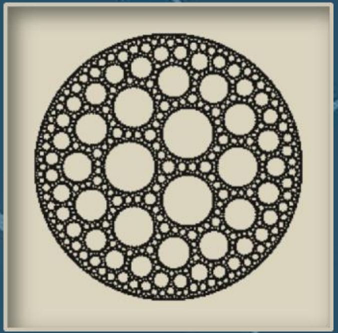
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО И ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ



{ общие понятия - теорема Коши - линейный дифференциальный оператор - основные теоремы - линейная независимость решений - определитель Вронского - вронскиан однородного линейного дифференциального уравнения n-го порядка - общее решение линейного однородного дифференциального уравнения - формула Остроградского – Лиувилля - теорема о понижении порядка - структура решения линейного неоднородного дифференциального уравнения - метод Лагранжа вариации произвольных постоянных – пример }

Общие понятия

- Линейное дифференциальное уравнение n - го порядка имеет вид $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$, где y – искомая функция, а $p_k(x)$ и $f(x)$ – заданные функции, определенные и непрерывные на некотором отрезке $[a,b]$.

  При $f(x)\neq 0$ уравнение называется *неоднородным*, при $f(x)=0$ – *однородным*.

  Общим решением уравнения является функция $y=\varphi(x, C_1, C_2, \ldots\ldots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных и обращающая данное уравнение в тождество при любых значениях этих постоянных.

  Частное решение получается при закреплении постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_n$, получаемое с использованием начальных условий.

Задача Коши

- Если функция f - правая часть дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

является непрерывной в некоторой замкнутой $(n+1)$ - мерной области D пространства: $oxyy', \ldots, y^{(n-1)}$ и имеет в этой области ограниченные частные производные по каждому из аргументов функции f , то каждой внутренней точке $P_0\ (x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ области D соответствует, и притом единственное, решение $y = \varphi(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y = y_0,\ y' = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}_0 \quad \text{при} \quad x = x_0$$

т.е. $\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x));\ \varphi(x_0) = y_0, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = y^{(n-1)}_0$

Линейный дифференциальный оператор

- Введем линейный дифференциальный оператор

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + P_n(x)$$

$$L(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + P_n(x)y$$

Дифференциальные уравнения запишутся как $L(y) = f(x)$ или $L(y) = 0$.

Однородное линейное уравнение допускает нулевое решение.
Это (тривиальное) решение соответствует нулевым начальным условиям.
Тривиальное решение однородного уравнения: $y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L(y = 0) \equiv 0$

Если $y_1(x)$ является решением неоднородного уравнения, то $L(y_1) \equiv f(x)$

- Оператор L обладает свойствами линейности и линейной комбинации

$$L(u + v) = L(u) + L(v) \qquad L(\alpha u) = \alpha L(u)$$

$$L(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_k u_k) = \alpha_1 L(u_1) + \cdots + \alpha_k L(u_k)$$

Основные теоремы

- Теорема - *о частных решениях однородного линейного уравнения*

Любая линейная комбинация частных решений линейного однородного дифференциального уравнения также является частным решением этого уравнения

Доказательство

$$L(y_1)=0,\cdots,L(y_k)=0,\ \Rightarrow L(\alpha_1 y_1+\cdots+\alpha_k y_k)=0+\cdots+0\equiv 0$$

- Теорема - *о частных решениях неоднородного линейного уравнения*

Если правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет собой сумму двух функций и если известны частные решения уравнений с каждым из слагаемых в правой части, то сумма этих частных решений есть частное решение исходного дифференциального уравнения

Доказательство

$$L(y)=f(x)\quad f(x)=f_1(x)+f_2(x)\quad L(y_1)\equiv f_1(x),\ L(y_2)\equiv f_2(x)$$

$$L(y_1+y_2)=L(y_1)+L(y_2)\equiv f_1(x)+f_2(x)\equiv f(x)$$

- Теорема - *о связи частных решений неоднородного и однородного линейных уравнений*

Разность любых двух частных решений неоднородного линейного дифференциального уравнения есть частное решение соответствующего (с той же левой частью) однородного линейного уравнения

Доказательство

$$L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) = f(x) - f(x) \equiv 0$$

Линейная независимость решений ЛОДУ

- Понятие линейной независимости частных решений рассмотрим на примере однородного дифференциального уравнения второго порядка

$$L = \frac{d^2}{dx^2} + p(x)\frac{d}{dx} + q(x) \qquad L(y) = 0$$

- Две функции y_1 и y_2 и называются *линейно независимыми* на некотором интервале, если их линейная комбинация не обращается в ноль ни каких значениях коэффициентов (не обращающихся одновременно в ноль), т.е. если $\alpha y_1 + \beta y_2 \neq 0 \quad (\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0)$

  В противном случае функции называются *линейно зависимыми*.

- Две функции y_1 и y_2 и называются *линейно независимыми* на некотором интервале, если их отношение на этом интервале не является постоянным $y_1 / y_2 \neq const$

  В противном случае функции называются *линейно зависимыми*.

Пример

@ Решить дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

Решение

$$y_1 = \sin x \qquad y_2 = \cos x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} \neq const \qquad \alpha \sin x + \beta \cos x \neq 0$$

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

Определитель Вронского

- **Определителем Вронского** называется функциональный определитель

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \qquad W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Две функции y_1 и y_2 и являются линейно независимыми на некотором интервале, если их *вронскиан* на этом интервале нигде не обращается в ноль т.е. если:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

В противном случае функции называются линейно зависимыми.

Определитель Вронского для ЛОДУ n-го порядка

- Для линейного однородного дифференциального уравнения n- го порядка вронскиан запишется в виде

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot\ \cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdot\ \cdot & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdot\ \cdot & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot\ \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Если $W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$

то общее решение однородного линейного уравнения есть комбинация линейно независимых частных решений

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots + C_n y_n$$

Пример

@ Решить ЛОДУ 2 с заданными начальными условиями :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=0 \qquad y(1)=0,\ y'(1)=1$$

Решение

$$y_1=x,\ y_2=\frac{1}{x}\ \Rightarrow y=C_1x+\frac{C_2}{x}\Rightarrow\ W\left(x,\frac{1}{x}\right)=\begin{vmatrix} x & \frac{1}{x} \\ 1 & -\frac{1}{x^2}\end{vmatrix}=-\frac{2}{x}\neq 0$$

$$\left.C_1x+\frac{C_2}{x}\right|_{x=1}=0 \qquad \left.C_1-\frac{C_2}{x^2}\right|_{x=1}=1$$

$$\begin{cases} C_1+C_2=0 \\ C_1-C_2=1\end{cases}\Rightarrow C_1^*=\frac{1}{2},\ C_2^*=-\frac{1}{2}\Rightarrow \qquad y=\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}$$

Формула Остроградского - Лиувилля

- Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0$$

Если известно одно из частных решений – y_1, то второе можно найти по *формуле Остроградского - Лиувилля*

$$\tilde{y}_2=y_1\int\frac{dx}{y_1^2 e^{\int_{x_0}^{x} p(x)dx}}\qquad y=C_1y_1+C_2\tilde{y}_2$$

Пример

@ *Решить линейное дифференциальное уравнение второго порядка :*

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x^2}=0$$

Решение

$$y_1=x$$

$$\tilde{y}_2=x\int\frac{dx}{x^2e^{\int\frac{1}{x}dx}}=x\int\frac{dx}{x^2e^{\ln x}}=x\int\frac{dx}{x^3}=x\left(-\frac{1}{2x^2}\right)=-\frac{1}{2x}$$

$$y=C_1x+\frac{C_2}{x}$$