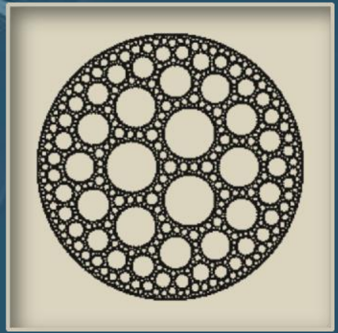
НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ



{ определение непрерывности функции в точке - пример - классификация точек разрыва – примеры функции, непрерывной на множестве - свойства непрерывных функций - равномерно непрерывная функция }

Определение непрерывности функции в точке

- Пусть $f: X \to R^m,\ X \subseteq R^m$. Функция непрерывна в точке x_0 и x_0 - точка непрерывности функции $f(x)$, если $x_0 \in X$, x_0 – предельная точка X и существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

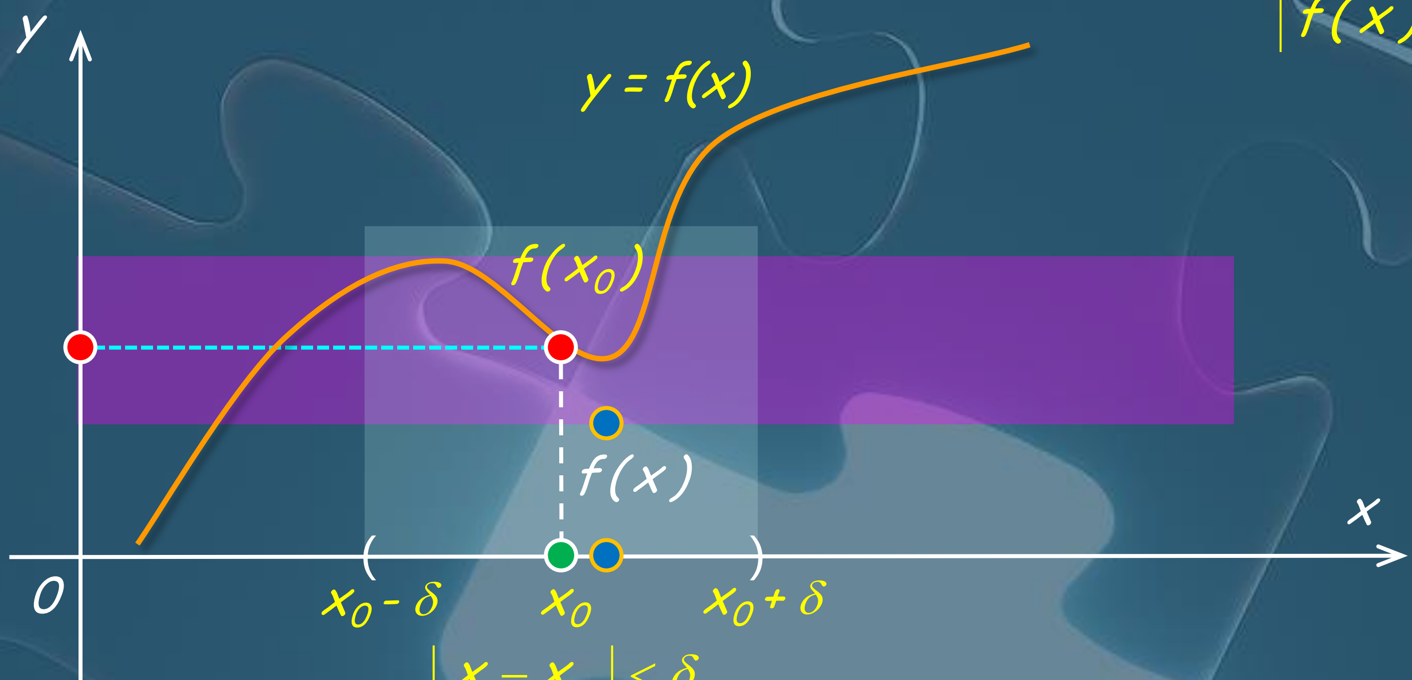
- x_0 – точка разрыва функции $f(x)$, если x_0 – предельная точка X и она не является точкой непрерывности $f(x)$.

