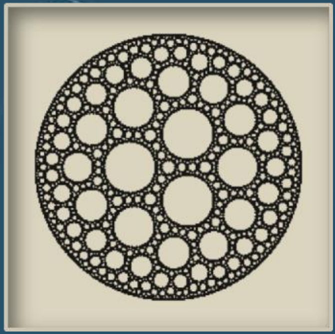
РЕШЕНИЕ СЛАУ МАТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ



{ ранг матрицы – теорема Кронекера-Капелли – совместность систем линейных уравнений – эквивалентные преобразования матрицы – метод Гаусса и метод Жордана решения СЛАУ – решение однородных уравнений - примеры }

Ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу размерами $(m \times n)$

Выделяем в этой матрице произвольно k строк и k столбцов

Элементы матрицы A, стоящие на пересечении выделенных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу k - того порядка.

- *Минором* k - того порядка матрицы A называют определитель квадратной матрицы, полученный из A выделением произвольных k строк и k столбцов.

Минор 1 - ого порядка

Минор 2 - ого порядка

$k = m - 1$ минор $m\text{-}1$ - ого порядка

$k = m$ минор m - ного порядка

Ранг матрицы

- *Рангом* матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы .
- Если ранг матрицы A равен r , это означает, что в A имеется хотя бы один отличный от нуля минор порядка r , но всякий минор, порядка большего чем r равен нулю. Используют следующее обозначение $r(A) = r$.
- Если все миноры матрицы, имеющие порядок r равны нулю, то все миноры на порядок выше, т. е. $r + 1$, также равны нулю .
- Если матрица имеет отличный от нуля минор M^r порядка r , а все миноры порядка $r + 1$, содержащие M^r, равны нулю, то ранг матрицы равен r .

@ *Найти ранг матрицы* **A**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение

Можно найти 12 миноров 1-го порядка .

9 миноров 2 - го порядка .

4 минора 3 - го порядка .

$$r = 3$$

Окаймляющий минор 2 - го порядка $M^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

$$M^1 = a_{11} = 1 \neq 0$$

Окаймляющий минор 3 - го порядка $M^3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$

Совместность системы уравнений

$$AX = B \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Если к основной матрице присоединить справа столбец свободных членов, получится *расширенная* матрица системы ***В*** , которая ее полностью определяет.

Теорема Кронекера-Капелли

$$A|B \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

- Для того, что бы система линейных уравнений была *совместной* необходимо и достаточно, что бы ранг основной матрицы был равен рангу расширенной, т. е. $r(A) = r(A|B)$.

Исследовать на совместность систему уравнений

Решение

$$AX = B \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 11 & -12 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Расширенная матрица системы

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 2 \\ 11 & -12 & 17 & 3 \end{pmatrix}$$

Находим ранг основной матрицы системы и ранг расширенной матрицы

$$r(A) = 2 \qquad 2 < 3 \qquad r(A|B) = 3$$

$$M^2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Ранги матриц не равны !

$$M^3(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 11 & -12 & 17 \end{vmatrix} = 0 \qquad M^3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 11 & -12 & 3 \end{vmatrix} = 70$$

Система уравнений несовместна

Эквивалентные преобразования матрицы

$$AX = B$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_n \end{pmatrix}$$

Эквивалентные преобразования строк матриц ***A*** и ***B***

$$\hat{A}X = \hat{B}$$

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & . & \hat{a}_{1n} \\ 0 & \hat{a}_{22} & . & \hat{a}_{2n} \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ . \\ \hat{b}_n \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования строк матрицы

Элементарными преобразованиями строк матрицы называют:

- перестановку местами любых двух строк матрицы
- умножение любой строки матрицы на константу
- прибавление к любой строке матрицы другой строки, умноженной на константу

$$A|B \sim \tilde{A}|\tilde{B}$$

Обозначение $\sim$ указывает на то, что матрица $\tilde{A}|\tilde{B}$ может быть получена из исходной путём элементарных преобразований строк (или наоборот).

Элементарные преобразования *обратимы*.

Метод Гаусса решения системы уравнений

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & . & \hat{a}_{1,n-1} & \hat{a}_{1n} \\ 0 & \hat{a}_{22} & . & \hat{a}_{2,n-1} & \hat{a}_{2n} \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \hat{a}_{n-1,n-1} & \hat{a}_{n-1,n} \\ 0 & 0 & . & 0 & \hat{a}_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ . \\ \hat{b}_{n-1} \\ \hat{b}_n \end{pmatrix}$$

$$x_n = \frac{\hat{b}_n}{\hat{a}_{nn}}$$

$$x_{n-1} = \frac{\hat{b}_{n-1} - \hat{a}_{n-1,n} x_n}{\hat{a}_{n-1,n-1}}$$

$$x_{n-2} = \frac{\hat{b}_{n-2} - \hat{a}_{n-2,n-1} x_{n-1} - \hat{a}_{n-2,n} x_n}{\hat{a}_{n-2,n-2}}$$

Алгоритм метода Гаусса решения СЛАУ

- матрица коэффициентов приводится к верхне-треугольной посредством элементарных преобразований строк.

$$A\ X = B$$

$$A\,|\,B \sim \hat{A}\,|\,\hat{B}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} \hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & . & \hat{a}_{1,n-1} & \hat{a}_{1n} & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & . & \hat{a}_{2,n-1} & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & \hat{a}_{n-1,n-1} & \hat{a}_{n-1,n} & \hat{b}_{n-1} \\ 0 & 0 & . & 0 & \hat{a}_{nn} & \hat{b}_n \end{array}\right)$$

- находим неизвестные $X_i\ (i = n, n\text{-}1, \ldots, 2,1\ )$, начиная решение системы с последнего уравнения (в обратном порядке).

@ *Решить систему линейных уравнений методом Гаусса*

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ?$$

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow y = 2 \\ \Rightarrow z = 3 \end{array}$$

Алгоритм метода Гаусса-Жордана

- матрица коэффициентов приводится к единичной посредством элементарных преобразований строк.

$$A\,X = B$$

$$A\,|\,B \sim E\,|\,C$$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 1 & 0 & . & 0 & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 1 & . & 0 & 0 & \lambda_2 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & 0 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & . & 0 & 1 & \lambda_n \end{array}\right)$$

- на месте столбца свободных членов появляется решение.

$$C = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

@ *Решить систему линейных уравнений методом Гаусса - Жордана*

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = ?$$

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \Rightarrow \lambda = 1 \\ \Rightarrow \mu = 2 \\ \Rightarrow \nu = 3 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Решение для однородной системы уравнений

$$A\,X = 0$$

- Если $\det A \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X = O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ - тривиальное решение

- Если $\det A = 0 \quad \Rightarrow$ решений - бесконечное множество

  Для того чтобы их найти необходимо найти в матрице коэффициентов системы базисный минор, отличный от нуля. Лишние уравнения удалить. Затем решать полученную неоднородную систему, в которой число уравнений будет меньше числа переменных. Лишние переменные переносятся вправо и становятся параметрами.

@ Решить систему уравнений $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 11 & -12 & 17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Решение

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \\ 11 & -12 & 17 \end{vmatrix} = 6 + 27 - 21 = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -4t \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & t/2 \\ 0 & -7/2 & -9t/2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1/2 & t/2 \\ 0 & 1 & 9t/7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -t/7 \\ 0 & 1 & 9t/7 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{t}{7} \\ \dfrac{9t}{7} \\ t \end{pmatrix}$$