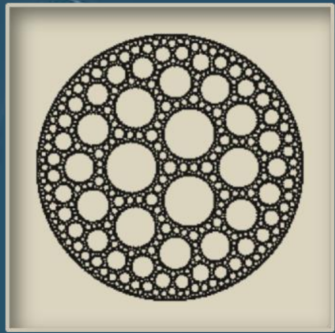
ОБРАТНАЯ МАТРИЦА



{ структура обратной матрицы – алгоритм получения обратной матрицы – запись линейных систем уравнений в матричной форме – крамеровская система линейных уравнений – примеры }

Определение

- *Обратной матрицей квадратной матрицы* A называется матрица A^{-1}, такая, что произведение $A^{-1}A$ будет равно единичной матрице E.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Обратная матрица естественно возникает при матричном решении крамеровской системы линейных уравнений

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$$

Обратная матрица имеет следующую структуру

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A^{11} & A^{21} & . & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & . & A^{n2} \\ . & . & . & . \\ A^{1n} & A^{2n} & . & A^{nn} \end{pmatrix}$$

A^{ij} – алгебраические дополнения элементов матрицы $A = (a_{ij})$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & . & A^{1n} \\ A^{21} & A^{22} & . & A^{2n} \\ . & . & . & . \\ A^{n1} & A^{n2} & . & A^{nn} \end{pmatrix}^T$$

Структура обратной матрицы

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E \quad ?$$

Пусть $AA^{-1} = (b_{ij})$, тогда $$b_{ij} = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A^{jk}$$

С учетом полученной ранее формулы $$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}A^{ij} = \delta_{kj}\det A$$

$$b_{ij} = \frac{\delta_{ij}\det A}{\det A} = \delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 \end{pmatrix} = E = A^{-1}A = AA^{-1} \qquad \square$$

Алгоритм получения обратной матрицы

- **Обратная матрица** существует тогда и только тогда, когда матрица A является **невырожденной** (её детерминант не равен нулю). Если A – **невырожденная** матрица, то матрица A^{-1} задается формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A^{11} & A^{21} & . & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & . & A^{n2} \\ . & . & . & . \\ A^{1n} & A^{2n} & . & A^{nn} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A}\left(A^{ij}\right)^T$$

Алгоритм получения обратной матрицы A^{-1} :

$$\left(a_{ij}\right) \Rightarrow \det A,\ \det A \neq 0,\ \Rightarrow \left(A^{ij}\right) \Rightarrow \left(A^{ij}\right)^T \Rightarrow A^{-1} = \frac{\left(A^{ij}\right)^T}{\det A}$$

$\det A = 0 \Rightarrow$ обратная матрица не существует

@

Найти обратную матрицу для матрицы **A**: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Решение

1) $\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3$

$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -10 & 2 & -3 \\ 12 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -10/3 & 2/3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad (A^{ij}) = \begin{pmatrix} 9 & -10 & 12 \\ -3 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad (A^{ij})^T = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 3 \\ -10 & 2 & -3 \\ 12 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

$A^{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -10$

Пример

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E$$

Проверка

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftarrow A$$

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 10/3 & -2/3 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftarrow E$$

Решение СЛАУ

Система линейных алгебраических уравнений - СЛАУ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{pmatrix}$$

Система *совместна* – если есть хоть одно решение, и *несовместна* – в противном случае

$$AX = B \quad AC \equiv B$$

называется системой m линейных уравнений с n неизвестными

$A = (a_{ij}) \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n$ - основная матрица системы

$X = (x_j)$ - матрица n неизвестных

$B = (b_i)$ - матрица m свободных членов

$C = (\lambda_j) \quad j = 1, 2, \ldots, n$ - матрица – решение системы

@

Решить систему уравнений **AX = B**

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Решение

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ x + 3y + z + t = -1 \end{cases}$$

Перенесем два слагаемых с z и t вправо

$$\begin{cases} x - 2y = -\hat{z} + 1 \\ x + 3y = -\hat{z} - \hat{t} - 1 \end{cases}$$

$$y = \frac{-\hat{t} - 2}{5}$$

$$x = \frac{-2\hat{t} - 4}{5} - \hat{z} + 1$$

- Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если в ней число уравнений совпадает с числом неизвестных ($m = n$) и определитель её матрицы не равен нулю

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow C = A^{-1}B$$

$$C = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ . \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Так как $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A^{11} & A^{21} & . & A^{n1} \\ A^{12} & A^{22} & . & A^{n2} \\ . & . & . & . \\ A^{1n} & A^{2n} & . & A^{nn} \end{pmatrix}$

Формула Крамера $\lambda_j = \dfrac{d_j}{d},\ j = 1, 2, .., n$

$$\lambda_j = \frac{1}{\det A}\left(A^{j1}b_1 + A^{j2}b_2 + \ldots + A^{jn}b_n\right)$$

где A^{ji} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе d

Пример

@ *Решить систему линейных уравнений методом Крамера*

$$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + y - z = 0 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$$

Решение

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \qquad x = \frac{2}{2} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \qquad y = \frac{4}{2} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{\det \mathbf{A}} \qquad z = \frac{6}{2} = 3$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$