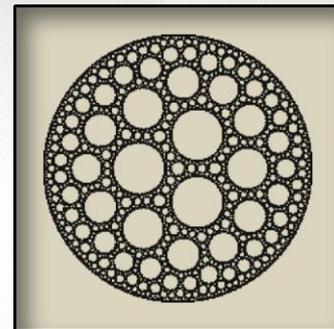


Тройной интеграл



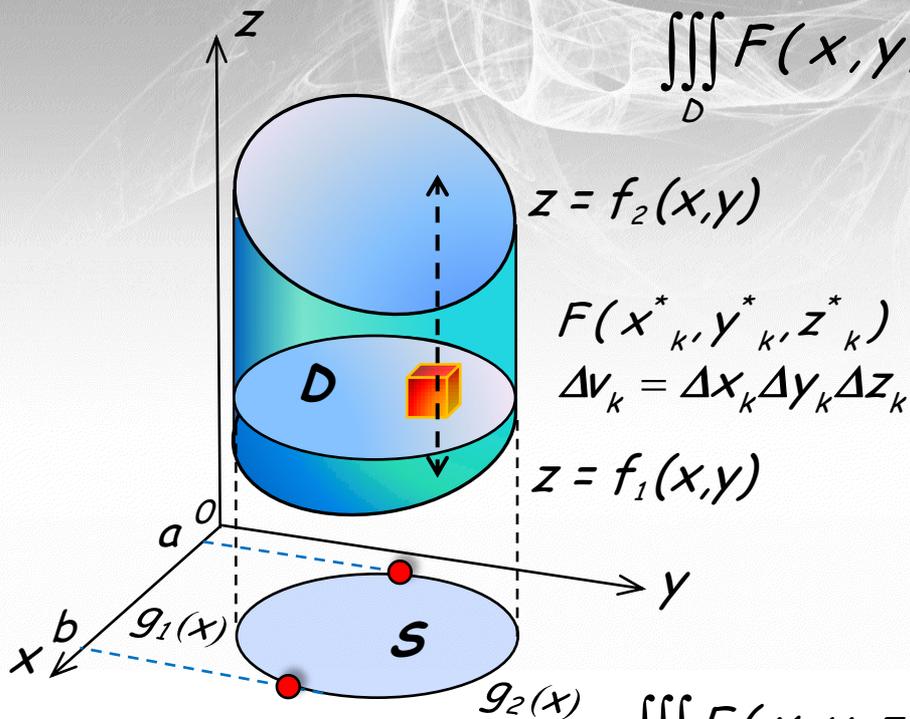
{ тройной интеграл – вычисление - пример – замена переменной в тройном интеграле – якобиан преобразования
– вычисление тройного интеграла в цилиндрической и сферической системах координат – примеры }



Определение и вычисление тройного интеграла

Интегральная сумма Римана

$$\iiint_D F(x, y, z) dv = \lim_{\substack{\max \Delta v_k \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{k=1}^n F(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta v_k$$



Тройной интеграл

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz$$

Вычисление

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} \int_{z=f_1(x,y)}^{z=f_2(x,y)} F(x, y, z) dx dy dz$$



- Масса фигуры ограниченного объема с заданной функцией плотности

$$\iiint_D \rho(x, y, z) dv$$

- Объем ограниченной трехмерной фигуры $\iiint_D dv$

Свойства

$$\iiint_D (aF(x, y, z) + bG(x, y, z)) dv = a \iiint_D F(x, y, z) dv + b \iiint_D G(x, y, z) dv$$

$$\iiint_D F(x, y, z) dv = \iiint_{D_1} F(x, y, z) dv + \iiint_{D_2} F(x, y, z) dv$$

