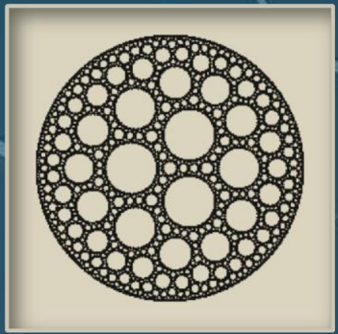
# ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ



{ определение функции – способы задания – аналитический – графический – алгоритмический – неявный – параметрический – классы функций – монотонные – обратные – периодические – элементарные – примеры }

# Определение функции

- Функция (отображение, оператор, преобразование) - математическое понятие, отражающее связь между элементами множеств. Можно сказать, что функция — это «закон», по которому каждому элементу одного множества (называемому областью определения функции) ставится в соответствие некоторый элемент другого множества (называемого областью значений).

$$f : X \to Y$$

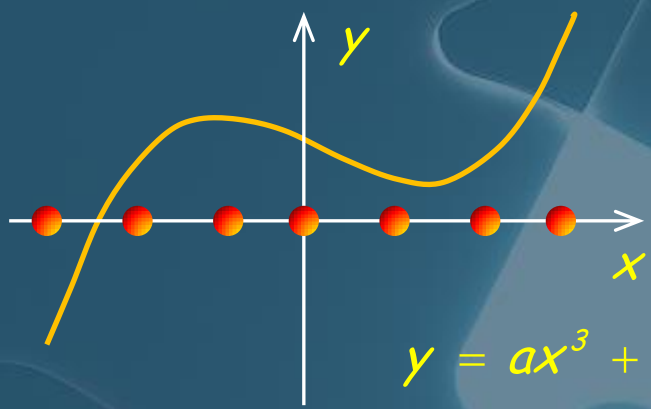
Говорят, что $f : X \to Y$ определена на элементе $x$, если $x \in X$, и что $f$ не определена на элементе $x$, если $x \notin X$. При $E \subset X$ будем говорить, что $f$ определена на $E$.

При $E \subset X$ $\quad f(E) := \{y : y = f(x),\ x \in E\}$ называется образом $E$, $f(x) \in Y_f$ .

При $D \subset Y$ $\quad f^{-1}(D) := \{x : x \in X, f(x) \in D\}$ называется полным пробразом $D$ .

Графиком функции $f : X \to Y$ называется множество пар :

$$\{(x, f(x)) : x \in X\}$$




$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Способы задания функции:

аналитический, табличный,
графический, алгоритм, …

# Способы задания функции

- *Аналитический.* Если есть некоторая формула (свойство) $\varphi(x,y)$, связывающее переменные $x \in X$ и $y \in Y$, то можно определить множество пар $R = \{(x,y) | \varphi(x,y)\}$, которое будет соответствием элементов множества $X$ и множества $Y$.

Если соответствие: функция $R = A \to Y$, то говорят, что функция $R$ задана аналитически.

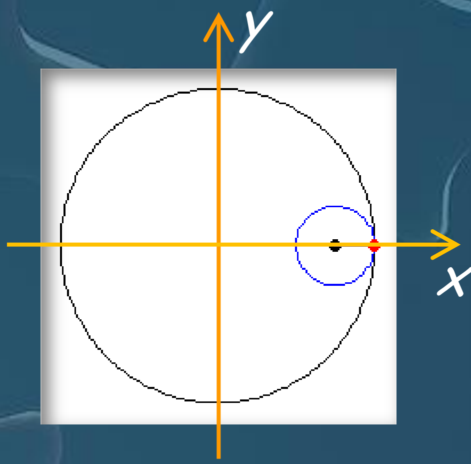
$$y = x^2 \qquad y = 2^x \qquad x^2 - y^2 = 1$$

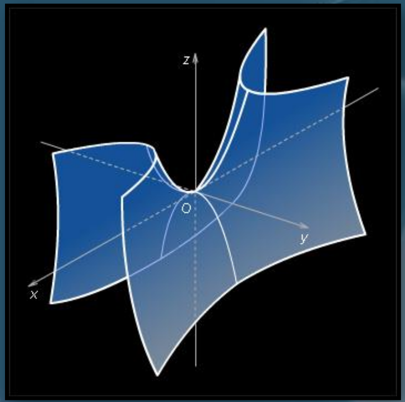
- *Табличный.* Функцию $f : A \to B$ задают при помощи таблицы, явно указывая для каждого элемента $a \in A$ соответствующий элемент $b \in B$.

