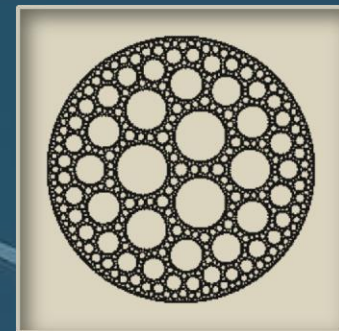


ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ



{ алгоритм решения линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами
- действительные корни характеристического уравнения - кратные корни - сопряженные комплексные корни кратности m - общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка - метод вариации произвольных постоянных - метод подбора частного решения неоднородного уравнения – примеры }



Решение ЛОДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами

● Однородное уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = 0$$

Решение ищется в виде : $y = e^{kx}$

$$\frac{d^n e^{kx}}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} e^{kx}}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{de^{kx}}{dx} + p_n e^{kx} = 0$$

$$e^{kx} (k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-2} k^2 + p_{n-1} k + p_n) = 0$$

Характеристическое уравнение

$$k^n + p_1 k^{n-1} + \dots + p_{n-2} k^2 + p_{n-1} k + p_n = 0$$



Действительные простые корни

- Действительные простые корни

$$y = e^{kx} \quad k_1 \neq k_2 \neq \dots \neq k_n$$

$$\begin{aligned}
 W(y_1, y_2, \dots, y_n) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \dots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \dots & k_n e^{k_n x} \\ k_1^2 e^{k_1 x} & k_2^2 e^{k_2 x} & \dots & k_n^2 e^{k_n x} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \dots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = \\
 &= e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \\ k_1^2 & k_2^2 & \dots & k_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \dots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} = e^{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)x} \cdot \Delta_n \neq 0
 \end{aligned}$$

Определитель Вандермонда



Кратные действительные корни

- Действительные корни кратности ν

$$k = k_1 = k_2 = \dots = k_\nu \quad y_1 = e^{kx}, y_2 = xe^{kx}, \dots, y_\nu = x^{\nu-1}e^{kx}$$

Для двух действительных кратных корней в уравнении: $\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$

$$k^2 + pk + q = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \frac{p^2}{4} = q \Rightarrow k_1 = k_2 = k = -\frac{p}{2}$$

$$y_1 = e^{kx} \quad y_2 = ? \quad y_2 = e^{kx} \int \frac{dx}{e^{2kx} e^{\int -2k dx}} = e^{kx} \int dx = xe^{kx}$$

формула Остроградского - Лиувилля



Пара комплексных корней

- Пара сопряженных комплексных корней $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$

$$y_1 + y_2 = e^{\alpha x} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad W(y_1, y_2) = e^{\alpha x} (-2\beta i) \neq 0$$

Для двух комплексных корней в уравнении

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + p \frac{dy}{dx} + qy = 0$$

$$k^2 + pk + q = 0 \Rightarrow k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \frac{p^2}{4} - q < 0 \Rightarrow k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$$

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{\beta i x} \quad \tilde{y}_1 = \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} + e^{-\beta i x}}{2} = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} e^{-\beta i x} \quad \tilde{y}_2 = \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \frac{e^{\beta i x} - e^{-\beta i x}}{2i} = e^{\alpha x} \sin \beta x$$



Сопряженные комплексные корни кратности μ

- μ пар сопряженных комплексных корней

$$k_{1,2} = k_{3,4} = \dots = k_{2\mu-1,2\mu} = \alpha \pm \beta i$$

$$y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_3 = x e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_4 = x e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$$y_5 = x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_6 = x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

$\dots = \dots$

$\dots = \dots$

$$y_{2\mu-1} = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$y_{2\mu} = x^{\mu-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$



@ Решить линейное однородное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

Решение

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k + 1)^3 = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2 = k_3 = -1$$

$$y_1 = e^{-x} \quad y_2 = xe^{-x} \quad y_3 = x^2 e^{-x}$$

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}$$

$$y = e^{-x} (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)$$

@ Решить линейное однородное дифференциальное уравнение пятого порядка

$$\frac{d^5 y}{dx^5} + 8 \frac{d^3 y}{dx^3} + 16 \frac{dy}{dx} = 0$$

Решение

$$k^5 + 8k^3 + 16k = 0 \Leftrightarrow k(k^2 + 4)^2 = 0 \Leftrightarrow k_1 = 0, k_{2,3} = k_{4,5} = \pm 2i$$

$$y_1 = e^{0 \cdot x} = 1 \quad y_2 = \cos 2x \quad y_3 = \sin 2x \quad y_4 = x \cos 2x \quad y_5 = x \sin 2x$$

$$Y = C_1 + C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x + C_4 x \cos 2x + C_5 x \sin 2x$$

$$Y = C_1 + (C_2 + C_4 x) \cos 2x + (C_3 + C_5 x) \sin 2x$$



Решение ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами – метод Лагранжа