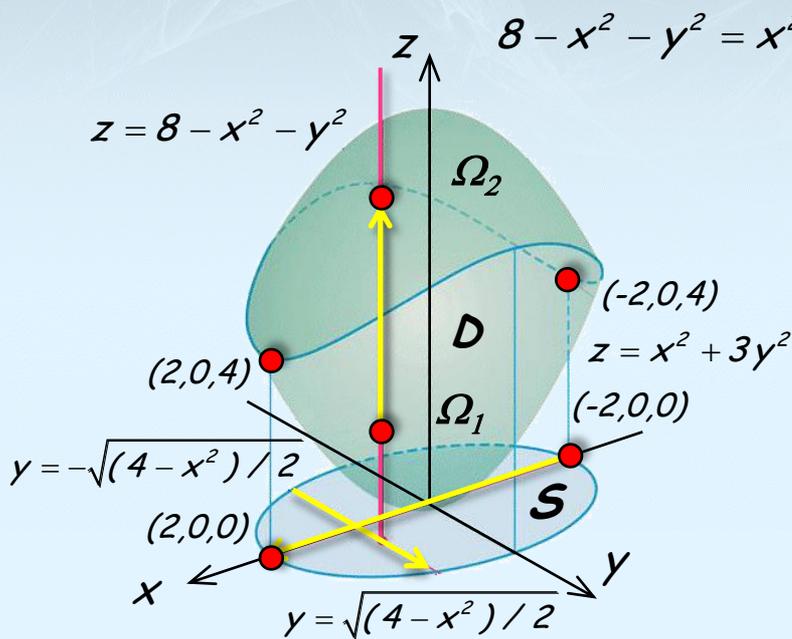
$$D = D_1 \cup D_2$$



@ Найти объем фигуры, ограниченной поверхностями: $\Omega_1: z = x^2 + 3y^2$ $\Omega_2: z = 8 - x^2 - y^2$

Решение

$$8 - x^2 - y^2 = x^2 + 3y^2 \Leftrightarrow x^2 + 2y^2 = 4$$

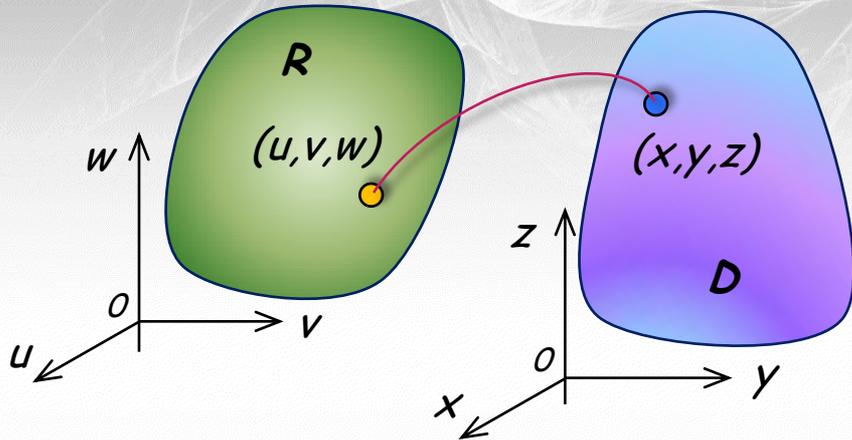


$$\begin{aligned} V_D &= \iiint_D dx dy dz = \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)}/2}^{\sqrt{(4-x^2)}/2} \int_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dx dy dz \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)}/2}^{\sqrt{(4-x^2)}/2} z \Big|_{x^2+3y^2}^{8-x^2-y^2} dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{(4-x^2)}/2}^{\sqrt{(4-x^2)}/2} (8 - 2x^2 - 4y^2) dx dy \\ &= \int_{-2}^2 \left((8 - 2x^2)y - \frac{4}{3}y^3 \right) \Big|_{-\sqrt{(4-x^2)}/2}^{\sqrt{(4-x^2)}/2} dx \\ &= \frac{16}{3\sqrt{2^3}} \int_{-2}^2 \sqrt{(4-x^2)^3} dx = 8\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$



Замена переменных в тройном интеграле

- Замена переменных в тройном интеграле определяется отображением T области R пространства uvw в область D пространства xyz .



