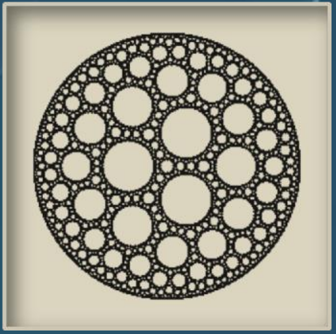
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА



{ задача Коши - геометрическая интерпретация дифференциального уравнения второго порядка - приемы интегрирования дифференциальных уравнений 2-го порядка - уравнение погони – примеры }

Задача Коши

- Дифференциальное уравнение второго порядка может иметь вид $F(x,y,y',y'') = 0$ или $y'' = f(x,y,y')$. Общим решением уравнения является функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, существенно зависящая от двух произвольных постоянных и обращающая данное уравнение в тождество при любых значениях этих постоянных. Частное решение получается при закреплении постоянных C_1, C_2 .

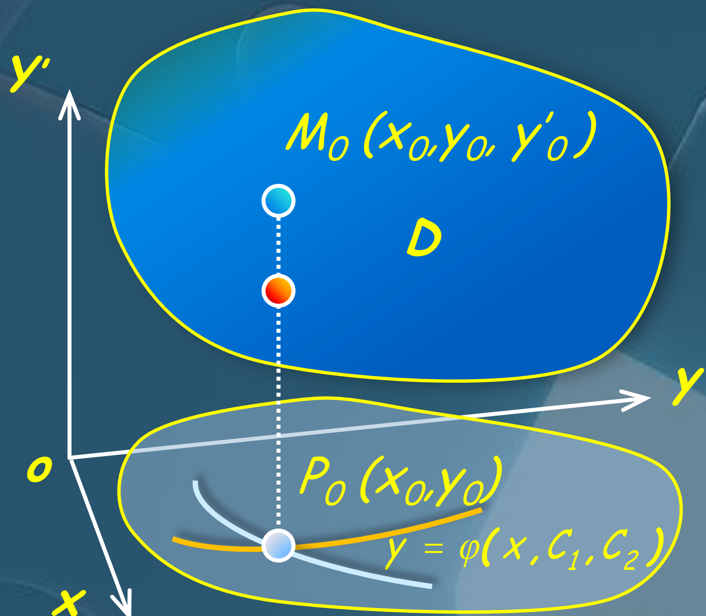
Задача отыскания решения дифференциального уравнения $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$ удовлетворяющего заданным начальным условиям $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$ называется задачей Коши.

Теорема

Если функция f - правая часть дифференциального уравнения $d^2y/dx^2 = f(x,y,dy/dx)$ непрерывна в некоторой замкнутой трехмерной области D: $oxyy'$ и имеет в этой области ограниченные частные производную $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial y'$, то каждой внутренней точке области D соответствует, и притом единственное, решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Задача Коши

Геометрически это означает, что через каждую точку $M_0(x_0, y_0, y'_0)$ области D проходит одна и только одна интегральная кривая рассматриваемого уравнения.



Данная теорема называется *теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_0$$

$$y = \varphi(x)$$

$$\varphi(x_0) = y_0$$

$$\varphi'(x_0) = y'_0$$

$$\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} \equiv f\left(x, \varphi(x), \frac{d\varphi(x)}{dx}\right)$$

Пример

@ *Решить дифференциальное уравнение второго порядка, при заданных начальных условиях*

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} \qquad y(1) = 1 \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = 1$$

$f'_y = 0$

$f'_{y'} = 1/x$

$D: x \neq 0$

Решение

$$\frac{dy}{dx} = v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x}v \Rightarrow \int\frac{dv}{v} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow v = C_1x$$

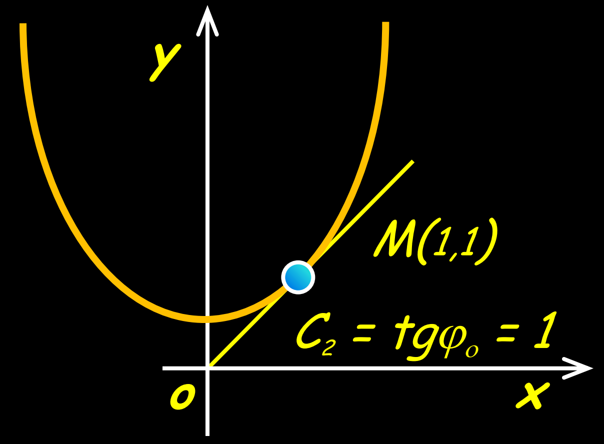
$$\frac{dy}{dx} = C_1x \Rightarrow y = C_1\frac{x^2}{2} + C_2$$

$$y = \frac{x^2+1}{2}$$

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow C_1\frac{1}{2} + C_2 = 1$$

