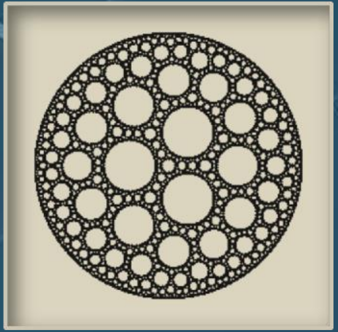
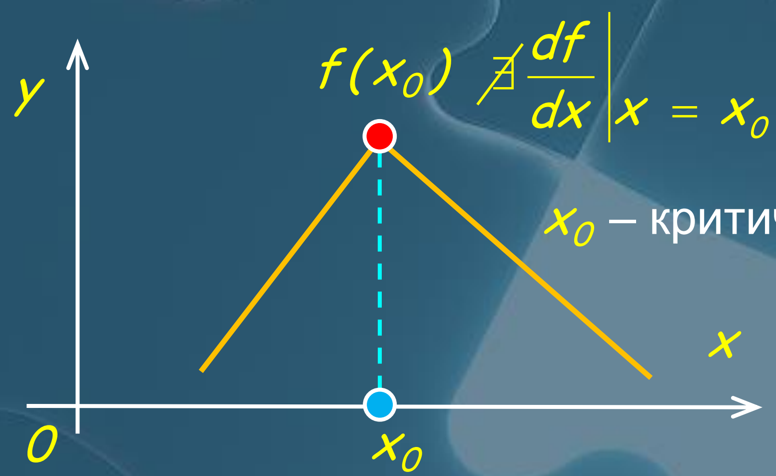
ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ



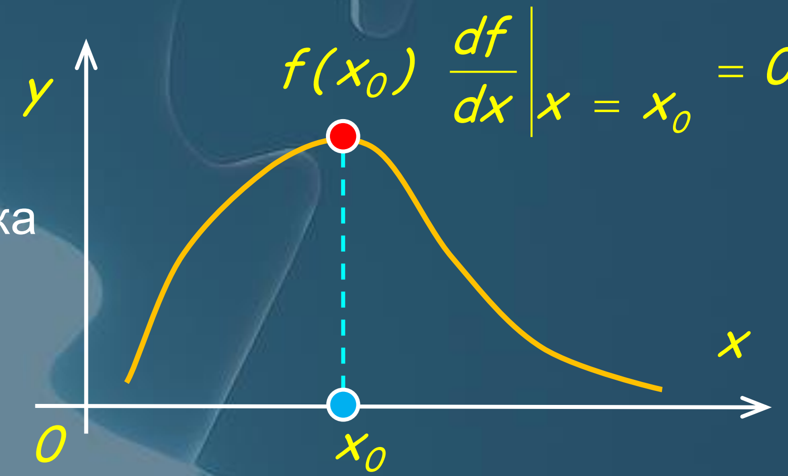
{ определение экстремума – необходимое и достаточные условия существования экстремума – глобальный экстремум – примеры }

Определение экстремума

- Точка x_0 называется точкой локального максимума (минимума) функции $f(x)$, если на некоторой окрестности $U(x_0)$ функция $f(x)$ определена и $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$ $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$
- Теорема (Ферма). *Необходимые условия экстремума*. Пусть x_0 точка экстремума функции $f(x)$. Тогда производная функции $f'(x_0)$ либо не существует, либо $f'(x_0) = 0$.



x_0 – критическая точка



Достаточные условия существования экстремума

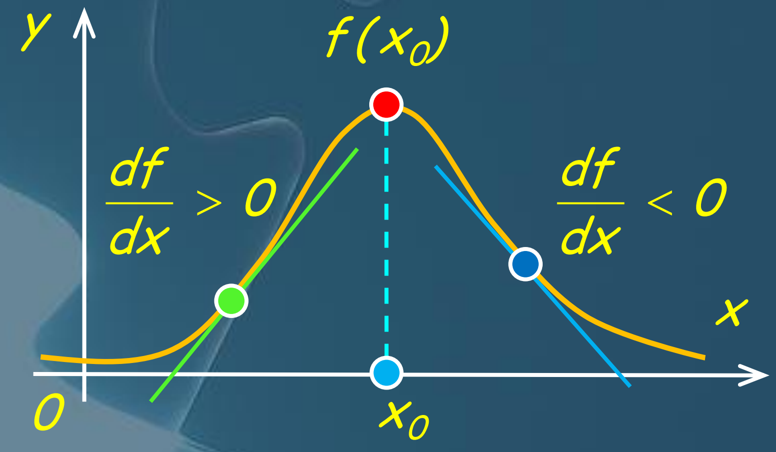
- Теорема. *Достаточные условия экстремума*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке локального экстремума x_0 и дифференцируема в окрестности этой точки. Пусть производная функции $f'(x_0)$ меняет знак при переходе через x_0. Тогда x_0 - точка экстремума.