- Якобиан преобразования:

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right|$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

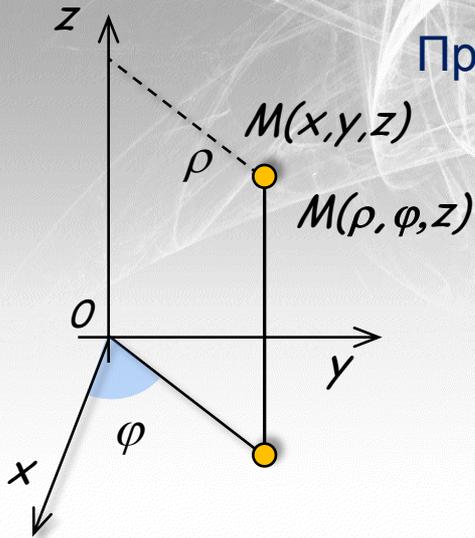
$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| = \left| \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} \right|^{-1}$$

$$\iiint_D F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_R F(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$



Тройной интеграл в цилиндрической системе координат

Преобразование T : отображение области $D: \rho, \varphi, z$ на $C: x, y, z$.



$$T: \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases}$$

Якобиан преобразования: $|J| = \rho$

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho$$

$$\iiint_C F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D F(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

$$\iiint_D F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} \left(\int_{f_1(\rho, \varphi)}^{f_2(\rho, \varphi)} F(\rho, \varphi, z) dz \right) \rho d\rho \right) d\varphi$$



@ Найти пределы интегрирования в тройном интеграле для фигуры, ограниченной поверхностями: плоскостью $z = 0$, цилиндрической поверхностью $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ и параболоидом $z = x^2 + y^2$.

Решение

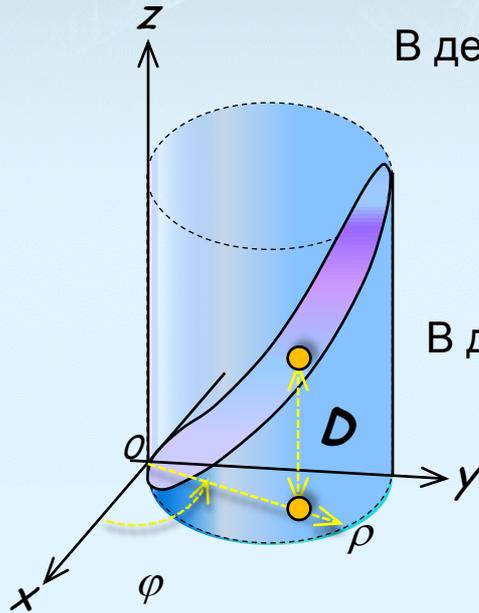
В декартовой системе координат уравнение цилиндра: $x^2 + (y - 1)^2 = 1^2$

$$x^2 + y^2 - 2y = 0 \Rightarrow \rho^2 = 2\rho \sin \varphi \Rightarrow \rho = 2 \sin \varphi$$

В цилиндрической системе координат: $\rho = 2 \sin \varphi$

В декартовой системе координат уравнение параболоида: $z = x^2 + y^2$

В цилиндрической системе координат: $z = \rho^2$

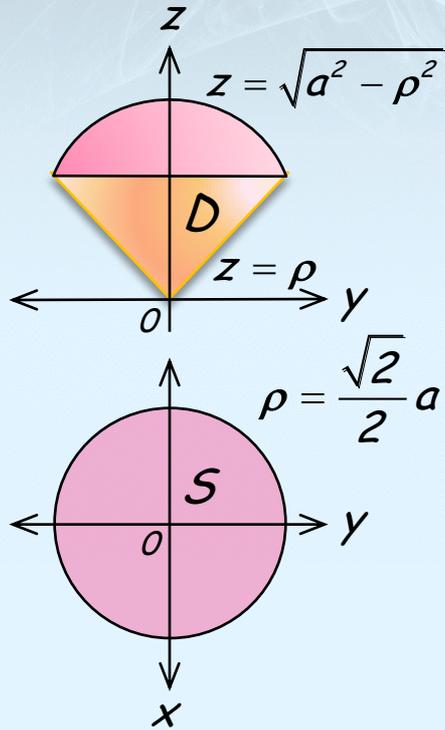


$$\iiint_D F(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{\pi} \int_0^{2 \sin \varphi} \int_0^{\rho^2} F(\rho, \varphi, z) dz \rho d\rho d\varphi$$