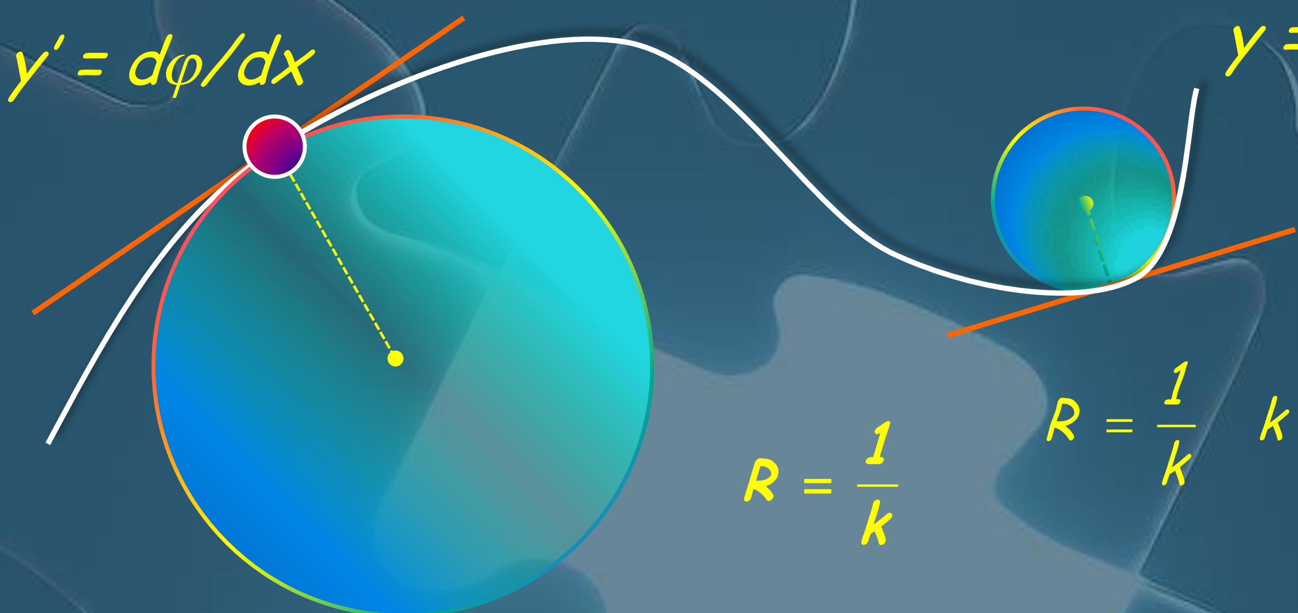
$$y'(1) = 1 \Leftrightarrow C_1 = 1$$

$$\begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$



Геометрическая интерпретация ДУ второго порядка

- Пусть дано дифференциальное уравнение второго порядка $F(x,y,y',y'')=0$..
  Этим уравнением для каждой точки $M(x,y)$ определяется связь между координатами точки, через которую проходит интегральная кривая, производной функции dy/dx - угловым коэффициент касательной к интегральной кривой, и, через вторую производную, кривизной кривой k.



$$k = \frac{\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right|}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Приемы интегрирования ДУ второго порядка

- Метод понижения порядка

Тип I $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$ $\dfrac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1$

- $y = \int \left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2$

Тип II $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$ $\dfrac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}{dx} = 2\dfrac{dy}{dx}f(y)$ $\Rightarrow \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 2\int f(y)dy + C_1$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}$$

- $\displaystyle\int \frac{dy}{\pm\sqrt{2\int f(y)dy + C_1}} = x + C_2$

- Метод понижения порядка

Тип III $\left\{\begin{array}{l} y'' = f(y') \\ y'' = f(x, y') \end{array}\right.$ $\quad y' = u,\ y'' = \dfrac{du}{dx} \Rightarrow$ $\left\{\begin{array}{l} \dfrac{du}{dx} = f(u) \\ \dfrac{du}{dx} = f(x, u) \end{array}\right.$

