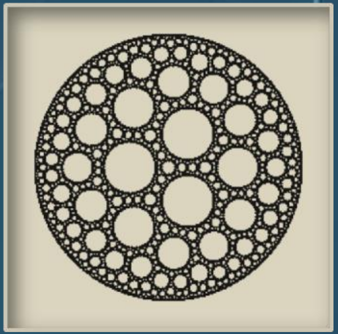
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ



[универсальная тригонометрическая подстановка - другие подстановки, упрощающие нахождение интеграла - примеры - интегрирование степеней тригонометрических функций]

Универсальная тригонометрическая подстановка

- Интегралы от функций рационально выражаемых через тригонометрические функции *sin x* и *cos x* всегда могут быть найдены с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg(x/2)$

$$t = tg\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2arctgt \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \left(1 - tg^2\frac{x}{2}\right)\cos^2\frac{x}{2} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\int\frac{P(sinx, cosx)}{Q(sinx, cosx}dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt$$

- $$\left\{\begin{aligned} dx &= \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{aligned}\right.$$

@ $\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos x}$

Решение

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos x} \Rightarrow \left\langle t = tg\frac{x}{2} \right\rangle \Rightarrow \int \frac{4t^2}{(1+t^2)^2} \frac{1}{(1+\frac{1-t^2}{1+t^2})} \frac{2dt}{(1+t^2)} = 4\int \frac{t^2 dt}{(1+t^2)^2} =$$

$$= 2\int \frac{td(1+t^2)}{(1+t^2)^2} = 2(-\frac{t}{1+t^2} + \int \frac{dt}{1+t^2}) = 2(-\frac{t}{1+t^2} + arctgt) = -\sin x + x + c$$

Другой способ

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{1+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x dx}{1+\cos x} = \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)dx}{1+\cos x} =$$

$$= \int (1-\cos x)dx = x - \sin x + c$$

Другие подстановки, упрощающие нахождение интеграла

Универсальная тригонометрическая подстановка часто приводит к громоздким рациональным дробям, поэтому используют и некоторые другие приемы упрощения подынтегральной функции.

- Если R – нечетная функция относительно $\sin x$, то удобна подстановка

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \cos x$$

- Если R – нечетная функция относительно $\cos x$, то удобна подстановка

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow t = \sin x$$

- Если $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная функция относительно как $\sin x$, так и $\cos x$, и если функция не содержит знаменателя, то степени функций понижают, используя формулы удвоения аргументов в этих функциях, если в R есть знаменатель то делают подстановку • $t = tgx$ или $t = ctgx$

• $$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

@ $$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$$

Решение

$$\Rightarrow \left\langle \frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = \frac{-\sin^3 x}{\cos^2 x} \Rightarrow R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \right\rangle \Rightarrow$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx \Rightarrow \left\langle t = \cos x, \quad dt = -\sin x dx \right\rangle \Rightarrow$$

$$= -\int \frac{1-t^2}{t^2}dt = -\int \left(\frac{1}{t^2} - 1\right)dt = \frac{1}{\cos x} + \cos x + c$$

Пример

@ $\int tg^4 x\, dx$

Решение

$$\Rightarrow \left\langle t = tgx,\ x = arctgt,\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\int tg^4 x\, dx = \int \frac{t^4}{1+t^2}\, dt = \int \frac{t^4 - 1 + 1}{1+t^2}\, dt =$$

$$= \int (t^2 - 1)\, dt + \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{t^3}{3} - t + arg\,tgt = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + c$$

Интегрирование степеней тригонометрических функций

- $$\int \sin^{2m+1} x\,dx = -\int \sin^{2m} x\,d(\cos x) =$$
  $$= -\int (1-\cos^2 x)^m\,d(\cos x) = -\int (1-t^2)^m\,dt$$

- $$\int \cos^{2m+1} x\,dx = \int \cos^{2m} x\,d(\sin x) =$$
  $$= \int (1-\sin^2 x)^m\,d(\sin x) = \int (1-t^2)^m\,dt$$

- $$\int \sin^{2m} x\,dx = \frac{1}{2^m}\int (1-\cos 2x)^m\,dx$$

- $$\int \cos^{2m} x\,dx = \frac{1}{2^m}\int (1+\cos 2x)^m\,dx$$

Пример

@ $\int tg^4 x\,dx$

Решение

$$\Rightarrow \left\langle tg^2 x = sec^2 x - 1 \right\rangle \Rightarrow$$

$$\int tg^4 x dx = \int (sec^2 x - 1)^2 dx = \int \frac{dx}{cos^4 x} - 2\int \frac{dx}{cos^2 x} + \int dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{cos^4 x} = \int (1 + tg^2 x) d(tgx) = tgx + \frac{tg^3 x}{3}$$

$$\int \frac{dx}{cos^2 x} = tgx \qquad \int tg^4 x\,dx = \frac{tg^3 x}{3} - tgx + x + c$$