@ Найти объем фигуры ограниченной полусферой $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Решение



$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$V_D = \iiint_D \rho d\rho dz d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \left(\int_{\rho}^{\sqrt{a^2 - \rho^2}} dz \right) \rho d\rho \right) d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} \left(\rho \sqrt{a^2 - \rho^2} - \rho^2 \right) d\rho \right) d\varphi = 2\pi \left(\frac{(a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + \frac{\rho^3}{3} \right) \Bigg|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}a} =$$

$$2\pi \left(\frac{a^3 - \frac{a^3}{2\sqrt{2}} - \frac{a^3}{2\sqrt{2}}}{3} \right) = \pi a^3 \frac{(2 - \sqrt{2})}{3}$$



Тройной интеграл в сферической системе координат

Преобразование T : отображение области $D: \rho, \psi, \varphi$ на $C: x, y, z$.

$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

Якобиан преобразования:

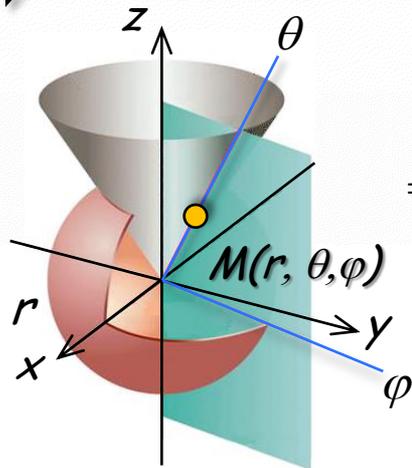
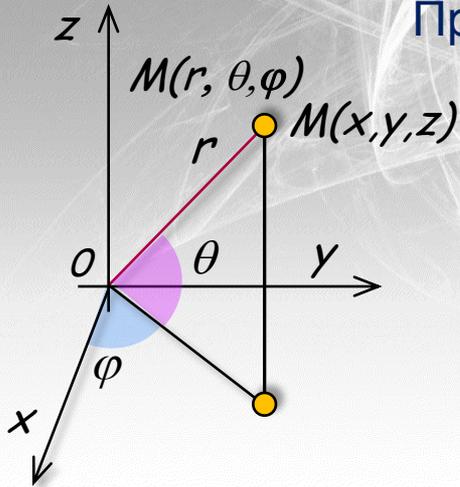
$$|J| = r^2 \cos \theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$|J| = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \end{vmatrix}$$

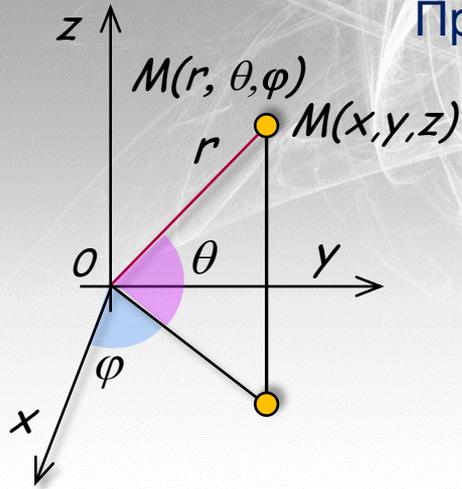
$$= \sin \theta \begin{vmatrix} -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \end{vmatrix} - r \cos \theta \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \left(-r^2 \sin^2 \theta \cos \theta - r^2 \cos^3 \theta \right) = r^2 \cos \theta$$



Тройной интеграл в сферической системе координат

Преобразование T : отражение области $D: \rho, \psi, \varphi$ на $C: x, y, z$.