Тип IV $\begin{array}{l} y'' = f(y, y') \\ y' = \varphi'(x) \neq 0, \\ y = \varphi(x) \to м.ф. \end{array}$ $\quad y' = u,\ y'' = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{du}{dy}u$

$$\frac{du}{dy}u = \tilde{\varphi}(y, u), \quad \frac{du}{dy} = \tilde{\varphi}(y, u)/u = \varphi(y, u)$$

@ Решить дифференциальное уравнение $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2e^y \quad y(0) = 0, y'(0) = -2$

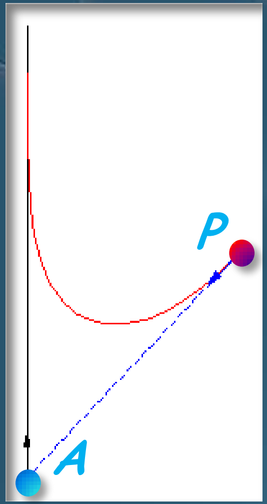
Решение $\quad C_2 = -2 \quad C_1 = 0$

$$2\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} = 4e^y\frac{dy}{dx} \Rightarrow d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4e^y dy \Rightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4e^y + C_1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -2\sqrt{e^y} \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{e^y}} = -2\int dx \Rightarrow -2e^{-\frac{y}{2}} = -2x + C_2$$

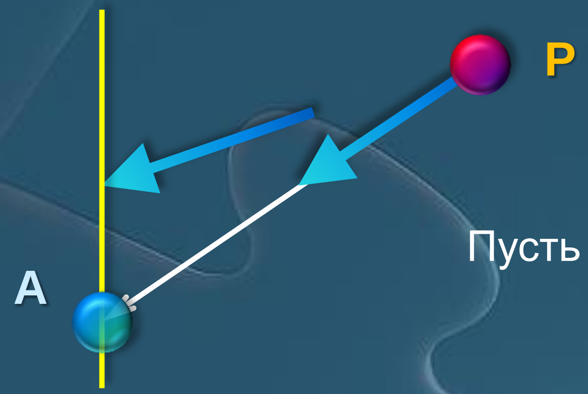
$$e^{-\frac{y}{2}} = 1 + x \qquad y = \ln\frac{1}{(1+x)^2}$$

- Определить траекторию преследования цели ракетой, если цель движется вдоль прямой, а скорости цели и ракеты равны между собой.



Если точка *A* движется вдоль заданной кривой, а точка *P* преследует её, причем вектор направления движения точки *P* всегда направлен на точку *A*, и скорости движения точек постоянны, то траектория точки *P* называется кривой погони.
Такая задача впервые была решена французским математиком Pierre Bouguer в 1732 году, впоследствии задачи такого класса исследовались английским математиком Boole.

Уравнение кривой погони выводится при условии, что вектор касательной к траектории в точке P всегда параллелен линии, соединяющей A и P



$$\frac{A-P}{|A-P|}\cdot\frac{P_t'}{|P_t'|}=1 \qquad |P_t'|=1 \qquad \frac{(A-P)\cdot P_t'}{|A-P|}=1$$

Пусть точка A движется вдоль оси y, тогда уравнение её движения:

$$A(t)\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=t\end{cases}$$

Уравнение движения точки P в параметрической форме : $P(x,y)=P(t)$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=1 \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+(t-y)^2}}\begin{bmatrix}0-x\\ t-y\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\dfrac{dx}{dt}\\ \dfrac{dy}{dt}\end{bmatrix}=1$$

Последнее уравнение может быть переписано в следующем виде

$$\left[(t-y)\frac{dy}{dt}-x\frac{dx}{dt}\right]^2=x^2+(t-y)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-1\right)+2x(y-t)\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+(t-y)^2\left(\left(\frac{dy}{dt}\right)^2-1\right)=0$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+2x(t-y)\left(\frac{dx}{dt}\right)\left(\frac{dy}{dt}\right)+(t-y)^2\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=0$$

$$\Rightarrow\left[x\frac{dy}{dt}+(t-y)\frac{dx}{dt}\right]^2=0\Rightarrow x\frac{dy}{dt}+(t-y)\frac{dx}{dt}=0\Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\Big/\frac{dx}{dt}\Leftrightarrow x\frac{dy}{dx}+t-y=0 \qquad \ell=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx=tv=t$$

$$\Rightarrow x\frac{dy}{dx}-y-\int\sqrt{1+y'^2}\,dx=0 \qquad\Rightarrow\qquad x\frac{d^2y}{dx^2}-\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=0$$