Максимум $f: \dfrac{df}{dx}$ $"+" \Rightarrow "-"$

Минимум $f: \dfrac{df}{dx}$ $"-" \Rightarrow "+"$

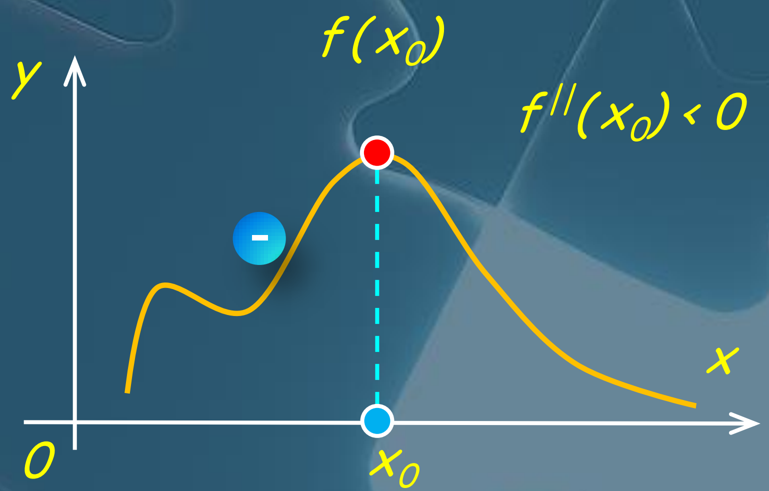
Доказательство

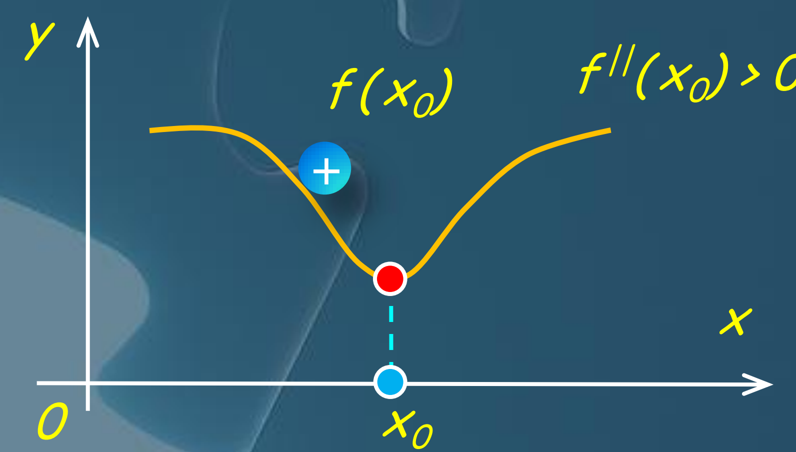
Пусть для определенности $f'(x_0) > 0$ в окрестности $U(x_0 - 0)$ и $f'(x_0) < 0$ в окрестности $U(x_0 + 0)$. Тогда из формулы конечных приращений Лагранжа $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0)$ следует, что приращение функции меняет знак с "+" на "-" при переходе через x_0. Следовательно x_0 - точка экстремума (максимума). $\square$



Достаточные условия существования экстремума

- *Достаточные условия экстремума*. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке локального экстремума x_0. Если функция дважды дифференцируема в этой точке $f''(x_0)$, то x_0 - точка экстремума. Если знак у $f''(x_0)$ минус, то в точке x_0 - функция имеет локальный максимум, если знак у $f''(x_0)$ плюс, то в точке x_0 - локальный минимум.





