x,$$
$$Ae^x\left(x^2+4x+2\right) - 2Axe^x(x+2) + Ax^2e^x = 2e^x, \quad A=1,$$
$$y^* = x^2e^x, \quad y = (C_1 + C_2x)e^x + x^2e^x$$

в) $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ (a и b не нули одновременно). В этом случае частное решение y^* ищем также в форме тригонометрического двучлена $y^* = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, где A и B - неопределенные коэффициенты.

В случае $p=0, \quad q=\omega^2$ (или когда $\pm\omega i$ - корни характеристического уравнения) частное решение исходного уравнения ищем в виде $y^* = x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$.

Пример. Решить уравнение $y'' + y = \cos x$.

Решение. Имеем: $k^2+1=0, \quad k_1 = i, \quad k_2 = -i, \quad Y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Так как $\pm i$ - корни характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $y^* = x(A\cos x + B\sin x)$. Далее имеем:

$$y^{*'} = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$
$$y^{*''} = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x),$$
$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x, \quad A=0, \quad B=\frac{1}{2}, \quad y^* = \frac{x}{2}\sin x,$$
$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x.$$

Для рассматриваемых дифференциальных уравнений справедлива так называемая **теорема наложения**, которая позволяет отыскивать частное решение в более сложных случаях.

Теорема. Если y_1 является решением уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$, а y_2 решением уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ есть решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' = 1 + 2e^x - \sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 2k = 0$ имеет корни $k_1 = 0, \quad k_2 = -2$. Следовательно, $Y = C_1 + C_2e^{-2x}$. Находим частное решение y_1^* уравнения $y'' + 2y' = 1$ в виде $y_1^* = Ax$, тогда $y_1^{*'} = A, \quad y_1^{*''} = 0$. Отсюда $0 - 2A = 1, \quad A = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $y_1^* = -\frac{1}{2}x$.

Частное решение y_2^* уравнения $y'' + 2y' = 2e^x$ ищем в форме $y_2^* = Be^x$. Тогда $y_2^{*\prime} = Be^x$, $y_2^{*\prime\prime} = Be^x$. Отсюда $Be^x + 2Be^x = 2e^x$, $3B = 2$, $B = \frac{2}{3}$.

Следовательно, $y_2^* = \frac{2}{3}e^x$.

Наконец, находим частное решение y_3^* уравнения $y'' + 2y' = -\sin x$ в форме $y_3^* = C\cos x + D\sin x$, тогда $y_3^{*\prime} = -C\sin x + D\cos x$, $y_3^{*\prime\prime} = -C\cos x - D\sin x$. Подставляя в уравнение, получим:
$-C\cos x - D\sin x - 2C\sin x + 2D\cos x = -\sin x$. Отсюда имеем:
$\begin{cases} -C + 2D = 0, \\ -D - 2C = -1. \end{cases}$ Значит $C = \frac{2}{5}$, $D = \frac{1}{5}$. Следовательно, $y_3^* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.
По теореме наложения частное решение исходного уравнения будет:
$y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}e^x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$, тогда общее решение

запишется так: $y = C_1 + C_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}e^x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

2.5. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Этот метод применяется для отыскания частного решения y^* линейного неоднородного уравнения, когда известно общее решение соответствующего линейного однородного уравнения. Пусть дано линейное неоднородное уравнение второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$ и пусть общим решением соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ является функция $Y = C_1y_1 + C_2y_2$.

В такой же форме ищется и частное решение y^* линейного неоднородного уравнения, только C_1 и C_2 считаются не произвольными постоянными, а некоторыми, пока неизвестными функциями от x, т.е. полагаем, что $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. Дифференцируя это выражение дважды и подставляя его в исходное уравнение, получим уравнение относительно $C_1(x)$ и $C_2(x)$.

Кроме того, в данном методе полагают, что $C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 = 0$. Два последних уравнения образуют систему двух уравнений с двумя неизвестными $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$.

Интегрируя найденные значения, получим: $C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx$ и $C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx$. При этих значениях $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получим частное решение $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$.