Последнее уравнение допускает понижение порядка

$$u=\frac{dy}{dx}\qquad x\frac{du}{dx}-\sqrt{1+u^2}=0\Rightarrow\quad x\frac{du}{dx}=\sqrt{1+u^2}\Rightarrow\quad\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\frac{dx}{x}\Rightarrow$$

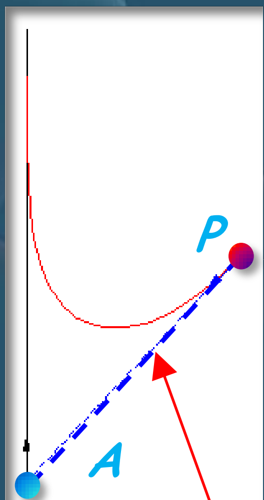
$$\int\frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\quad u+\sqrt{1+u^2}=4C_2x\Rightarrow 1+u^2=16C_2^2x^2-8C_2xu+u^2\Rightarrow$$

$$u=\frac{16C_2^2x^2-1}{8C_2x}=2C_2x-\frac{1}{8C_2x}\Rightarrow\qquad dy=\int\left(2C_2x-\frac{1}{8C_2x}\right)dx$$

$$y=C_1+C_2x^2-\frac{\ln x}{8C_2}$$

$$y = C_1 + C_2x^2 - \frac{\ln x}{8C_2}$$

Начальные условия: в момент времени $t = 0$ точка P находится в точке плоскости M_0 и имеет скорость $V = 1$



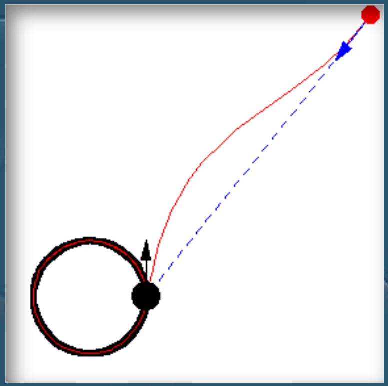
$$y(x_0) = x_0$$

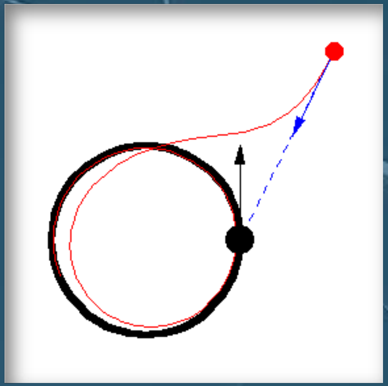
$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0} = \frac{y_0}{x_0}$$

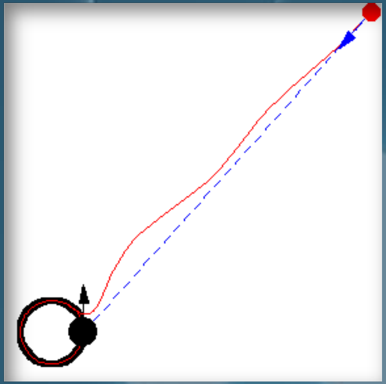
После подстановки этих величин в общее решение получаем частное решение

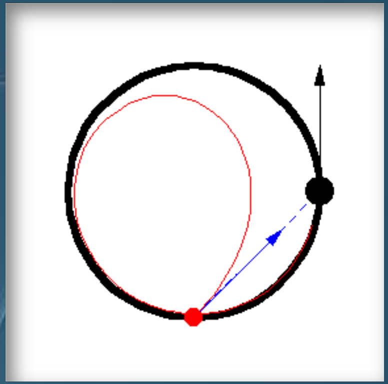
$$\eta = \left(\frac{x}{x_0}\right)^2, \; r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \qquad y = \frac{1}{4}\left[(y_0 + r_0)\eta + (y_0 - r_0)\ln\eta + 3y_0 - r_0\right]$$

Кривые погони при разных способах движения цели


A


C


B


D