Пример

@ Найти локальный экстремум для функции $\ln(x^2+1)$

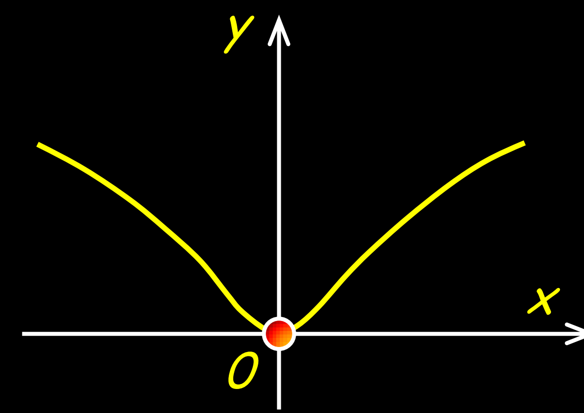
Решение

$$y=\ln(x^2+1) \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+1} \Rightarrow \frac{2x}{x^2+1}=0$$

$$\Rightarrow x_0=0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x<0}<0 \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x>0}>0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \quad "-" \Rightarrow "+" \quad \Rightarrow y(0)=0 \Rightarrow Min$$

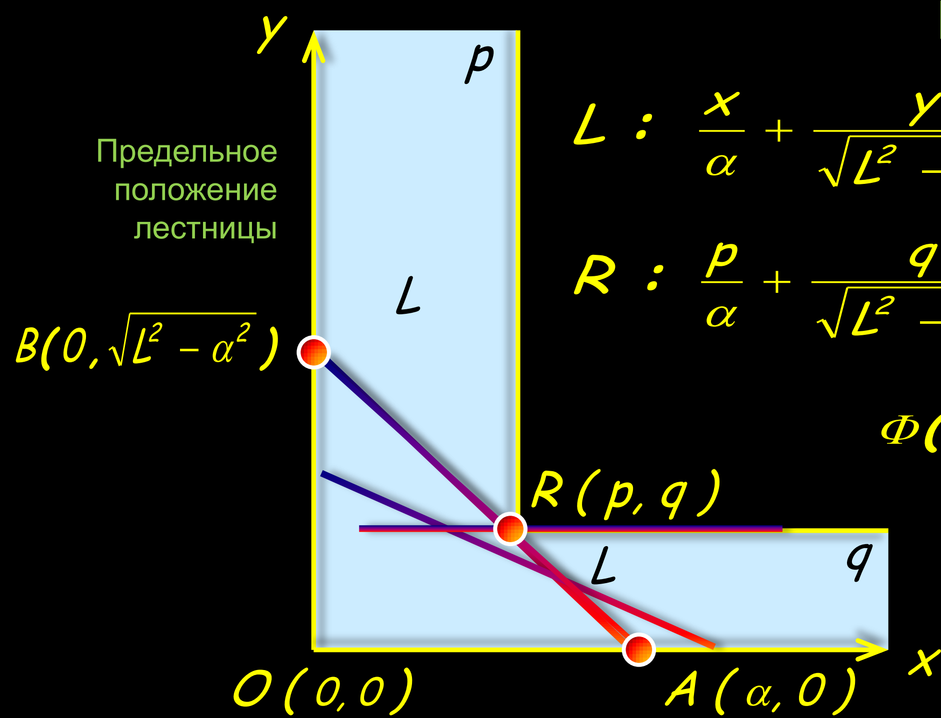


$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'=\left.\frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2}\right|_{x=0}=2>0$$

$$y''(0)>0 \Rightarrow Min$$

Пример

@ Удастся ли пронести лестницу длиной L через прямой поворот в коридоре с переходом размеров с p на q? Какой длины должна быть быть лестница ?



Решение

$$L:\ \frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\sqrt{L^2-\alpha^2}}-1=0$$

$$R:\ \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\sqrt{L^2-\alpha^2}}-1=0 \qquad \frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\sqrt{L^2-\alpha^2}}-1>0$$