Определение непрерывности функции в точке

- Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0: \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$



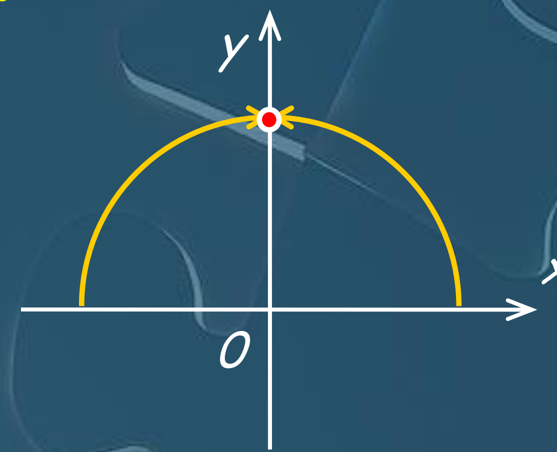
$$|x - x_0| < \delta$$

Определение непрерывности функции в точке

- Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 если $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$$y = \sqrt{1 - x^2} \qquad D: |x| \le 1$$

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{1 - x^2} = 1 = y\big|_{x=0} = \sqrt{1 - 0^2} = 1$$



- Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции

$$\exists \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$$

$$\exists \Delta x \Rightarrow infinitesimal \Rightarrow \exists \Delta y \Rightarrow infinitesimal$$

@ Доказать, что функция e^x непрерывна в точке 0

Доказательство

$$|e^x - 1| < \varepsilon \qquad |x| < \delta(\varepsilon)$$

$$-\varepsilon < e^x - 1 < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad 1 - \varepsilon < e^x < 1 + \varepsilon$$

логарифмируем последние неравенства по основанию e

$$\ln(1 - \varepsilon) < x < \ln(1 + \varepsilon) \qquad -\ln\frac{1}{1-\varepsilon} < x < \ln(1+\varepsilon)$$

$$\delta(\varepsilon) = \min\left[\ln(1+\varepsilon),\ \ln\frac{1}{1-\varepsilon}\right] \qquad -\delta(\varepsilon) < x < \delta(\varepsilon)$$

Итак, чтобы заданная функция была непрерывна при $x = 0$, достаточно потребовать $|x| < \ln(1+\varepsilon)$

Классификация точек разрыва

x_0 предельные точки X — первого (I) рода — второго (II) рода

$$\exists\delta>0:\quad X\cap(x_0;x_0+\delta)=\{\}$$

$$\exists\lim_{x\to x_0-0} f(x)\in R\setminus\{f(x_0)\}$$

$$x_0\notin X\ \vee\ \nexists\lim_{x\to x_0-0} f(x)\in R$$

$$\exists\delta>0:\quad X\cap(x_0;x_0-\delta)=\{\}$$

$$\exists\lim_{x\to x_0+0} f(x)\in R\setminus\{f(x_0)\}$$

$$x_0\notin X\ \vee\ \nexists\lim_{x\to x_0+0} f(x)\in R$$

$$\forall\delta>0:\quad X\cap(x_0;x_0-\delta)\ne\{\},\quad X\cap(x_0;x_0+\delta)\ne\{\}$$

$$\exists\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)\in R$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)\ne f(x_0)\ \vee$$

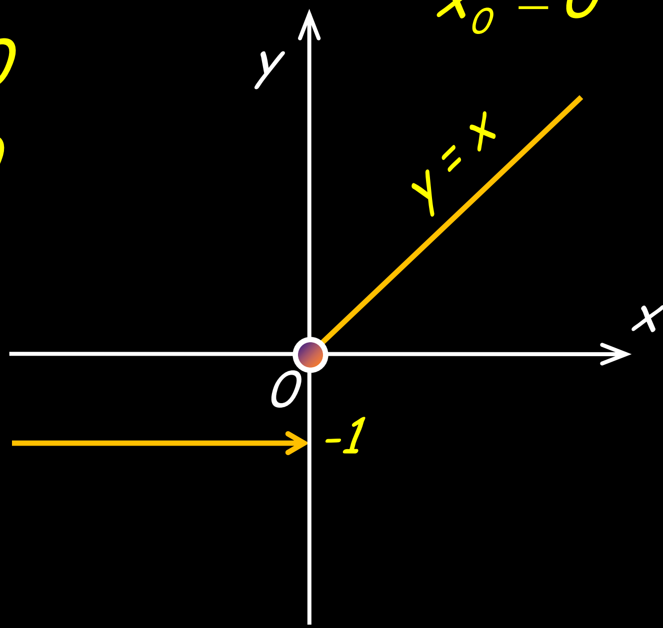
$$\lim_{x\to x_0+0} f(x)\ne f(x_0)\ \vee$$

$$x_0\notin X$$

Не существует хотя бы одного конечного одностороннего предела

@ Исследовать на разрыв функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1 \ne f(0) = 0$$

