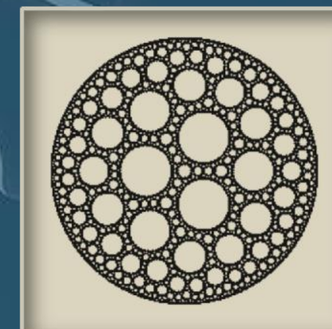
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ



{ определение производной функции – правила дифференцирования – дифференцирование обратной функции – производные основных элементарных функций – правило дифференцирования сложной функции –дифференцирование степенно-показательной функции – дифференцирование неявно-заданной функции – дифференцирование функции, заданной в параметрической форме – примеры }

Определение производной функции

- Пусть $f: X \to Y,\ X \subseteq R$ функция, определенная на $[a; b]$.

Взяв произвольное число $x_0 \in [a, b]$,

составим отношение

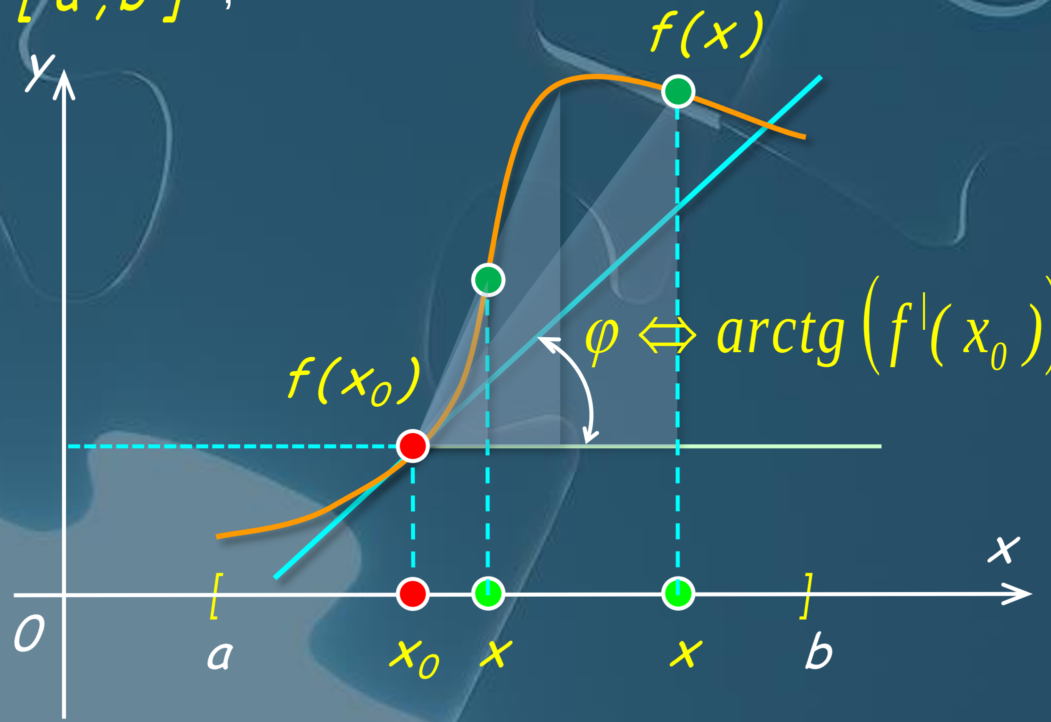
$$\psi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$(a < x < b,\ x \neq x_0)$$

Производной функции называют

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \psi(x)$$

если этот предел существует.



Определение производной функции

- Производной функции $f(x)$ в точке x называют предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, если этот предел существует.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{d\left(f(x)\right)}{dx}=\frac{df}{dx}$$

Пример: найти производную функции $f(x)=x^2-x$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-(x+\Delta x)-x^2+x=2x\Delta x+(\Delta x)^2-\Delta x$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2-\Delta x}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}2x+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x-\lim_{\Delta x\to 0}1=2x-1$$

Определение производной функции

- Если производная $f'(x)$ определена в точке x, то говорят, что функция *дифференцируема* в точке x.

  Если функция определена в каждой точке некоторого множества $E \subset [a,b]$, то говорят, что функция f *дифференцируема* на E.

