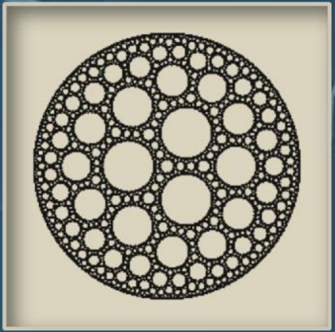
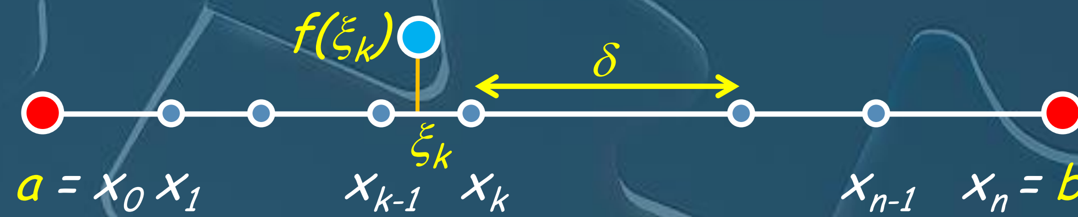
ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ



[определенный интеграл как предел интегральной суммы - свойства определенного интеграла - основная теорема математического анализа – теорема Барроу - формула Ньютона-Лейбница - подстановка в определенном интеграле - примеры вычислений определенного интеграла – примеры - интегрирование нечетных и четных функций в пределах, симметричных относительно начала координат]

Определенный интеграл как предел интегральной суммы

Пусть $f(x)$ определена на $[a,b]$
и D - разбиение отрезка $[a,b]$
на подынтервалы - отрезки I_k.



$$D:\{x_1,\ldots,x_n\},\ I_k=(x_{k-1},x_k),\ \xi_k\in I_k,\ \Delta_k=x_k-x_{k-1},\ \delta=\max(\Delta_k)$$

Составим сумму $S_D=\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ Сумма S_D называется суммой Римана

Предел, к которому стремится интегральная сумма S_D при неограниченном произвольном разбиении D и стремлении к нулю максимального из отрезков разбиения называется определённым интегралом от функции $f(x)$ на $[a, b]$.

$$\lim_{\delta\to 0}S_D=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k=\int_a^b f(x)dx$$

Предел называют интегралом Римана и функцию, для которой этот предел существует, называют интегрируемой в смысле Римана.

Пример

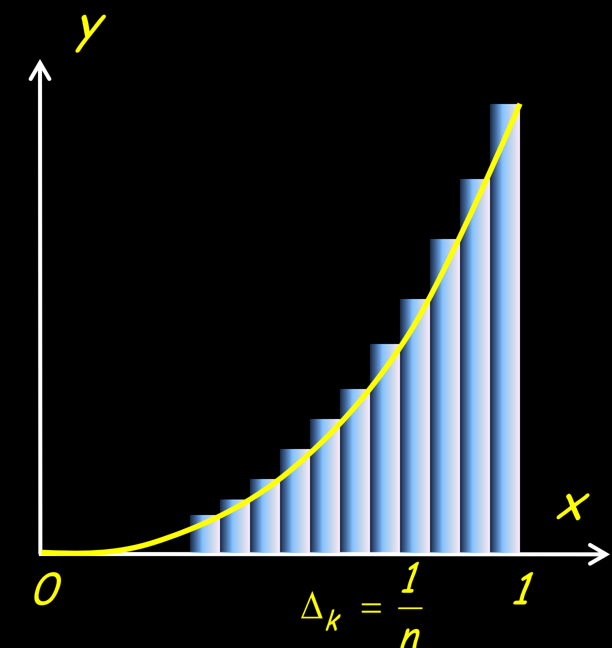
@ Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^3 dx$

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^3 \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Воспользуемся формулой для суммы кубов

