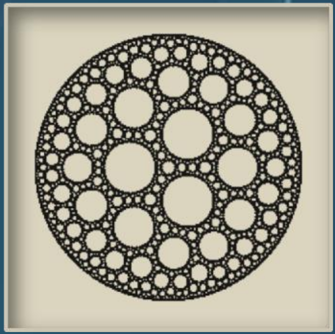
ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ



{ определения - примеры решения дифференциальных уравнений - математические модели в виде дифференциальных уравнений - циклоидальные часы - осцилляторы – примеры }

Определение

- *Обыкновенным дифференциальным уравнением* называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y(x)$ и производные искомой функции разных порядков. Порядок старшей производной определяет порядок уравнения.

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$$

Пример ОДУ : $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x^2}y = x^2$

- Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = \varphi(x)$, которая будучи подставленной в уравнение, обращает его в тождество

$$F\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}, \frac{d^2\varphi(x)}{dx^2}, \frac{d^3\varphi(x)}{dx^3}, \ldots, \frac{d^n\varphi(x)}{dx^n}\right) \equiv 0$$

Решение часто называют интегралом дифференциального уравнения.

Пример

@ *Найти решение дифференциального уравнения* $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0$

$y=\sin 2x \qquad y=C_1\sin 2x+C_2\cos 2x \qquad y=C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix}$

Проверка:

$$\frac{d^2\sin 2x}{dx^2}+4\sin 2x=0\Rightarrow\frac{d(2\cos 2x)}{dx}+4\sin 2x=0\Rightarrow -4\sin 2x+4\sin 2x=0\Rightarrow 0\equiv 0$$

Проверка:

$$\frac{d^2(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)}{dx^2}+4(C_1\sin 2x+C_2\cos 2x)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4C_1\sin 2x-4C_2\cos 2x+4C_1\sin 2x+4C_2\cos 2x=0\Rightarrow 0\equiv 0$$

Проверка:

$$\frac{d^2(C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix})}{dx^2}+4(C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix})=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{d(2C_1ie^{2ix}-2C_2ie^{-2ix})}{dx}+4(C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(i^2C_1e^{2ix}+i^2C_2e^{-2ix}+C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix})=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(-C_1e^{2ix}-C_2e^{-2ix}+C_1e^{2ix}+C_2e^{-2ix})=0\Rightarrow 0\equiv 0$$

Пример решения ОДУ с начальными условиями

- $\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0 \quad y(1) = 1$

Решение

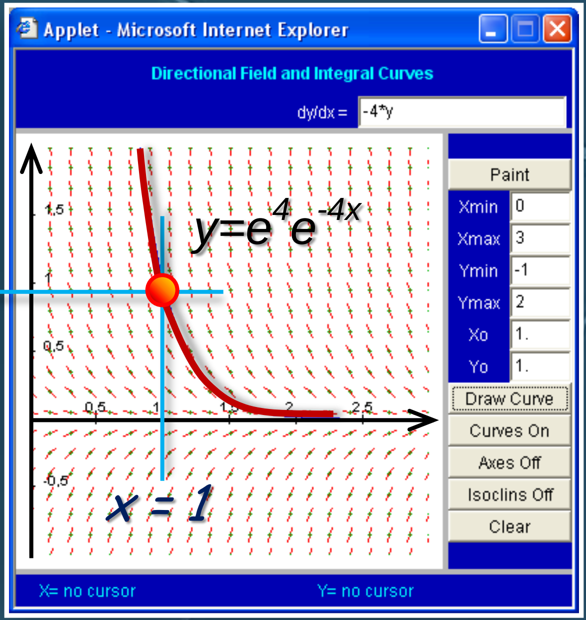
$$\frac{dy}{dx} + 4y = 0 \Rightarrow dy = -4ydx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -4dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -4\int dx \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -4x + \ln C$$