  Возможны *левосторонняя* и *правосторонняя* производные

$$f'_-(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_+(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- Пусть функция f определенная на $[a; b]$. Если f дифференцируема в точке $x \in [a,b]$, то она непрерывна этой точке.

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x \quad \Delta x \to 0 \Rightarrow f'(x) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \Delta f(x) \to 0$$

Правила дифференцирования

- Пусть функции f и g определенны на $[a; b]$ и дифференцируемы в точке $x \in [a; b]$. Тогда в этой точке дифференцируемы: $f + g$, $f \cdot g$, f / g

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x) \qquad (c \cdot g(x))' = c \cdot g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2} \qquad (g(x) \neq 0)$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = h(x) \qquad h'(x) = \lim_{t \to x} \frac{h(t) - h(x)}{t - x} =$$

$$= \lim_{t \to x} \left(\frac{1}{g(t) g(x)} \left[g(x) \frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x) \frac{g(t) - g(x)}{t - x} \right] \right)$$

@ Найти производную функции a^x

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \Rightarrow \left\langle a^{\Delta x} - 1 = t,\ \ \Delta x \to 0, t \to 0 \right\rangle \Rightarrow$$

$$a^x \lim_{t \to 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = a^x \lim_{t \to 0} \frac{1}{\frac{1}{t}\log_a(1+t)} = a^x \lim_{t \to 0} \frac{1}{\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}}} = a^x \frac{1}{\log_a e} = a^x \ln a$$

Найти производную функции $(x^n)'$ $\quad n \in N$

$$(x^n)' = (x \cdot x \cdot x \cdot \ldots . x \cdot x)' =$$

$$= x' x^{n-1} + x(\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}^{n-1})' =$$

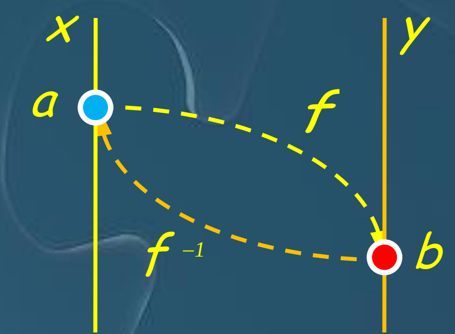
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$= x^{n-1} + x^{n-1} + x(\overbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \cdot x}^{n-2})' = \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet = nx^{n-1}$$

Дифференцирование обратной функции

- Пусть функция f непрерывна и строго монотонна в некоторой окрестности точки a. Если f дифференцируема в точке a и $f'(a) \neq 0$, то обратная функция f^{-1} дифференцируема в точке $b = f(a)$.

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$



$$y = f(x) \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1})} \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Пример

@ Найти производную функции $\log_a x$

$$(\log_a x)' = \frac{d\log_a x}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\left.\frac{da^y}{dy}\right|_{y=\log_a x}} = \frac{1}{\left.a^y \ln a\right|_{y=\log_a x}} = \frac{1}{x\ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}, \quad x > 0$$

Найти производную функции $\arcsin x$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$\frac{d\arcsin x}{dx} = \frac{1}{\left.\frac{d\sin y}{dy}\right|_{y=\arcsin x}} =$$

$$= \frac{1}{\left.\cos y\right|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\left.\sqrt{1-\sin^2 y}\right|_{y=\arcsin x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1;1)$$

Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^a	ax^{a-1}, $x \in R$ $a \in N$, $x \in R \setminus \{0\}$ $a \in Z$, $x \in R^+$ $a \in R$
$\sqrt{x}$	$1/2\sqrt{x}$
e^x	e^x, $x \in R$
a^x	$a^x \ln a$, $x \in R$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$, $x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}\frac{1}{x}$, $x > 0$

Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x,\quad x \in R$
$\cos x$	$-\sin x,\quad x \in R$
tgx	$\dfrac{1}{\cos^2 x},\quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$
$ctgx$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x},\quad x \neq \pi k$
$\arcsin x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1;1)$
$\arccos x$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1;1)$