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2}{4}$$

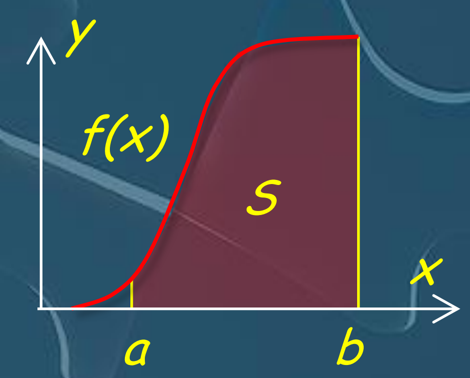
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\left(\frac{n^4}{4} + \frac{n^3}{2} + \frac{n^2}{4}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{4n^2}\right) = \frac{1}{4}$$



$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

Свойства определенного интеграла

S – площадь криволинейной трапеции $\quad S = \int_a^b f(x)dx$



Свойства определенного интеграла следуют из его определения, как предела суммы Римана – интегральной суммы.

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- $\int_a^b rf(x)dx = r\int_a^b f(x)dx$
- $\int_a^b (f(x)dx \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

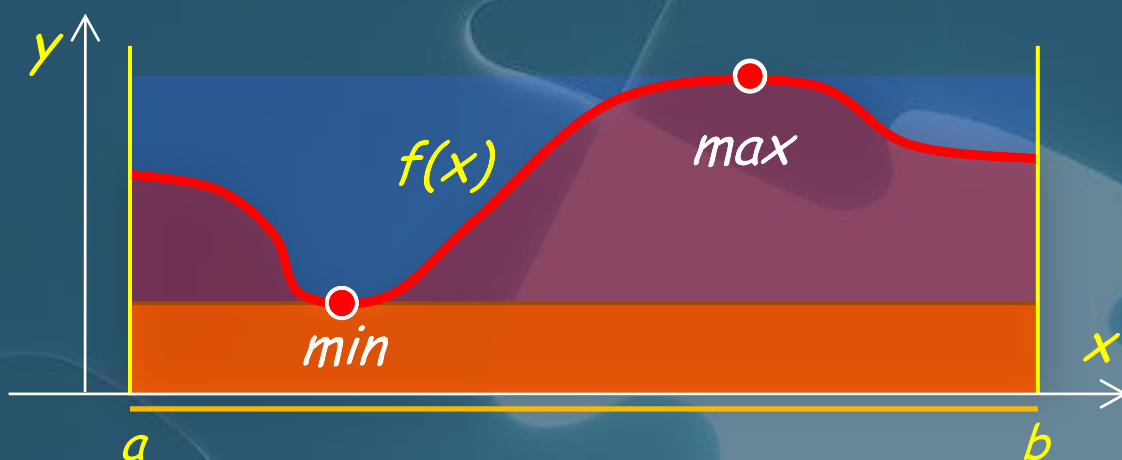
Свойства определенного интеграла

- Теорема (об оценке определенного интеграла)

$$\text{Если } g(x) \le f(x) \le h(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b g(x)dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b h(x)dx$$

$$\min\{f(x)|_{x\in[a,b]}\}(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le \max\{f(x)|_{x\in[a,b]}\}(b-a)$$

Тем более справедливо двойное неравенство



Свойства определенного интеграла

- Теорема о среднем

$$\exists \xi \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Доказательство

Из предыдущей теоремы:

$$\min\{f(x)\,|_{x\in[a,b]}\} \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \max\{f(x)\,|_{x\in[a,b]}\}$$

Используя теорему о среднем, для $a < \xi < b$ получим:

$$\exists \xi \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

Основная теорема математического анализа – теорема Барроу

- Теорема Барроу (об интеграле с переменным верхним пределом)

Функция $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ дифференцируема в интервале (a,b) и $F'(x) = f(x)$ для всех x в этом интервале.