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 1 | 12 | | | 6 | 11 |
| $b$ | 2 | 5 | | | 8 | 2 |

- *Графический.* Числовую функцию $f : R \to R$ задают графически, начертив ее в соответствующей плоскости координат, или построив поверхность: $f : R^2 \to R^2$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$




$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

*Явный способ задания функции* $y = \pm\sqrt{\left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3}$

# Монотонные функции

- *Монотонная функция* – это функция, приращение которой не меняет её знака, т.е. оно всегда неотрицательно, либо всегда неположительно.

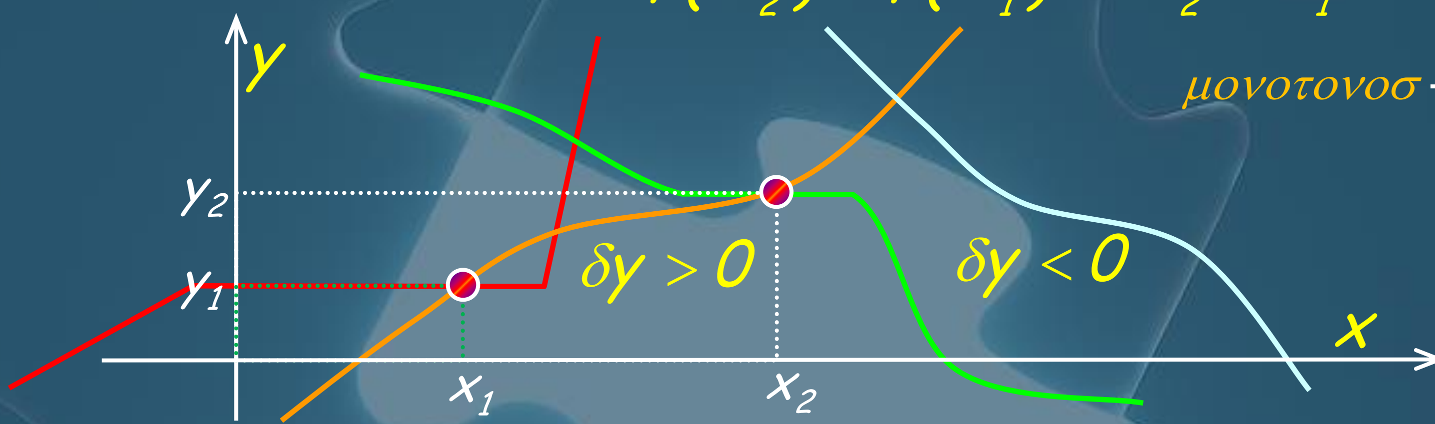
Строго монотонная – возрастающая функция: $f(x_2) > f(x_1) \quad x_2 > x_1$

Строго монотонная – убывающая функция: $f(x_2) < f(x_1) \quad x_2 > x_1$

Неубывающая функция: $f(x_2) \geq f(x_1) \quad x_2 > x_1$

Невозрастающая функция: $f(x_2) \leq f(x_1) \quad x_2 > x_1$

$\mu o \nu o \tau o \nu o \sigma$ - однотонный



# Обратные функции

- Функция $f^{-1} : Y \to X$ называется *обратной* к $f : X \to Y$, если для них выполнены следующие тождества :

$$f(f^{-1}(y)) \equiv y \quad \forall y \in Y \qquad f^{-1}(f(x)) \equiv x \quad \forall x \in X$$

Областью определения $f^{-1}$ является множество $Y$, а областью значений - множество $X$ .

Пример: для $f(x) = x^2$ обратной функцией является $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$

$$y = \sin x \Rightarrow y = (\sin x)^{-1} = \arcsin x$$

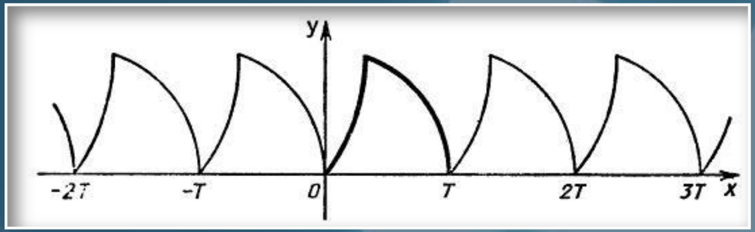
$$y = e^x = \exp x \Rightarrow y = (e^x)^{-1} = \ln x$$

# Периодические функции

- Функция $f : M \to N$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если справедливо: $f(x+T) = f(x), \ \forall x \in M$

Если это равенство не выполнено ни для какого $T \in M, \ T \neq 0$, то функция $f$ называется апериодической.