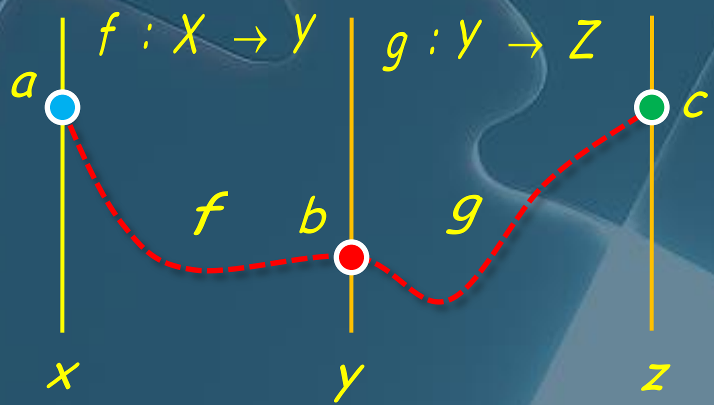
Производные основных элементарных функций

$f(x)$	$f'(x)$
$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in R$
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\operatorname{ch}(x), \quad x \in R$
$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\operatorname{sh}(x), \quad x \in R$
$\operatorname{th} x$	$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in R$
$\operatorname{cth} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0$

Правило дифференцирования сложной функции

- Пусть функция $g(f(x))$ дифференцируема в точке $y = f(x)$, а функция f дифференцируема в точке x. Тогда производная функции $g(f(x))$ может быть найдена по следующему (цепному) правилу

$$(g(f(x)))' = \frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{dg(f(x))}{df} \frac{df(x)}{dx} = g'_f(f(x)) f'_x$$



$g : X \to Z \quad g(f(x))$

$$\frac{dg(f(x))}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta f \to 0}} \frac{\Delta g}{\Delta f} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta f \to 0}} \frac{\Delta g}{\Delta f} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta f \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta f} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{dg}{df} \frac{df}{dx}$$

Пример

@ Найти производную функции $(\ln(tg(e^x)))^3$

$$\left[(\ln(tg(e^x)))^3\right]' = \left[(y(g(h(f(x)))))^3\right]' \Rightarrow \left\langle (y^3)' = 3y^2y' \right\rangle \Rightarrow$$

$$= 3(\ln(tg(e^x)))^2 \cdot \left[\ln(tg(e^x))\right]' =$$

$$= 3(\ln(tg(e^x)))^2 \frac{1}{tg(e^x)} \left[tg(e^x)\right]' =$$

$$= 3(\ln(tg(e^x)))^2 \frac{1}{tg(e^x)} \frac{1}{cos^2\left(e^x\right)} \left[e^x\right]' =$$

$$= \frac{6e^x(\ln(tg(e^x)))^2}{sin(2e^x)}$$

Дифференцирование степенно-показательной функции

- Функцию $y = g(x)^{f(x)}$ дифференцируют, предварительно её прологарифмировав

$$y(x) = g(x)^{f(x)} \qquad \ln(y) = f(x)\ln g(x)$$

$$(\ln(y))' = \frac{y'}{y}$$ Производная логарифма – логарифмическая производная

$$\frac{y'}{y} = f'(x)\ln g(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)} \Leftrightarrow y' = y\left(f'(x)\ln g(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

$$\Rightarrow \quad y' = g(x)^{f(x)}\left(f'(x)\ln g(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right)$$

Пример

@ Найти производную функции $y = x^x$

$$y' = \left[x^x\right]' \qquad \ln y = \ln(x^x) = x\ln x$$

$$\frac{y'}{y} = x'\ln x + x(\ln x)' \Rightarrow \qquad \frac{y'}{y} = \ln x + x\frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y' = y(\ln x + 1) \Rightarrow \qquad y' = x^x(\ln x + 1)$$

Дифференцирование неявно-заданной функции

- При нахождении производной неявно-заданной функции дифференцируют уравнение $F(x, y(x)) = c$, считая, что функция $y(x)$ сложная функция

$$F(x, y(x)) = c \quad \Rightarrow$$

$$(F(x, y(x)))' = (c)' = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Phi(x, y(x), y'(x)) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$y' = \Psi(x, y(x))$$

Пример

@ *Найти производную функции и записать уравнение касательной к графику функции* $x^2 + y^2 = 1$