$$y = Ce^{-4x} \qquad y(1) = Ce^{-4} = 1 \Rightarrow C = e^4$$

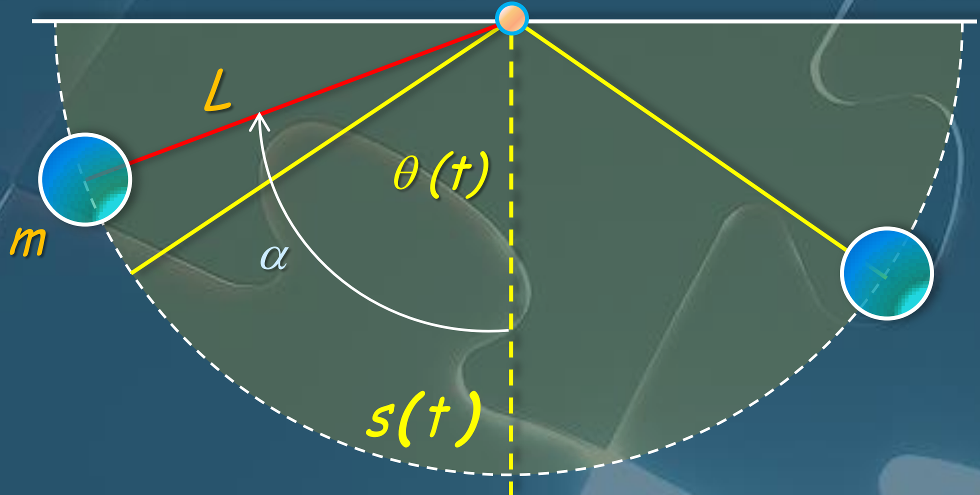
$y = 1$



$$y = \frac{e^4}{e^{4x}}$$

Проверка : $(Ce^{-4x})' + 4Ce^{-4x} = 0 \Rightarrow -Ce^{-4x} + Ce^{-4x} \equiv 0$

- Модель колебаний маятника. Почему маятниковые часы не являются точными ?



$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(L\cos\theta - L\cos\alpha)$$

$$v = \frac{ds}{dt} = L\frac{d\theta}{dt} \qquad (s = L\theta)$$

$$\frac{1}{2}L^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = gL(\cos\theta - \cos\alpha)$$

Так как θ убывает с возрастанием t, то из последнего дифференциального уравнения, разделив переменные, получаем

$$dt = -\sqrt{\frac{L}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} \qquad T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}$$

Математические модели в виде ДУ

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}} = 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}},\quad k = \sin\frac{\alpha}{2}$$

Сделаем замену :

$$\sin\frac{\theta}{2} = k\sin\varphi \quad 0 \le \theta \le \alpha \to 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$$

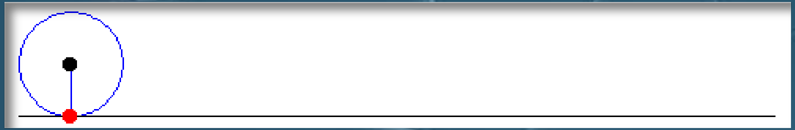
$$\frac{1}{2}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta = k\cos\varphi d\varphi \qquad d\theta = \frac{2k\cos\varphi d\varphi}{\cos\frac{\theta}{2}} = \frac{2\sqrt{k^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\varphi}} = 4\sqrt{\frac{L}{g}}F\left(k,\frac{\pi}{2}\right) \qquad F(k,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2\sin^2 t}}$$

Эллиптический интеграл 1-го рода

Циклоидальные часы

- Х. Гюйгенс в 1673 год сконструировал точные часы.
Он построил колебательную систему с постоянной амплитудой, не зависящей от начальных условий.
Задача : найти такую кривую, чтобы время необходимое для спуска по ней до фиксированного горизонта тяжелой материальной точки, бывшей в начальный момент времени в состоянии покоя, не зависело от исходного положения точки на этой кривой. Такой *изохронной* (таутохронной) кривой оказалась циклоида.

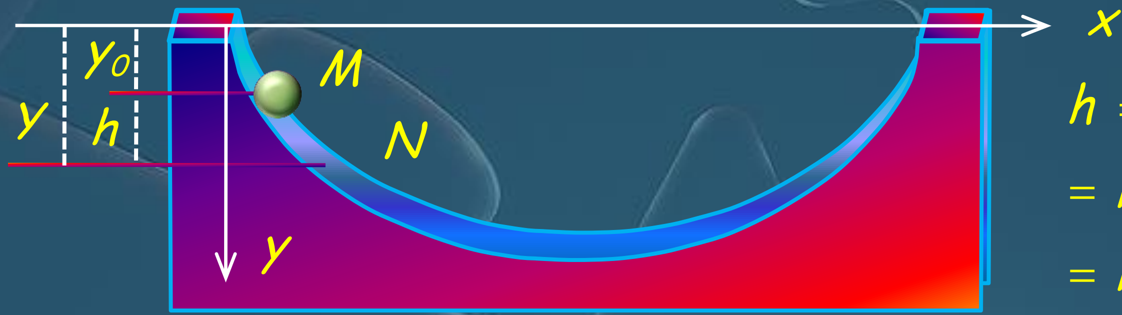


$$\begin{cases} x = r(\theta - \sin\theta) \\ y = r(1 - \cos\theta) \end{cases} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi$$

Была предложена конструкция: в доске вырезается желоб в форме циклоиды. По нему катится шарик. Трение отсутствует.

