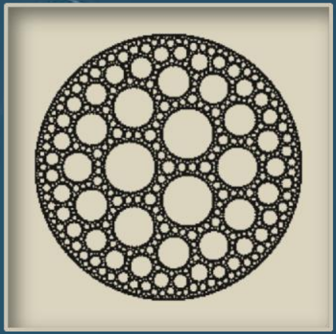
ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ



{ определители 1-го, 2-го и 3-го порядков – определитель n-го порядка – миноры и алгебраические дополнения – разложение определителя по элементам строки или столбца – свойства определителя – символ Кронекера – примеры }

Определение

- *Определителем квадратной матрицы* $A = (a_{ij}),\ i, j = 1,2,..,n$ называется сумма всех произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца.
Всякое такое произведение содержит n сомножителей и может быть записано в виде $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\dots a_{nj_n}$, где $j_1, j_2, \dots, j_n$ является перестановкой чисел $1, 2, \dots, n$.
Произведение $(-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$, где t – число инверсий в перестановке $j_1, j_2, \dots, j_n$ называется членом определителя матрицы A.
Характер четности числа инверсий определяет t, 0 – если подстановка $j_1, j_2, \dots, j_n$ четная, и 1 – если подстановка $j_1, j_2, \dots, j_n$ нечетная.

$$|A| = \Delta = \det A = \det(a_{ij}) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n} (-1)^t a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}\cdots a_{nj_n}$$

Определители матриц 1-го, 2-го и 3-го порядков

- Для $n = 1$: $\det A = |a_{11}| = a_{11}$
- Для $n = 2$: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- Для $n = 3$: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Пример: $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 5 = 22$

Миноры и алгебраические дополнения

- Минором элемента определителя называют определитель матрицы, получаемой после вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится соответствующий элемент. Элементы минора сохраняются в том же порядке и взаимном расположении.

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & & & & j & & \\
 & a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\
 & a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\
 & . & . & . & . & . & . \\
i & . & . & . & a_{ij} & . & . \\
 & . & . & . & . & . & . \\
 & a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{n\,n-1} & a_{n\,n}
\end{array}
\qquad
M^{ij} = \begin{vmatrix}
\hat{a}_{11} & \hat{a}_{12} & . & \hat{a}_{1\,n-2} & \hat{a}_{1\,n-1} \\
\hat{a}_{21} & \hat{a}_{22} & . & \hat{a}_{2\,n-2} & \hat{a}_{2\,n-1} \\
. & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . \\
\hat{a}_{n-1\,1} & \hat{a}_{n-1\,2} & . & \hat{a}_{n-1\,n-2} & \hat{a}_{n-1\,n-1}
\end{vmatrix}$$

- Алгебраическое дополнение для элемента a_{ij} определяется через минор по формуле: $A^{ij} = (-1)^{i+j} M^{ij}$

Пример

@ Найти минор и алгебраическое дополнение для элемента a_{23} матрицы A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение

$$a_{23} = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{23} = (-1)^{2+3} M^{23} = -3$$

$$M^{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3$$

1) Разложение определителя матрицы **A** по строке i

$$\det \mathbf{A} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}(-1)^{i+k} M^{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A^{ik} = a_{i1}A^{i1} + \ldots + a_{in}A^{in}$$

2) Разложение определителя матрицы **A** по столбцу j

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}(-1)^{k+j} M^{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}A^{kj} = a_{1j}A^{1j} + \ldots + a_{nj}A^{nj}$$

Пример:

Используется метод разложения по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 - 1 = -5$$

Свойства определителя матрицы

1) Определитель матрицы не меняется при ее транспонировании

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$$

2) Если все элементы какой-либо строки (столбца) – нули, то величина определителя равна нулю

$$|\mathbf{A}| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A^{ik} = 0A^{i1} + \ldots + 0A^{in} = 0$$

3) Если в матрице меняются местом любые две строки (столбца), то определитель меняет свой знак

4) Определитель, имеющий две одинаковые строки (столбца), равен нулю

5) Общий множитель всех элементов произвольной строки (столбца) можно вынести за знак определителя

Свойства определителя матрицы

6) Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен нулю

7) Определитель не меняется от прибавления к какой-либо строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на произвольное число

8) Определитель не меняется от прибавления к какой-либо строке (столбцу) линейной комбинации других его строк (столбцов),

9) Если какая либо строка (столбец) определителя есть линейная комбинация других строк (столбцов), то величина определителя равна нулю

Пример

@ *Вычислить определитель матрицы :* $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

Решение

Умножим первую строку на (-3) и прибавим ко второй

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} =$$

Из третьей строки вычтем первую

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 7 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 21$$

Символ Кронекера

Используя метод разложения для вычисления det **A** по столбцу j выведем одно соотношение, которое будет использовано при нахождении обратной матрицы.

Заменим j – ый столбец определителя столбцом $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$d_j = \det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^{n} b_i A^{ij}$$

Если в качестве столбца берется k столбец определителя d, и k не равно j, то получим

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A^{ij} = 0$$

Вводится символ Кронекера:

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases}$$

- $$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A^{ij} = \delta_{kj} \det \mathbf{A}$$