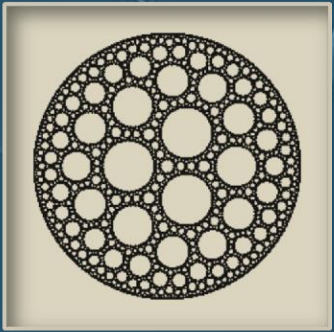
МАТРИЧНАЯ АЛГЕБРА



{ определение – типы матриц – сложение матриц – умножение матриц – свойства операции умножения – умножение матрицы на число – полином от матриц – транспонирование матрицы – примеры }

Определение

- *Матрицей* называется набор $m\ n$ элементов множества $K_{m,n}$, записываемый в виде прямоугольной таблицы.

Обычно матрицу обозначают заглавной буквой латинского алфавита и выделяют круглыми скобками (квадратными скобками , двойными прямыми, др.). Элементы матрицы обозначают той же буквой, но маленькой.

$$\mathbf{A, B, E} \qquad \left(a_{ij}\right) \in K_{m,n}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$a_{ij}\ (i = 1,2,3,\ldots, m,\ j = 1,2,3,\ldots, n)$$

$$\mathbf{AB = C} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 7 \quad (1,2)\,(2,1)$$

Элементы матрицы выделяют индексами, первый индекс обозначает номер строки, в которой находится элемент, а второй — номер столбца.

Типы матриц

- *Квадратная матрица* **A** размерности n:

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Элементы a_{ii} называют диагональными.

Если все недиагональные элементы $a_{ij} = 0$ при i не равном j, то эта матрица называется *диагональной*.

Если сверх того все диагональные элементы равны друг другу, то матрица называется *скалярной*.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow diag(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn})$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = diag(1,2)$$

Типы матриц

- Скалярная матрица называется единичной **E** , если элементы матрицы равны единице.

$$E_n = diag(1,1,...,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Треугольной называется матрица, все элементы которой, расположенные ниже (выше) диагонали, равны нулю:

Верхняя треугольная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Нижняя треугольная матрица

Операция: сложение матриц

- Алгебраической суммой **A + B** называется $m \times n$ матрица **C**, такая что

$$A + B = C \quad \Rightarrow \quad a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad i = 1,2,...,m, \; j = 1,2,...,n$$

Сложение матриц ассоциативно и коммутативно.

Матрица у которой все элементы равна нулю, называется нулевой – $0_{m,n}$.

$$A + 0 = A$$

Если у матриц **A** и **B** элементы равны, но отличаются знаком, то $A + B = 0$, т.е. $B = -A$.

Пример
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Операция: умножение матриц

- Произведением *$m \times n$* матрицы ***A*** на *$n \times p$* матрицу ***B*** называется *$m \times p$* матрица ***C* = *AB***, элементы которой находятся по правилу

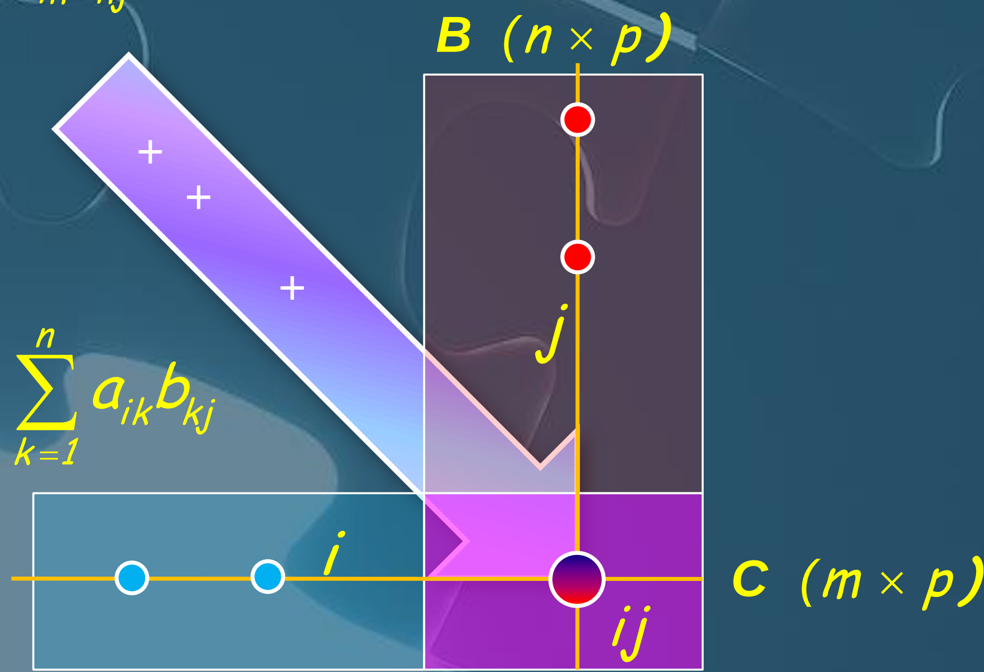
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