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2+4=0$ имеет корни $k_{1,2}=\pm 2i$. Значит, $Y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. Будем искать частное решение в форме $y^*=C_1(x)\cos 2x+C_2(x)\sin 2x$. $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$ находим, решая систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'\cos 2x+C_2'\sin 2x=0, \\ C_1'(-2\sin 2x)+C_2' 2\cos 2x=\dfrac{1}{\sin 2x}, \end{cases}$$

$$C_1'=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ \dfrac{1}{\sin 2x} & 2\cos 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}}=-\frac{1}{2},\quad C_2'=\frac{\begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & \dfrac{1}{\sin 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix}}=\frac{\cos 2x}{2\sin 2x}.$$

Интегрируя, находим: $C_1=-\dfrac{1}{2}x,\quad C_2=\dfrac{1}{4}\ln\sin 2x$. Следовательно,

$y^*=-\dfrac{1}{2}x\cos 2x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\ln\sin 2x$, а общее решение

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x\ln\sin 2x.$$

§3. Системы дифференциальных уравнений

3.1. Общие определения. Сведение системы к одному дифференциальному уравнению высшего порядка

Системой дифференциальных уравнений называется совокупность уравнений, в каждое из которых входит независимая переменная, искомые функции и их производные.

Решение системы, состоящей из нескольких уравнений с таким же числом неизвестных функций, можно привести к решению дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией.

Нормальная система уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=f_1(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \dfrac{dx_2}{dt}=f_2(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt}=f_n(t,x_1,x_2,\ldots,x_n), \end{cases}$$

как правило, может быть заменена одним дифференциальным уравнением, порядок которого равен порядку системы.

Пример. Найти общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + z. \end{cases}$$

Решение. Продифференцировав первое уравнение по t, заменим производную $\dfrac{dy}{dt}$ ее выражением из второго уравнения: $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} = z$. Продифференцировав полученное уравнение еще раз, заменим производную $\dfrac{dz}{dt}$ ее выражением из третьего уравнения: $\dfrac{d^3x}{dt^3} = \dfrac{dz}{dt} = x - y + z$. Подставляя в последнее уравнение $y = \dfrac{dx}{dt}$ и $z = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, окончательно получим $\dfrac{d^3x}{dt^3} - \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{dx}{dt} - x = 0$. Решим это уравнение. Соответствующее ему характеристическое уравнение $k^3 - k^2 + k - 1 = (k^2 + 1)(k - 1) = 0$ имеет корни $k_1 = 1, \quad k_{2,3} = \pm i$. Следовательно, $x = C_1e^t + C_2 \cos t + C_3 \sin t$. Функции y и z в соответствии с соотношениями $y = \dfrac{dx}{dt}$ и $z = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ после дифференцирования полученного для x выражения имеют вид: $y = C_1e^t - C_2 \sin t + C_3 \cos t$ и $x = C_1e^t - C_2 \cos t - C_3 \sin t$.

3.2. Решение систем дифференциальных уравнений с помощью характеристического уравнения

Пусть дана однородная система

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1x + b_1y + c_1z, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2x + b_2y + c_2z, \\ \dfrac{dz}{dt} = a_3x + b_3y + c_3z, \end{cases}$$

где a_i, b_i, c_i - постоянные. Будем искать частные решения системы в виде $x = r_1e^{kt}$, $y = r_2e^{kt}$, $z = r_3e^{kt}$, где r_1, r_2, r_3 и k - неопределенные коэффициенты, которые следует найти. Уравнение

$$\begin{vmatrix} a_1 - k & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - k & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - k \end{vmatrix} = 0$$

называется характеристическим уравнением системы. Отыскав корни этого уравнения, и поочередно подставляя их в исходную систему, определим коэффициенты r_1, r_2, r_3.

Пример. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = z, \\ \dfrac{dy}{dt} = -4x - y - 4z, \\ \dfrac{dz}{dt} = -y. \end{cases}$$

Решение. Система в данном случае имеет вид: $\begin{cases} -kr_1 + r_3 = 0, \\ -4r_1 - (1+k)r_2 - 4r_3 = 0, \\ -r_2 - kr_3 = 0. \end{cases}$

Характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -k & 0 & 1 \\ -4 & -(1+k) & -4 \\ 0 & -1 & -k \end{vmatrix} = -k^3 - k^2 + 4k + 4 = (4-k^2)(k+1) = 0$ имеет корни