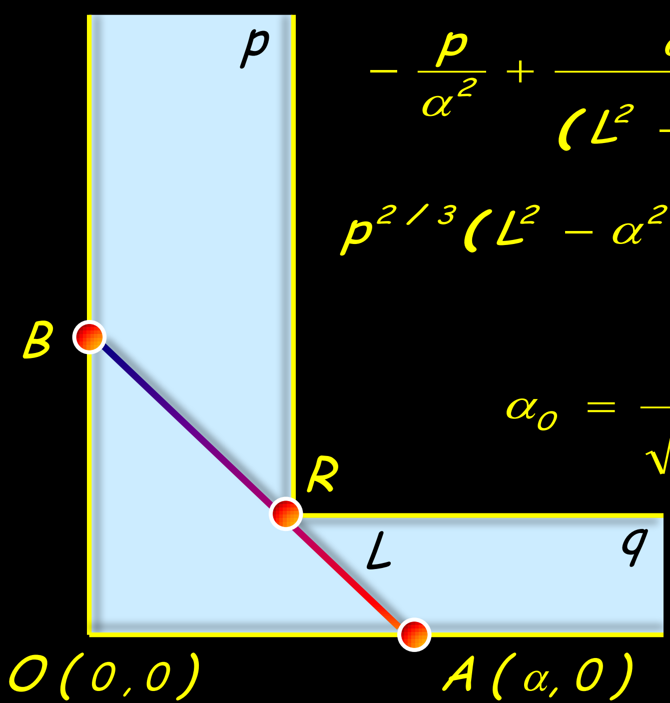
$$\Phi(\alpha)=\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\sqrt{L^2-\alpha^2}}-1,\ 0<\alpha<L$$

$$\frac{d\Phi(\alpha)}{d\alpha}=-\frac{p}{\alpha^2}+\frac{\alpha q}{(L^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Пример

@

$$\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} = \frac{2p}{\alpha^3} + \frac{q(L^2-\alpha^2)^{3/2} + 3\alpha^2 q\sqrt{L^2-\alpha^2}}{(L^2-\alpha^2)^3} > 0 \quad \forall\alpha\in(0,1)$$



$$-\frac{p}{\alpha^2} + \frac{\alpha q}{(L^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \qquad -p(L^2-\alpha^2)^{\frac{3}{2}} + \alpha^3 q = 0$$

$$p^{2/3}(L^2-\alpha^2) = \alpha^2 q^{2/3} \Leftrightarrow \alpha^2(p^{2/3}+q^{2/3}) = p^{2/3}L^2$$

$$\alpha_0 = \frac{p^{1/3}L}{\sqrt{p^{2/3}+q^{2/3}}} \qquad \alpha_0 \Rightarrow \Phi(\alpha) \Rightarrow Min$$

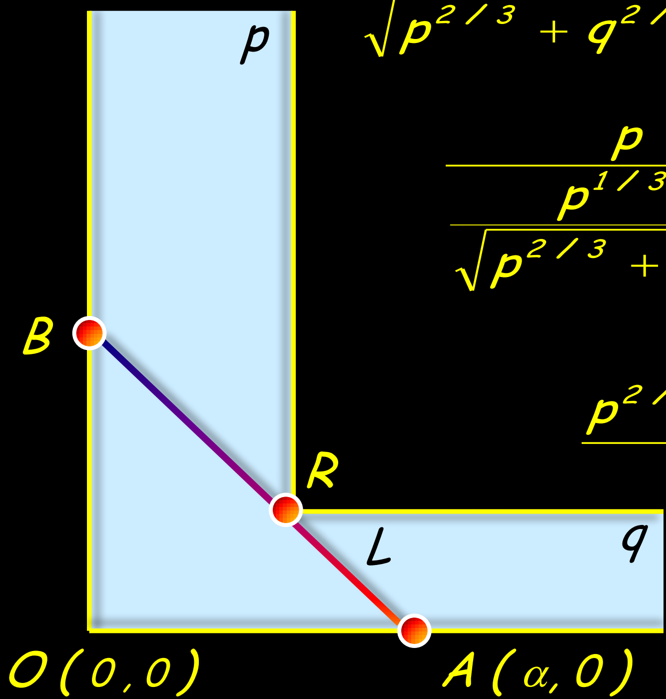
$$\frac{p}{\alpha_0} + \frac{q}{\sqrt{L^2-\alpha_0^2}} - 1 = 0$$

Пример

@

$$\frac{p}{\dfrac{p^{1/3}L}{\sqrt{p^{2/3}+q^{2/3}}}}+\frac{q}{\sqrt{L^2-\left(\dfrac{p^{1/3}L}{\sqrt{p^{2/3}+q^{2/3}}}\right)^2}}-1=0$$

$$\frac{p}{\dfrac{p^{1/3}L}{\sqrt{p^{2/3}+q^{2/3}}}}+\frac{q}{\sqrt{L^2-\dfrac{p^{2/3}L^2}{p^{2/3}+q^{2/3}}}}-1=0$$