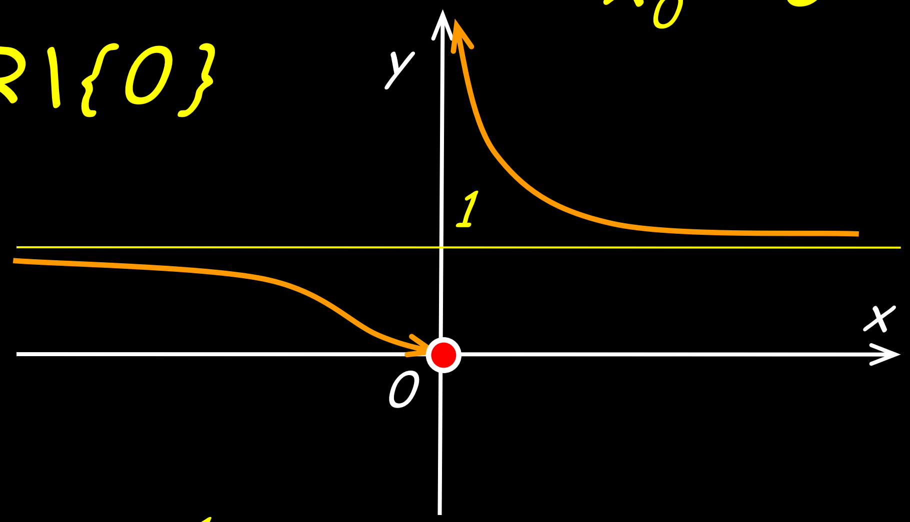
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \ge 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x \ge 0}} x = f(0) = 0$$

В точке x_0 - разрыв первого рода

@ Исследовать на разрыв функцию

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}},\ D: x \in R \setminus \{0\}$$

$$x_0 = 0$$



$$\lim_{x \to -\infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} 2^{\frac{1}{x}} = 0 \quad \nexists f(0)$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 2^{\frac{1}{x}} = \infty \quad \nexists f(0) \qquad \lim_{x \to \infty} 2^{\frac{1}{x}} = 1$$

В точке x_0 - разрыв второго рода

Функции, непрерывные на множестве

- Функция непрерывна в точке, если данная точка является ее точкой непрерывности, функция непрерывна на множестве, если она непрерывна в каждой точке данного множества.

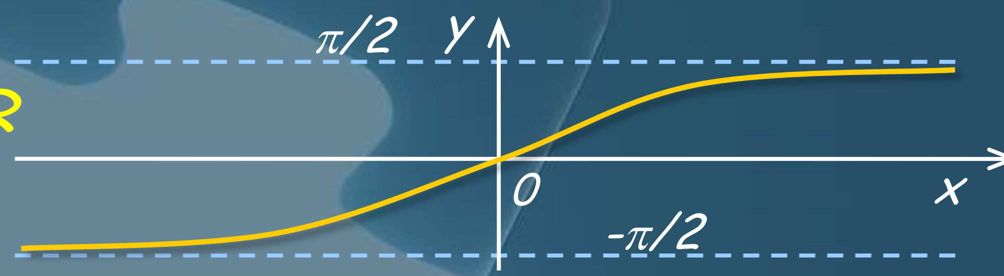
Пусть $y = f(x)$ - непрерывна и строго монотонна на промежутке X, тогда справедливо следующее:

на промежутке Y существует непрерывная обратная функция $x = f^{-1}(y)$,

характер монотонности обратной функции такой же, как и у прямой.

Все элементарные функции – непрерывны в области своего определения.

$$y = arctgx \quad D: x \in R$$



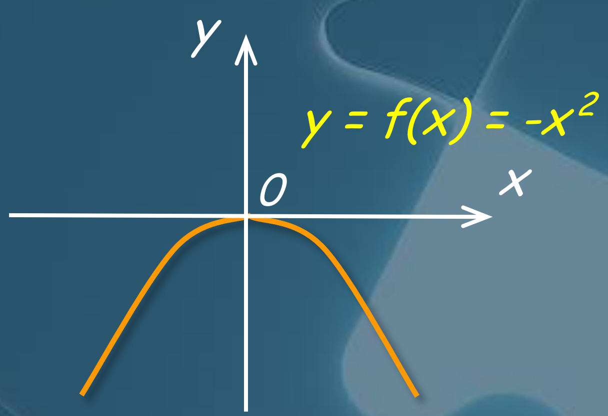
Свойства непрерывных функций

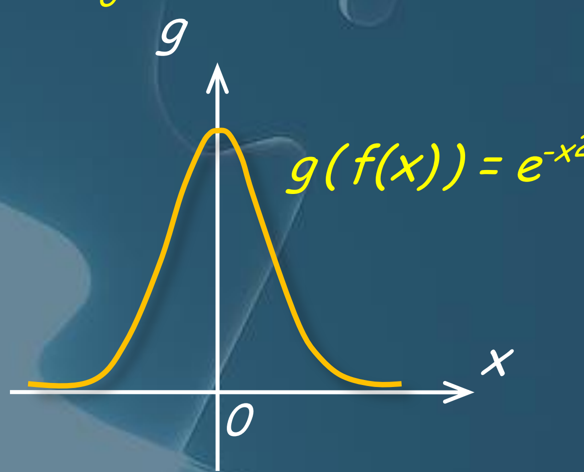
- Теорема 1

Пусть $X \subseteq R^n$, $f, g : X \to R^m$ непрерывны в $x_0 \in X$. Тогда $f+g$, fg, и f/g (если $g(x_0) \neq 0$) непрерывны в x_0.