$k_1 = -1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 2$. Для $k_1 = -1$ $\begin{cases} r_1 + r_3 = 0, \\ -r_2 + r_3 = 0. \end{cases}$ Решением этой системы будут, например, числа $r_1^{(1)} = 1, \quad r_2^{(1)} = -1, \quad r_3^{(1)} = -1$ (здесь $r_1^{(1)}$ выбрано произвольно). Следовательно, $x_1 = e^{-t}, \quad y_1 = -e^{-t}, \quad z_1 = -e^{-t}$. Для $k_1 = -2$ $\begin{cases} 2r_1 + r_3 = 0, \\ -2r_2 + 2r_3 = 0. \end{cases}$ Решая эту систему, получим $r_1^{(2)} = 1, \quad r_2^{(2)} = -4, \quad r_3^{(2)} = -2$; тогда $x_2 = e^{-2t}, \quad y_2 = -4e^{-2t}, \quad z_2 = -2e^{-2t}$. Наконец, для $k_3 = 2$ $\begin{cases} -2r_1 + r_3 = 0, \\ -r_2 - 2r_3 = 0. \end{cases}$ Здесь можно положить $r_1^{(3)} = 1, \quad r_2^{(3)} = -4, \quad r_3^{(3)} = 2$ и будем иметь $x_3 = e^{2t}, \quad y_3 = -4e^{2t}, \quad z_3 = 2e^{2t}$. Общее решение данной системы дифференциальных уравнений таково:

$$x = C_1e^{-t} + C_2e^{-2t} + C_3e^{2t},$$
$$y = -C_1e^{-t} - 4C_2e^{-2t} - 4C_3e^{2t},.$$
$$z = -C_1e^{-t} - 2C_2e^{-2t} + 2C_3e^{2t}.$$

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -7x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x - 5y. \end{cases}$$

Решение. Чаще системы дифференциальных уравнений записывают в виде:

$\begin{cases} x' = -7x + y, \\ y' = -2x - 5y. \end{cases}$ Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -7-k & 1 \\ -2 & -5-k \end{vmatrix} = k^2 + 12k + 37 = 0$ и найдем его корни $k_{1,2} = -6 \pm i$. Так как эти корни комплексные, система уравнений будет иметь комплексные коэффициенты и даст комплексные значения для чисел r_1 и r_2. В этом случае, учитывая возможность произвольного выбора $r_1^{(1)}$ и $r_1^{(2)}$, целесообразно сразу положить $r_1^{(1)} = 1$, $r_1^{(2)} = 1$ и, записав функцию $x = C_1 e^{(-6+i)t} + C_2 e^{(-6-i)t}$ или, что то же самое, $x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$, найти функцию y, используя первое уравнение системы: $y = x' + 7x$. Для этого найдем x': $x' = -6e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-6t}(-C_1 \sin t + C_2 \cos t)$ или $x' = e^{-6t}[C_1(-6\cos t - \sin t) + C_2(\cos t - \sin t)]$. Подставляя x и x' в первое уравнение системы, получим $y = e^{-6t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)]$. Общим решением системы будет $x = e^{-6t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$ и $y = e^{-6t}[C_1(\cos t - \sin t) + C_2(\cos t + \sin t)]$.

§4. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Задачи, решение которых приводится к интегрированию дифференциальных уравнений, содержащих производные или дифференциалы неизвестных функций, весьма разнообразны. В таких задачах ищется функция или зависимость между переменными факторами какого – либо физического, химического или технического процесса, уравнение линии или поверхности.

При решении этих задач вначале составляется дифференциальное уравнение задачи, которое затем решается тем или иным способом в зависимости от его типа.

Пример. Моторная лодка движется со скоростью 18 *км/ч*. Через 5 *мин* после выключения мотора ее скорость уменьшилась до 6 *км/ч*. Найти расстояние, пройденное лодкой по инерции за 15 *мин*, если сопротивление воды пропорционально скорости движения лодки.

Решение. Пусть m – масса лодки, x – путь, пройденный ею за время t, отсчитываемое от момента выключения двигателя, $v = \dfrac{dx}{dt}$ – скорость лодки в момент времени t. Тогда, согласно второму закону Ньютона, дифференциальное уравнение движения лодки будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\frac{dx}{dt} \text{ или } \frac{dv}{dt} = -av, \ a = \frac{k}{m}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим $\dfrac{dv}{v} = -a\,dt$, $\ln v = -at + C_1$.

Исходя из начального условия v = 18 при t = 0, определяем значение постоянной $C_1 = \ln 18$.