Циклоидальные часы

Пусть x_0, y_0 – координаты исходного положения точки M (центра шарика) и θ_0 – значение параметра из уравнения. Когда шарик окажется в положении $N(\theta)$, то его уровень понизится на расстояние



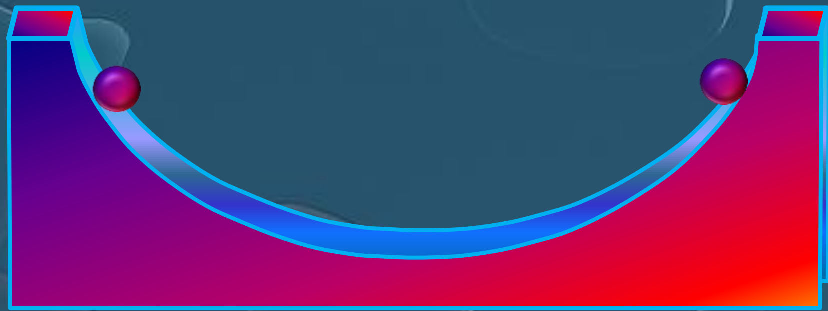
$$h = y - y_0 =$$
$$= r(1 - \cos\theta) - r(1 - \cos\theta_0) =$$
$$= r(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2} = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \qquad v = \sqrt{2gr(\cos\theta_0 - \cos\theta)} \qquad v = \frac{ds}{dt}$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{r^2(1 - \cos\theta)^2 + r^2\sin\theta^2}\, d\theta =$$
$$= r\sqrt{1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta}\, d\theta = 2r\sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

Циклоидальные часы



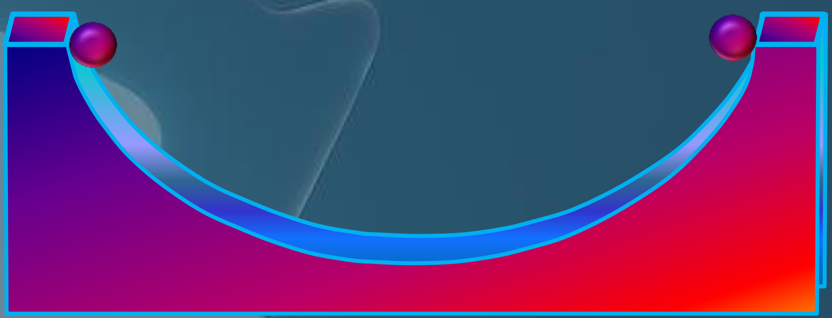
$$dt=\frac{2r\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0-\cos\theta)}}$$

$$t=\int\frac{2r\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0-\cos\theta)}}+c$$

$$T=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$T=\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{2r\sin\frac{\theta}{2}\,d\theta}{\sqrt{2gr(\cos\theta_0-\cos\theta)}}$$

$$T=-2\sqrt{\frac{r}{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{d(\cos\frac{\theta}{2})}{\sqrt{\cos^2\frac{\theta_0}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2})}}=\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$



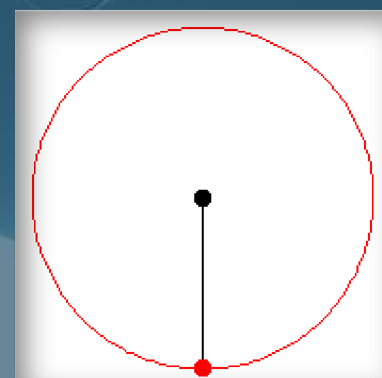
Колебания

Если уравнение $\frac{1}{2}L^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = gL(\cos\theta - \cos\alpha)$

продифференцировать еще раз, то уравнение колебаний примет вид ДУ 2-го порядка.

Свободные и вынужденные колебания описываются ДУ 2-го порядка

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\sin\theta = 0, \quad k = \sqrt{\frac{g}{L}}$$



$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\sin\theta = f(t)$$