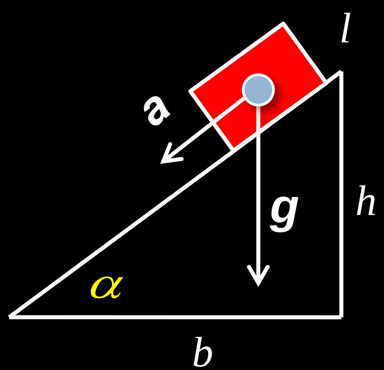
$$\frac{p^{2/3}\sqrt{p^{2/3}+q^{2/3}}}{L}+\frac{q^{2/3}\sqrt{p^{2/3}+q^{2/3}}}{L}-1=0$$

$$L_{max}=(p^{2/3}+q^{2/3})^{3/2}$$

Пример

Имеется множество наклонных плоскостей с одинаковыми основаниями, равными *b*, но разной высоты. При какой высоте *h* время *t* соскальзывания тела по наклонной плоскости без трения будет наименьшим?

Решение



$$l = \frac{at^2}{2} \qquad a = g\sin\alpha \qquad \frac{b}{\cos\alpha} = \frac{at^2}{2}$$

$$t = \sqrt{\frac{2b}{g\sin\alpha\cos\alpha}} = 2\sqrt{\frac{b}{g\sin 2\alpha}} \qquad \frac{dt}{d\alpha} = \frac{d\left(2\sqrt{\frac{b}{g\sin 2\alpha}}\right)}{d\alpha}$$

$$\frac{d\left(2\sqrt{\frac{b}{g\sin 2\alpha}}\right)}{d\alpha} = 2\sqrt{\frac{b}{g}}\,\frac{d\left(\frac{1}{\sqrt{\sin 2\alpha}}\right)}{d\alpha} = 2\sqrt{\frac{b}{g}}\left(\frac{-\cos 2\alpha}{\sqrt{\sin 2\alpha}\,\sin 2\alpha}\right) = 0$$

$$h = b$$

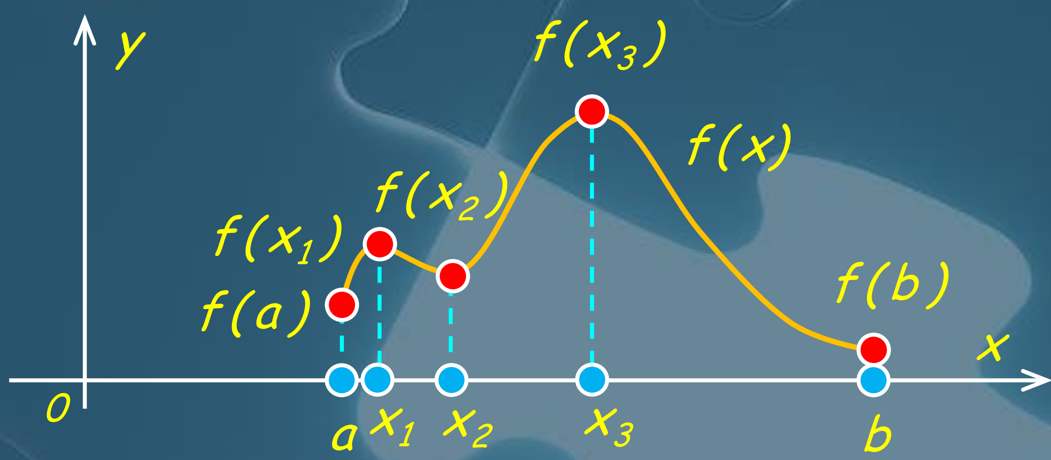
$$a_0 = \frac{\pi}{4} \qquad t_{min} = 2\sqrt{\frac{b}{g}}$$

Глобальный экстремум

- Функция *f(x)*, непрерывная на отрезке *[a, b]*, принимает на нем наибольшее и наименьше значения.

Найти глобальный экстремум – алгоритм

1) Находится локальный экстремум (или несколько) в точках внутри отрезка.
2) Вычисляется значение функции на концах отрезка.
3) Выбирается наибольшее и наименьшее значения функции.



	$f(a)$	
	$f(x_1)$	max_1
	$f(x_2)$	min
Max	$f(x_3)$	max_2
Min	$f(b)$	