Следовательно, $\ln v = -at + \ln 18$, $v = 18e^{-at}$.

Найдем параметр a из условия, что через 5 *мин* = 1/12 *ч* скорость лодки стала 6 *км/ч*: $6 = 18e^{-a/12}$, $a = 12\ln 3$. Следовательно, $v = 18\left(e^{\ln 3}\right)^{-12t} = 18 \cdot 3^{-12t}$.

Т. к. $v = \dfrac{dx}{dt}$, то $dx = 18 \cdot 3^{-12t}\,dt$. Интегрируя, получим $x = -\dfrac{3 \cdot 3^{-12t}}{2\ln 3} + C_2$.

Исходя из начального условия x = 0 при t = 0, определяем значение постоянной $C_2 = \dfrac{3}{2\ln 3}$. Следовательно, $x = \dfrac{3 - 3^{1-12t}}{2\ln 3}$.

За 15 *мин* = 1/4 *ч* лодка пройдет расстояние $x = \dfrac{3 - 3^{-2}}{2\ln 3} = \dfrac{13}{9\ln 3} \approx 1{,}315$ *км*.

Ответ: $x \approx 1315$*м*.

Глава 3. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА,

§1. Числовые поля.

Понятие числа прошло длинный путь исторического развития.

Одним из простейших числовых множеств является множество натуральных чисел **(N) :** 1, 2, 3, 4, 5, … n, …

В нем всегда выполнимы два основных (прямых) алгебраических действия: сложение и умножение. Это означает, что, каковы бы ни были натуральные числа ***m*** и ***n*,** сумма их ***m+n***, а также произведение ***mn*** являются непременно натуральными числами.

При этом соблюдаются следующие пять законов:

1) коммутативный (переместительный) закон сложения:

$$\boldsymbol{m + n = n + m;}$$

2) ассоциативный (сочетательный) закон сложения:

$$\boldsymbol{(m + n) + k = m + (n+ k);}$$

3) коммутативный (переместительный) закон умножения:

$$m \cdot n = n \cdot m;$$

4) ассоциативный (сочетательный) закон умножения:

$$(m \cdot n) \cdot k = m \cdot (n \cdot k)$$

5) дистрибутивный (распределительный) закон умножения относительно сложения:

$$(m + n) \cdot k = m \cdot k + n \cdot k$$

Вычитание и деление в множестве натуральных чисел выполнимы не всегда.

Чтобы действие вычитания было выполнимым всегда, множество натуральных чисел нужно расширить путем присоединения к нему всех отрицательных целых чисел и нуля. В результате мы получим множество всех целых чисел **(Z)**:

…,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, …

Числовое множество, в котором всегда выполнимы сложение и умножение, подчиненные указанным выше пяти законам, а также вычитание, называется кольцом.

Таким образом, множество Z образует кольцо . Чтобы действие деления было всегда выполнимым , множество целых чисел расширили путем присоединения к нему всех обыкновенных дробей, то есть чисел вида $\frac{m}{n}$, где m и n - произвольные целые числа и $n \neq 0$. В результате такого расширения мы получаем множество всех рациональных чисел. Любую обыкновенную дробь можно представить в виде бесконечной периодической дроби, поэтому рациональные числа – это числа, представимые в виде бесконечных периодических десятичных дробей..

Множество чисел, в котором всегда выполнимы действия сложения и умножения, подчиненные пяти основным законам, а также действия вычитания и деления (кроме деления на нуль), называется полем.

Множество рациональных чисел является простейшим числовым полем.

Числа, которые можно представить, в виде бесконечных непериодических десятичных дробей, называются иррациональными (т. е. нерациональными).

Все рациональные и все иррациональные числа, взятые вместе, образуют множество действительных чисел (**R**).

Множество R образует поле. Заметьте, что множество иррациональных чисел поля не образует. Так, например, $\sqrt{2}+\left(-\sqrt{2}\right)=0$, $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2$.

§2. *Комплексные числа.*

Перед математикой встала задача: расширить поле действительных чисел путем присоединения к нему новых чисел так, чтобы расширенное множество образовывало числовое поле, в котором было бы выполнимо действие извлечения корней. Следовательно, расширенное поле должно содержать все действительные числа и в нем должно быть разрешимо уравнение $x^2=-1$ (т. е. выполнимо извлечение корней - обратное действие возведению в степень).