- $$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = f(x)$$

Решение ищется в виде $y = Y + \bar{y}$

$Y = Y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ – общее решение однородного уравнения

$\bar{y}$ – частное решение неоднородного уравнения

Метод вариации произвольных постоянных – метод Лагранжа

$$\bar{y} = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \dots + C_n(x)y_n$$



Решение ЛНДУ n-го порядка с постоянными коэффициентами – Метод Лагранжа

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdot & \cdot & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdot & \cdot & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \cdot \\ C_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdot \\ f(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1' \\ C_2' \\ C_3' \\ \cdot \\ C_n' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{C}_1(x) = \int C_1'(x) dx \\ \tilde{C}_2(x) = \int C_2'(x) dx \\ \tilde{C}_3(x) = \int C_3'(x) dx \\ \cdot \\ \tilde{C}_n(x) = \int C_n'(x) dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdot & \cdot & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdot & \cdot & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdot & \cdot & y_n'' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdot & \cdot & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(y_1, y_2, \dots, y_n) \neq 0$$

$$\bar{y} = \tilde{C}_1(x)y_1 + \tilde{C}_2(x)y_2 + \dots + \tilde{C}_n(x)y_n$$



@ Решить ЛНДУ третьего порядка $\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 1$

Решение

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad k^3 + k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2(k+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$k_1 = k_2 = 0, k_3 = -1 \quad y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$$

● Пишем систему уравнений Лагранжа

$$\begin{pmatrix} 1 & x & e^{-x} \\ 0 & 1 & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \\ C'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & e^{-x} \\ 0 & 1 & -e^{-x} \\ 0 & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} \quad \Delta = e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{-x} \neq 0$$

@

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & x & e^{-x} \\ 0 & 1 & -e^{-x} \\ 1 & 0 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \begin{vmatrix} 0 & x & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = e^{-x}(-x-1)$$

$$C'_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(-x-1)e^{-x}}{e^{-x}} = -x-1$$

$$\tilde{C}_1 = \int (-x-1)dx = -\frac{x^2}{2} - x$$

$$\tilde{C}_1 = -\frac{x^2}{2} - x$$

@

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e^{-x} \\ 0 & 0 & -e^{-x} \\ 0 & 1 & e^{-x} \end{vmatrix} = e^{-x} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = e^{-x}$$

$$C'_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} = 1$$

$$\tilde{C}_2 = \int dx = x$$

$$\tilde{C}_2 = x$$

@

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad C'_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x \quad \tilde{C}_3 = \int e^x dx = e^x \quad \tilde{C}_3 = e^x$$

$$\bar{y} = \left(-\frac{x^2}{2} - x\right) \cdot 1 + x \cdot x + e^x \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{2} - x + 1$$

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x + 1$$

Метод подбора частного решения

- $$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + p_{n-1} \frac{dy}{dx} + p_n y = f(x)$$

$\bar{y}$ – частное решение неоднородного уравнения

Метод подбора частного решения используется в случае, если функция в правой части уравнения имеет специальный вид:

$$f(x) = e^{\alpha x} [p_m(x) \cos \beta x + q_\ell(x) \sin \beta x]$$

Здесь α и β – действительные числа, $p_m(x)$ и $q_\ell(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами степени m и ℓ соответственно.

Пример $f(x) = e^x x^2 \sin 2x \Rightarrow \Rightarrow \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 2, m = 0, \ell = 2$



Метод подбора частного решения

$$f(x) = e^{\alpha x} [p_m(x) \cos \beta x + q_l(x) \sin \beta x]$$

Решение ищется в виде:

$$\bar{y} = x^\mu e^{\alpha x} [P_s(x) \cos \beta x + Q_s(x) \sin \beta x]$$

Здесь α и β – те же числа, что в формуле для $f(x)$; $\mu \geq 0$ – кратность корня $\alpha \pm \beta i$ для характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения, причем $\mu = 0$ когда $\alpha \pm \beta i$ не является корнем уравнения; s – большее из чисел m и l – степеней многочленов $p_m(x)$ и $q_l(x)$; $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ – многочлены степени s с неопределенными коэффициентами, подлежащими численному определению. Сформированное выражение для частного решения, после n - го дифференцирования, подставляется в исходное дифференциальное уравнение. Неопределенные коэффициенты находятся из равенства коэффициентов у функций в полученных уравнениях.



@ Найти частное решение ЛНДУ третьего порядка

Решение

$$\frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + y = x^2 - 1$$

$$\alpha = 0, \beta = 0, m = 2, \ell = 0$$

$$\bar{y} = Ax^2 + Bx + D \quad \bar{y}' = 2Ax + B \quad \bar{y}'' = 2A \quad \bar{y}''' = 0$$

$$0 + 6A + 6Ax + 3B + Ax^2 + Bx + D = x^2 - 1$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ 6A + B = 0 \\ 6A + 3B + D = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -6 \\ D = 11 \end{cases}$$

$$\bar{y} = x^2 - 6x + 11$$