Доказательство

$$\forall \delta \neq 0 \quad \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta}\left(\int_a^{x+\delta} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) = = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)dt =$$

$$= \frac{1}{\delta} f(\xi_\delta)((x+\delta) - x) = f(\xi_\delta)$$

$$\delta \to 0,\ \xi_\delta \to 0,\ \lim_{\delta \to 0} f(\xi_\delta) = f(x) \qquad F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad F'(x) = f(x)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Предположим, что $F(x)$ – первообразная функция для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Действительно, по основной теореме анализа $F(x) + c = \int_a^x f(t)dt$

первообразная, тогда $F(x = a) = F(a) = -c$, а $F(b)$ есть величина интеграла с переменным верхним пределом в точке $x = b$, что и дает вышеприведенную формулу

$$\int_a^b f(x)dx = (F(x) - F(a))\Big|_{x=b} = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_0^1 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4}$$

Подстановка в определенном интеграле

- Теорема

Если g и её производная g' непрерывны на $[a,b]$ и f непрерывна на $[g(a),g(b)]$, то

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt$$

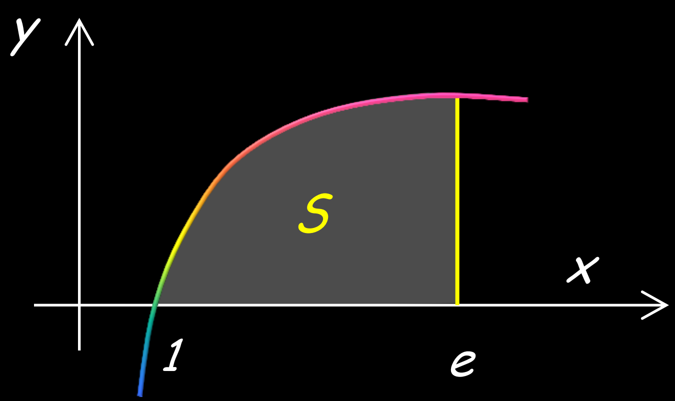
Доказательство

Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(g(x))dg(x) = F(g(b)) - F(g(a)) =$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)dt = F(g(b)) - F(g(a))$$

@ *Найти площадь криволинейной трапеции :* $S = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$



$$S = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \Rightarrow \left\langle \begin{array}{l} t = \ln x, dt = \dfrac{dx}{x}, \\ x = 1 \Rightarrow t = \ln 1 = 0, \\ x = e \Rightarrow t = \ln e = 1 \end{array} \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$$

Пример

@ $$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx$$

$$I: x=\frac{\pi}{2}-t \Rightarrow dx=-dt,$$

$$x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2},\ \ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin^3(\pi/2-t)}{\sin^3(\pi/2-t)+\cos^3(\pi/2-t)}dt=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\cos^3 t+\sin^3 t}dt$$

$$I=\frac{\pi}{4}$$

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin^3 x+\cos^3 x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\cos^3 x+\sin^3 x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$$

Интегрирование нечетных и четных функций

- **Теорема** Если f – нечетная функция и пределы интегрирования $[-a, a]$, то

$$f(-x) = -f(x)\ \forall x \in [-a, a] \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Доказательство

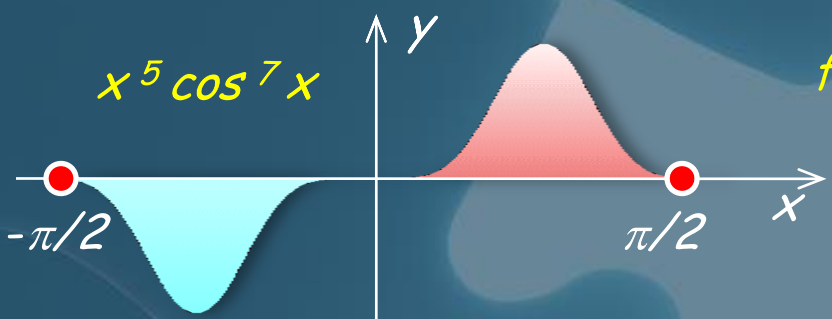
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{0} f(-t)d(-t) + \int_{0}^{a} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Для первого слагаемого интеграла делаем подстановку: $x = -t$ и $dx = -dt$

- **Теорема** Если f – четная функция и пределы интегрирования $[-a, a]$, то

$$f(-x) = f(x)\ \forall x \in [-a, a] \quad \int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

$x^5 \cos^7 x$



$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} x^5 \cos^7 x\, dx = 0$$