Число, квадрат которого равен – 1, принято обозначать буквой i и называть мнимой единицей: $i^2 = -1$

Новое поле должно содержать все числа вида $a+b\cdot i$, где $a\in R, b\in R$, а i - мнимая единица. Эти числа называются *комплексными числами.*

Число *a* принято называть *действительной частью,* а выражение bi *–мнимой частью* комплексного числа. Число b называется *коэффициентом при мнмой части.*

Два комплексных числа считаются равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях.

Другими словами, $a+bi=c+di$ тогда и только тогда, когда $a=c, b=d$.

Для комплексных чисел соотношения «<,», « >» не имеют смысла.

2.1. Действия с комлексными числами в алгебраической форме.

1. *Суммой* двух комплексных чисел $a+bi$ и $c+di$ называется комплексное число $(a+c)+(b+d)i$:

$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

В поле комплексных чисел роль нуля играет число 0+0i.

Для $\forall a+bi$ (a+bi) + (0+0i) = (a+0) + (b + 0)I = a +bi.

Числа a +bi и -a – bi называются противоположными.

2. *Вычитание* комплексных чисел: $(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$

3. *Умножение* комплексных чисел: $(a+bi)\cdot(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$

4. *Деление* комплексных чисел.

Определение. Частным от деления комплексного числа z_1 на комплексное число z_2 называется такое комплексное число z_3 , которое при умножении на z_2 дает z_1.

Рассмотрим *практический способ деления.*

Комплексное число $a-b\cdot i$ называется *сопряженным* к комплексному числу $a+b\cdot i$ Произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел есть число действительное. Пусть нужно найти частное $\frac{a+bi}{c+di}$, $c+di\neq 0$

Умножим числитель и знаменатель этой дроби на число сопряженное знаменателю. В результате мы получим дробь, знаменатель которой будет действительнымт числом:

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

Степени мнимой единицы i: $i^2 = -1$; $i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$; $i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot (-1) = 1$и т. д.

Примеры. 1. Найти действительные числа x и y из уравнений:

$a)\quad (5x+3yi)+(2y-xi)=3-i$

$b)\quad (2x-5i)-(7y+4xi)=-13+3yi$

2. Вычислить. а) (1+i) +(2+3i) ; б)(4 + 9i) +(-4 +i); в) (5+6i) – (7 -4i); г)(5 +i)(-2 +3i); д)(3 +4i)(6-5i); е) $\frac{4i}{1+i}$; ж)$\frac{2+i}{2-i}$; з) $\frac{3-i}{i}$

2.2. Решение алгебраических уравнений в поле комплексных чисел.

Алгебраическое уравнение **n -**ой имеет вид**:**

$a_n\cdot x^n+a_{n-1}\cdot x^{n-1}+a_{n-2}\cdot x^{n-2}+...+a_1\cdot x+a_0=0$**,** где x – неизвестная величина, а $a_0, a_1, \ldots a_n$ - заданные комплексные числа, причем $a_0 \neq 0$.

В 1799 г. выдающийся немецкий математик Гаусс (1777 – 1855) доказал основную теорему алгебры: любое алгебраическое уравнение **n –й** степени имеет ровно **n** комплексных корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Примеры. Решить уравнения: 1. $x^2 + 16=0$; 2. $x^2 -2x +2 =0$;
3. $x^2 - 14x + 74 = 0$.

Решение**.** **1**. $X^2 = -16$, $X = \pm\sqrt{-16}$, $X = \pm\sqrt{16}\cdot\sqrt{-1} = \pm 4i$. *Отв.*$X = \pm 4i$

2. $X_{1)2)} = \dfrac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 2}}{2} = \dfrac{2\pm\sqrt{-4}}{2} = \dfrac{2\pm 2i}{2} = 1\pm i$. *Отв.*$X = 1\pm i$

3. $X_{1)2)} = 7\pm\sqrt{49-74} = 7\pm\sqrt{-25} = 7\pm 5i$. *Отв.*$x = 7\pm 5i$.