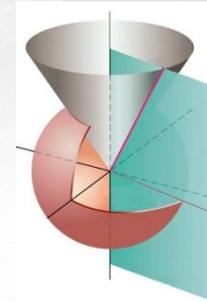


$$T: \begin{cases} x = r \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cos \theta \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

Якобиан преобразования:

$$|J| = r^2 \cos \theta$$

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad r \geq 0$$

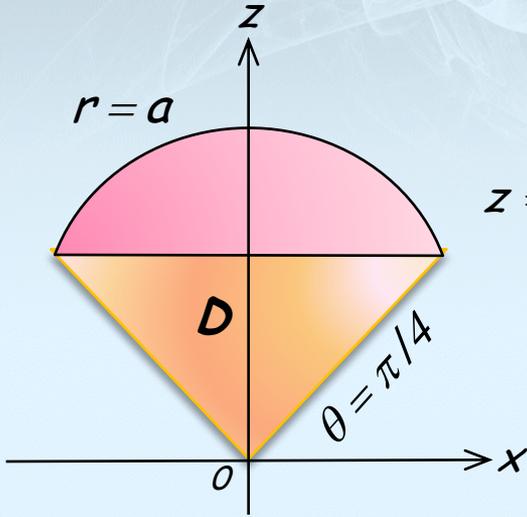


●
$$\iiint_C F(x, y, z) dx dy dz = \iiint_D F(r, \theta, \varphi) r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi$$

$$\iiint_D F(r, \theta, \varphi) r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\vartheta_{min}}^{\vartheta_{max}} \left(\int_{f_1(\varphi, \theta)}^{f_2(\varphi, \theta)} F(r, \theta, \varphi) r^2 dr \right) \cos \theta d\theta \right) d\varphi$$



@ Найти объем фигуры ограниченной полусферой $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ и конусом $z = \sqrt{x^2 + y^2}$



Решение

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

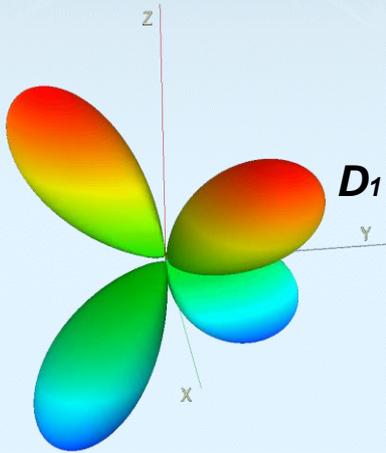
$$V_D = \iiint_D r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r^2 dr \right) \cos \theta d\theta \right) d\varphi =$$

$$\frac{a^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \right) = \frac{2\pi a^3}{3} \sin \theta \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi a^3}{3} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \pi a^3 \frac{(2 - \sqrt{2})}{3}$$



@ Найти объем фигуры, ограниченной поверхностью: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = axyz$

Решение



$$r = a \cos^2 \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi$$

$$V = 4V_{D_1} = 4 \iiint_{D_1} r^2 \cos \theta dr d\theta d\varphi \quad V_{D_1} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_0^{a \cos^2 \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi} r^2 dr$$

$$V_{D_1} = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \left(\frac{(a \cos^2 \theta \sin \theta \cos \varphi \sin \varphi)^3}{3} \right) d\theta = \frac{a^3}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos^7 \theta \sin^3 \theta d\theta$$

$$\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^3 \sin^3 \theta d(\sin \theta) = \int_0^1 (u^3 - 3u^5 + 3u^7 - u^9) du = \frac{u^4}{4} - 3\frac{u^6}{6} + 3\frac{u^8}{8} - \frac{u^{10}}{10} \Big|_0^1 = \frac{1}{40}$$

$$V_{D_1} = \frac{a^3}{3} \frac{1}{40} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi \cos^3 \varphi d\varphi \quad V_{D_1} = \frac{a^3}{120} \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d(\sin \varphi)$$

$$= \frac{a^3}{120} \int_0^1 (u^3 - u^5) du = \frac{a^3}{120} \left(\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} \right) \Big|_0^1 = \frac{a^3}{120} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{a^3}{1440}$$

$$V = 4V_{D_1} = \frac{a^3}{360}$$

