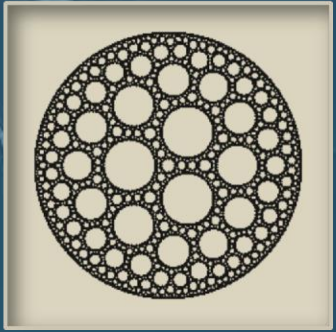
НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



[определение - свойства неопределенного интеграла - таблица основных интегралов - методы интегрирования - табличное интегрирование - метод разложения - метод замены переменной - примеры – метод интегрирования по частям]

Определение

- Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если $F(x)$ дифференцируема на (a,b) и $F'(x) = f(x)$.

Теорема 1 *Если функция непрерывна на каком-нибудь промежутке, то она имеет на нем первообразную.*

Теорема 2 *Если $F(x)$ - первообразная для $f(x)$ на (a,b), то $F(x) + C$ - также первообразная, где C - любое число.*

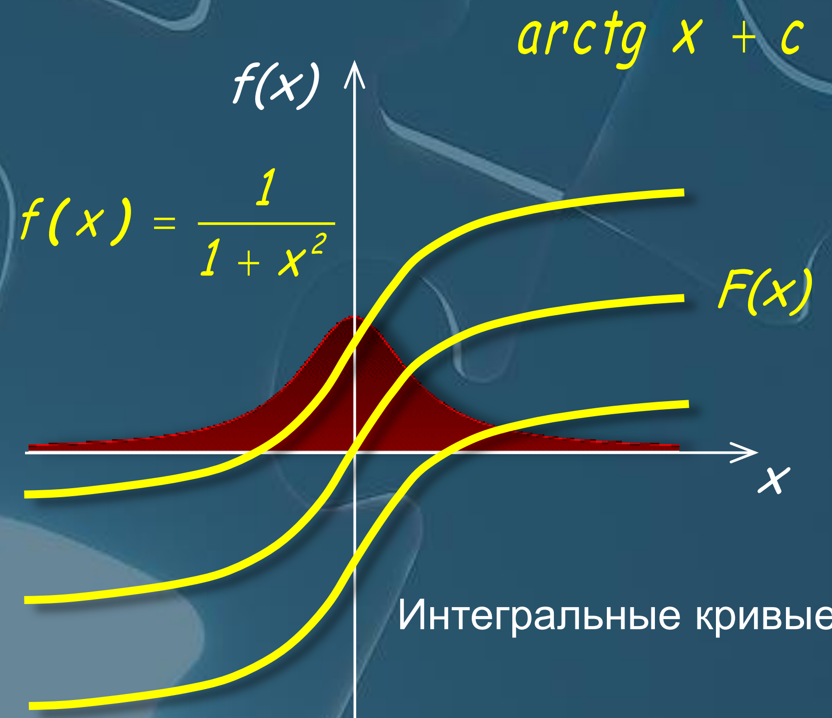
Теорема 3 *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на (a, b), то они на этом промежутке отличаются на постоянную, т.е. $F_1(x) - F_2(x) = C$.*

Совокупность всех первообразных F для функции f называется *неопределенным интегралом* от f: $\int f(x)dx = F(x) + C$

- $\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\qquad \dfrac{d(-\cos x + c)}{dx} = \sin x$

Интегральная кривая

- $\int f(x)dx = F(x) + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x + c$



Свойства неопределенного интеграла

- $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$
- $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$
- $d\left(\int f(x)dx\right) = dF(x) = $
  $= F'(x)dx = f(x)dx$
- $\int df(x) = f(x) + C$
- $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$
- $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

Таблица основных интегралов

- $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c,\ a \neq -1$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

  $\int e^x dx = e^x + c$
- $\int \cos x dx = \sin x + c$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c$
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c$
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c$
- $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c$
- $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + c$

Методы интегрирования

- **Табличное интегрирование** – использование табличных интегралов

$$\int \frac{dx}{\sqrt[12]{x^7}} = \int x^{-\frac{7}{12}} dx = \frac{12}{5} x^{\frac{5}{12}} + c = \frac{12}{5} \sqrt[12]{x^5} + c$$

- **Метод разложения** – тождественные преобразования подынтегральной функции, её разложение и преобразования для получения табличных интегралов

$$\int tg^2 x dx = \int \frac{sin^2 x}{cos^2 x} dx = \int \frac{1 - cos^2 x}{cos^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{cos^2 x} - \int dx = tgx - x + c$$

Метод замены переменной

- Метод замены переменной

Теорема Если функция $y = f(x)$ непрерывна на множестве X, а функция $x = \varphi(t)$ непрерывна и дифференцируема на соответствующем множестве T и имеет на нем обратную функцию $t = \Phi(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

- $$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt =$$

$$= \int f(\varphi(t))d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + c = F(x) + c$$

- $$\int 2x(x^2-1)^4dx \Rightarrow \left\langle x^2 - 1 = t, \quad 2xdx = dt \right\rangle \Rightarrow$$

$$\int (x^2-1)^4(2xdx) = \int t^4dt = \frac{t^5}{5} = \frac{(x^2-1)^5}{5} + c$$

Пример

@ $$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \Rightarrow \langle t=\sin x,\, dt=\cos x dx\rangle \Rightarrow$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t+\sqrt{1+t^2}\right| = \ln\left|\sin x+\sqrt{1+\sin x^2}\right| + c$$

$$\int tg^3 x dx \Rightarrow \left\langle t = tgx,\, x = arctgt,\, dx = \frac{dt}{1+t^2}\right\rangle \Rightarrow \int \frac{t^3 dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \frac{((t^3+t)-t)dt}{1+t^2} = \int (t - \frac{t}{1+t^2})dt = \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{1+t^2} =$$

$$= \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|1+t^2\right| = \frac{tg^2 x}{2} - \frac{1}{2}\ln\left|\cos x\right| + c$$

Интегрирование по частям

- Метод интегрирования по частям

Используется известное выражение для дифференциала произведения двух функций

$$d(U(x)V(x)) = dU(x)V(x) + U(x)dV(x)$$

$$\int d(U(x)V(x)) = \int V(x)dU(x) + \int U(x)dV(x)$$

Получаем формулу интегрирования по частям : $\int UdV = UV - \int VdU$

- $$\int xe^x dx = \left\langle U = x \Rightarrow dU = dx,\ dV = e^x dx \Rightarrow V = \int e^x dx = e^x \right\rangle =$$
$$= xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x = e^x(x-1) + c$$

Пример

@ $\int e^x \cos x dx = ?$

$$\overbrace{\int e^x \cos x dx}^{} = \langle U = e^x \Rightarrow dU = e^x dx,\ dV = \cos x dx \Rightarrow V = \sin x \rangle = e^x \sin x -$$

$$- \int e^x \sin x dx = \langle U = e^x \Rightarrow dU = e^x dx,\ dV = \sin x dx \Rightarrow V = -\cos x \rangle =$$

$$= e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx) = e^x (\sin x + \cos x) - \underbrace{\int e^x \cos x dx}_{}$$

$$2\int e^x \cos x dx = e^x (\sin x + \cos x) \Leftrightarrow \int e^x \cos x dx = \frac{e^x (\sin x + \cos x)}{2} + c$$