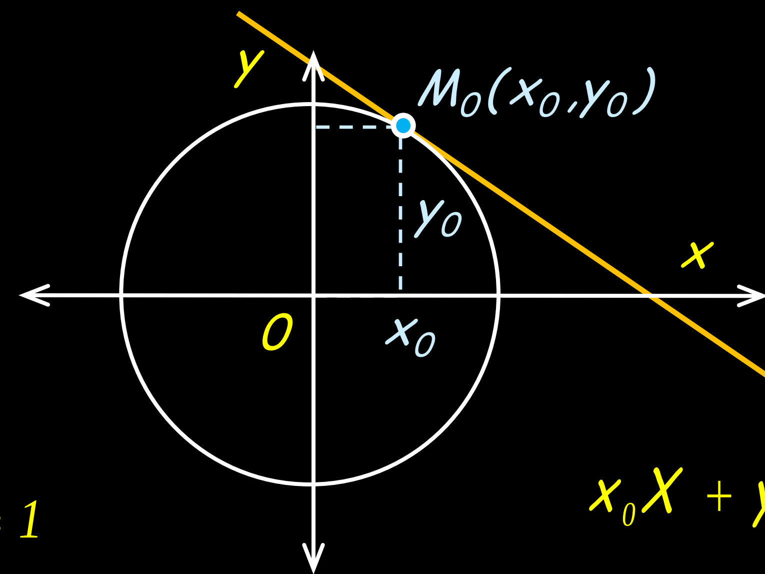
$$(x^2 + y^2)' = 1' = 0 \qquad (x^2 + y^2)' = 2x + 2yy' = 0$$

$$y' 2y = -2x \qquad y' = -\frac{x}{y}$$

$$(Y - y_0) = -\frac{x_0}{y_0}(X - x_0)$$

$$Yy_0 - y_0^2 = -Xx_0 + x_0^2$$

$$x_0X + y_0Y = x_0^2 + y_0^2 = 1$$



$$x_0X + y_0Y = 1$$

Дифференцирование функции, заданной в параметрической форме

- При нахождении производной функции, заданной в параметрической форме находят производные от y и x по параметру t и делят их друг на друга.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_t = \dfrac{dx(t)}{dt} \\ y'_t = \dfrac{dy(t)}{dt} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy(t)}{dt}}{\dfrac{dx(t)}{dt}}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$$

Пример

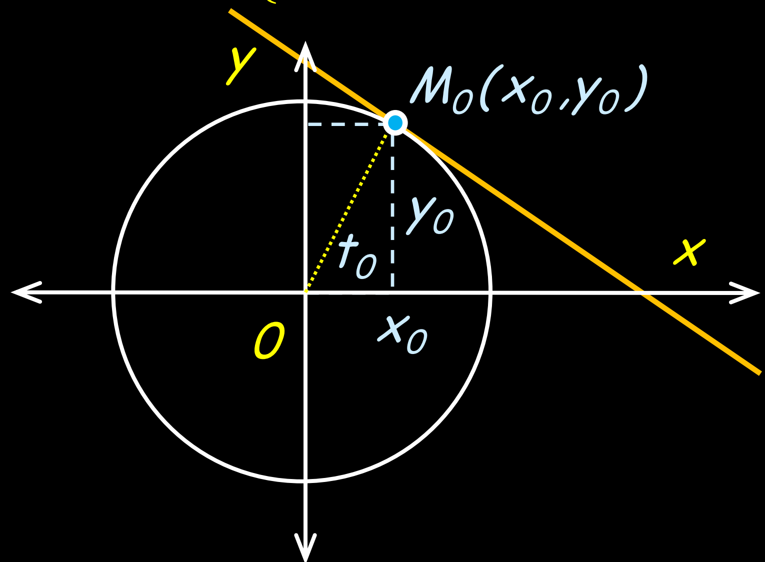
@ Найти производную функции и записать уравнение касательной к графику функции

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{cases} \dot{x} = (\cos t)'_t = -\sin t \\ \dot{y} = (\sin t)'_t = \cos t \end{cases}$$

$$y' = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$y' = -\frac{\cos t}{\sin t}$$



$$\cos t_0 X + \sin t_0 Y = 1$$