- Теорема 2

Если $X \subseteq R^n, Y \subseteq R^m$, $f : X \to Y$, $g : Y \to R^l, y_0 = f(x_0)$, f непрерывна в x_0, g непрерывна в y_0, тогда $g(f(x))$ непрерывна в x_0.





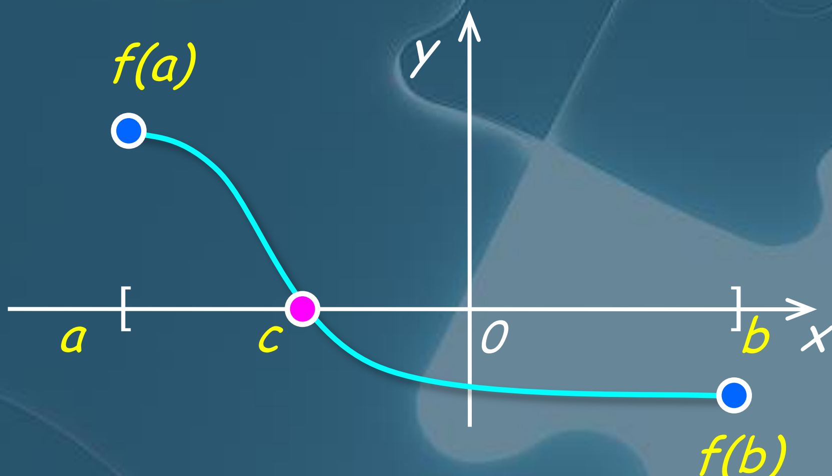
Свойства непрерывных функций

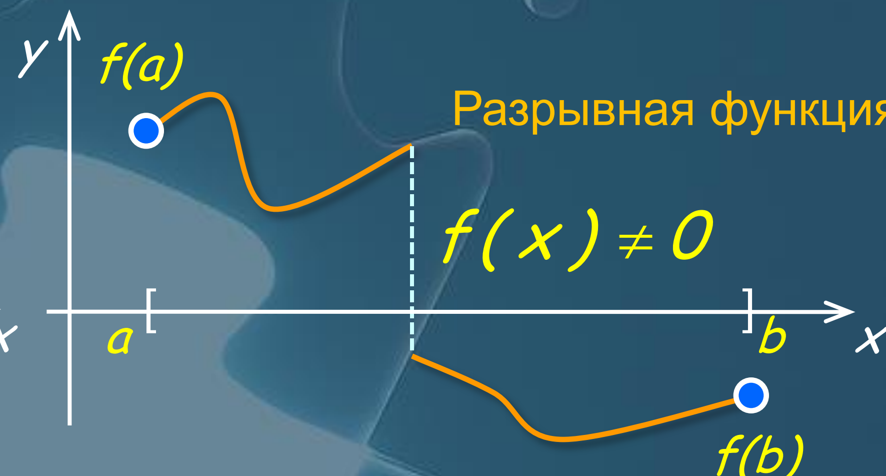
- Теорема 3 (Вейерштрасса)

Область значений непрерывной на замкнутом ограниченном множестве функции замкнута и ограничена.

- Теорема 4 (Больцано–Коши, о промежуточном значении)

Если $f:[a;b]\to R$ непрерывна на $[a,b]$ и $f(a)f(b)<0$, то существует $c\in(a;b)$, для которой $f(c)=0$.





Равномерно непрерывная функция

- Функция $f : X \to R^m,\ X \subseteq R^n$ равномерно непрерывна на X, если

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, x' \in X : |x - x'| < \delta \to |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Пример

$$f(x) = \sin\frac{1}{x} \quad \text{н.ф.} \ x \in (0; \frac{2}{\pi}] \quad x_0 = \frac{2}{(2n+1)\pi}, \quad x = \frac{1}{n\pi}, \quad n \in N$$

$$\Rightarrow f(x_0) = \sin\frac{(2n+1)\pi}{2} = \pm 1, \ f(x) = \sin(n\pi) = 0$$

То есть для $\varepsilon = 1$ нельзя указать δ, удовлетворяющее неравенству $|x - x_0| < \delta$

$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| = 1$$

одновременно для всех $x, x_0 \in (0, \frac{2}{\pi}]$.

Равномерной непрерывности нет.