Пример: $f(x) = \sin x$ периодическая функция с периодом $T = 2\pi$



# Элементарные функции

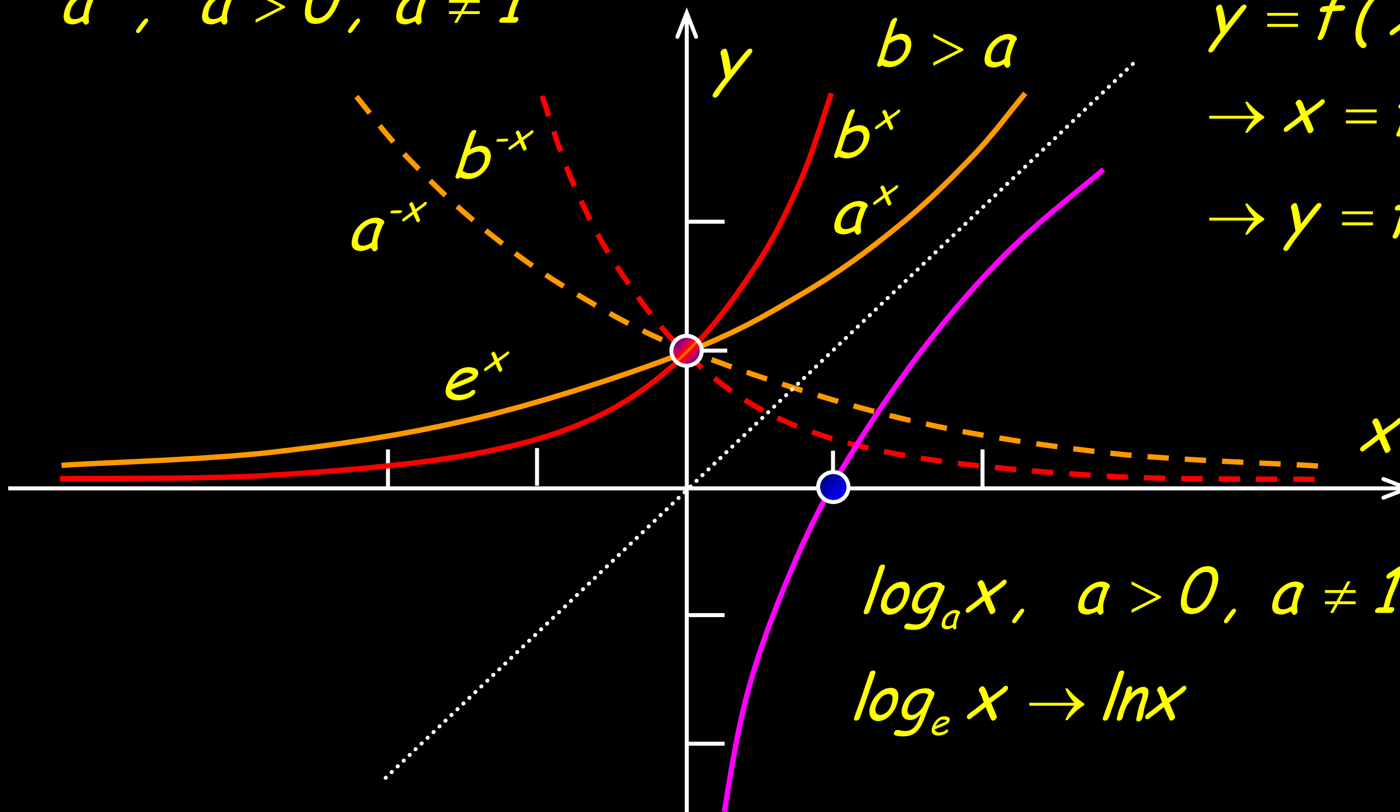
К этому классу относятся функции, полученные из основных элементарных функций путем конечного числа операций $+$ , $\cdot$ , $-$ , $/$ и их суперпозиции.

- *Основные элементарные функции*
- Степенная функция: $y = x^a, \; a \in R \setminus \{0\}$
- Целые рациональные функции: $P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$
- Дробные рациональные функции: $P_n(x) / Q_m(x)$
- Показательная функция: $a^x, \; a > 0, \; a \neq 1$ $\qquad sh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Логарифмическая функция: $\log_a a, \; a > 0, \; a \neq 1$
- Тригонометрические и обратные тригонометрические функции: $\sin(x), \; \cos(x), \; tg(x), \; ctg(x), \; \arcsin(x), \; \arccos(x), \ldots$
- Гиперболические функции: $sh(x), \; ch(x), \; th(x), \; cth(x), \ldots$

# Показательная и обратная – логарифмическая - функции

@ $a^x, \quad a > 0, \; a \neq 1$

$$y = f(x)$$
$$\to x = f(y)$$
$$\to y = f^{-1}(x)$$




$\log_a x, \quad a > 0, \; a \neq 1$

$\log_e x \to \ln x$