$$i = 1,2,\ldots,m \quad j = 1,2,\ldots,p$$

Пример $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$



Пример

@ *Представить систему линейных уравнений в матричной форме*

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = -1 \\ -x + 3y - z = 0 \end{cases}$$

$$\Sigma \quad \begin{matrix} 2x - y + z \\ x + y + z \\ -x + 3y - z \end{matrix}$$

$$\mathbf{X} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} = \overset{\mathbf{B}}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Свойства операции умножения матриц

- Умножение матриц ассоциативно (если для взятых матриц возможно умножение)

$$(AB)C = A(BC)$$

- Если матрица A – $m \times n$ матрица, то ее умножение на единичную E (при правильном выборе места расположения сомножителей) не меняет ее вида

$$AE_n = E_m A = A$$

- Если матрица A – квадратная матрица размерности n , то ее умножение на единичную E не зависит от порядка сомножителей в произведении

$$AE_n = E_n A = A$$

- Умножение матриц дистрибутивно относительно сложения

$$(A + B)C = AC + BC \qquad C(A + B) = CA + CB$$

Операция: умножение матрицы на число

- Произведение матрицы на элемент кольца: $B = \lambda A \quad \Rightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij}$

Свойства

- $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A) \qquad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
- $1 \cdot A = A$
- $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Полином от матрицы

Пусть $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ есть полином с коэффициентами a_i.

- Значением полинома $f(x)$ при $x = A$ – полиномом $f(A)$ называют матрицу

$$a_0 E_n + a_1 A + a_1 A^2 + , \ldots , + a_m A^m$$

Пример $f(x) = x^2 + x + 1$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$f(A) = A^2 + A + E_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 3A$$

Транспонирование матрицы

- *Транспонированием матрицы* называют такое ее преобразование, при котором строки этой матрицы заменяются ее столбцами с теми же номерами. Операция транспонирования обозначается символом ^{T}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & . & a_{1n} \\ . & . & . & . & . \\ a_{m\,1} & a_{m\,2} & a_{m\,3} & . & a_{m\,n} \end{pmatrix} \qquad (a_{ij}) \Rightarrow (a_{ji})^T \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & . & a_{m\,1} \\ a_{12} & a_{23} & . & a_{m\,2} \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ a_{1n} & a_{2n} & . & a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

Свойства

Если произведение матриц A и B определено, то: $B^T A^T = (AB)^T$

Если A и B матрицы одинаковых размеров, то: $A^T + B^T = (A + B)^T$

$$\lambda A^T = (\lambda A)^T$$

Матрица A называется симметрической, если: $A^T = A$

@ Транспонировать матрицу ($A^2 + E_3$), где $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Решение

$$A^2 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 7 & 13 & 3 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 + E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^2 + E_3\right)^T \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ 7 & 14 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 3 \\ 4 & 14 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$