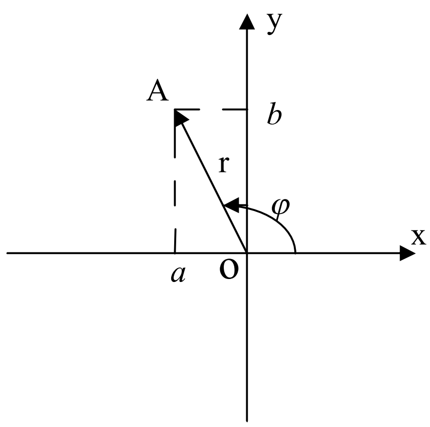
2.3. Тригонометрическая форма комплексных чисел.

Множество всех действительных чисел находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех точек числовой прямой.

Множество всех комплексных чисел находится во взаимном однозначном соответствии с множеством всех точек плоскости. То есть, каждому комплексному числу $a+bi$ соответствует одна определенная точка на плоскости с координатами $(a;b)$ и наоборот.

С каждой точкой плоскости $A(a;b)$ можно связать вектор $\vec{OA}$, выходящий из начала координат и оканчивающийся в точке *A*. Координаты вектора $\vec{OA}$ при этом будут такими же, как и координаты точки *A*. Очевидно**, множество всех комплексных чисел находится во взаимном однозначном соответствии с множеством всех векторов плоскости, выходящих из начала координат.**

Пусть комплексному числу $a+bi$ соответствует вектор $\vec{OA}$ с координатами $(a;b)$ (см рис 32). Обозначим длину вектора $\left|\vec{OA}\right| = r$, а угол, который он образует с осью X, через φ.



По определению синуса и косинуса: $\dfrac{a}{r} = \cos\varphi$, $\dfrac{b}{r} = \sin\varphi$ $\rightarrow$

$a = r\cdot\cos\varphi$, $b = r\cdot\sin\varphi$. Комплексное число $a+bi$ можно записать в виде: $a+bi = r\cdot\cos\varphi + i\cdot r\cdot\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi)$

Итак, любое комплексное число $a+bi$ можно представить в **тригонометрической форме**:

$a+bi=r(\cos\varphi+i\cdot\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{a^2+b^2}$, а угол определяется из условия:

$$\begin{cases}\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases} \quad \text{или} \quad tg\varphi=\frac{b}{a}$$

Число r называется *модулем* $|z|$, а угол φ - *аргументом* $(\arg z)$ комплексного числа $z=a+bi$.

Задачи для самостоятельного решения.

I. Записать комплексные числа в тригонометрической форме:

1) $1+i$, 2) i, 3) 3, 4) $2+2\sqrt{3}\cdot i$, 5) $6-6\cdot i$, 6) $-2i$, 7) -4, 8) $\sqrt{3}-i$

II Комплексные числа изобразить на плоскости, для которых модули r и аргументы φ удовлетворяют условиям:

1) $r=1,\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ 2) r=2 3) $r\le 3$ 4) $r<3$ 5) $2<r<3$ 6) $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$

7) $0<\varphi<\dfrac{\pi}{6}$

2.4. Действия с комплексными числами, заданными в тригонометрической форме.

Пусть даны два комплексных числа: $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и

$z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$

Теорема 1. Модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент – сумме их аргументов.

$$z_1\cdot z_2=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$$

Теорема справедлива для любого числа сомножителей, т. е. при любом n.

В частном случае, когда все сомножители равны между собой, получаем формулу **Муавра**:

$$(r(\cos\varphi+i\sin\varphi))^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

Теорема 3. Модуль частного двух комплексных чисел равен частному модулей делимого и делителя, а аргумент – разности аргументов делимого и делителя.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

Справочный материал.

Формулы сокращенного умножения:

1. $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)}$**,** **2.** $\boldsymbol{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$**,**
3. $\boldsymbol{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$ **,** **4.** $\boldsymbol{(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$**,**
5. $\boldsymbol{(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$ **,** ***6.*** $\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$**,**
7. $\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$**.**

Действия со степенями.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. 2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, 3. $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$.

4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$. 5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$.

Определения. $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Действия со степенями.

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$. 2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, 3. $\left(a^n\right)^m = a^{n\cdot m}$.

4. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$. 5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, b \neq 0$.

Определения. $a^0 = 1$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Свойства арифметических корней ($n, m, k \in \boldsymbol{N}$; $a, b \geq 0$)

1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. 2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $b \neq 0$. 3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$.

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$. 5. $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)\cdot(x - x_2)$, *где* $x_1; x_2$ *– корни трехчлена*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$