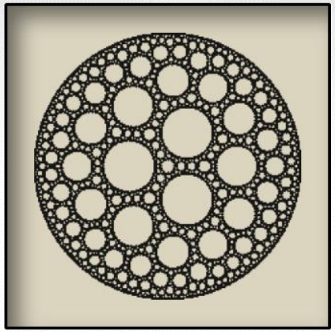
Числовые ряды



{основные понятия – основные теоремы о сходящихся рядах - необходимый признак сходимости ряда - достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами – примеры }

Пусть задана бесконечная числовая последовательность: $\{a_n\}$, где $a_n = f(n)$.

- ***Бесконечным рядом*** называется выражение: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

члены ряда — a_1, a_2, a_3; *общий член ряда* — a_n

Сумму конечного числа n первых членов ряда называют n - ой частичной суммой ряда: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \{S_n\} = L$, то ряд сходится к L. В противном случае ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Необходимый признак сходимости числового ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Обратное утверждение неверно !

Достаточный признак расходимости: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует, либо не равен нулю.

Пример: Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Предел общего члена ряда равен нулю ! Но ... Этот ряд расходится !

Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

Например для третьего члена ряда (1/3) >>> $\dfrac{2}{\frac{1}{1/2} + \frac{1}{1/4}} = \frac{1}{3}$

Ряд назван ***гармоническим***, так как складывается из ***«гармоник»***: n-я гармоника, извлекаемая из скрипичной струны, — это основной тон, производимый струной длиной $1/n$ от длины исходной струны.
Каждый член ряда, начиная со второго, представляет собой среднее гармоническое двух соседних членов.

Доказать расходимость гармонического ряда

Доказательство

Доказательство расходимости можно построить, если сравнить гармонический ряд с другим расходящимся рядом, в котором знаменатели дополнены до степени двойки:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots=1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{9}+\ldots\ldots+\frac{1}{16}\right]+\ldots >$$

$$1+\left[\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right]+\left[\frac{1}{16}+\ldots\ldots\right]+\ldots=\ 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\ldots\ =\infty \quad \square$$

Ряд расходится – не выполнен необходимый признак сходимости

Это доказательство принадлежит средневековому учёному Николаю Орему (*Nicolas Oresme*) (1350).

- Даны два ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ – такие, что $0 < a_n \le b_n$ для всех n. Тогда справедливы следующие признаки:
  - Если $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ также сходится;
  - Если $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

- Ряд геометрическая прогрессия: $\sum_{n=1}^{\infty} ag^{n-1} = a + ag + ag^2 + .. + ag^n + ...$

$S_n = a\dfrac{1-g^n}{1-g}$, $|g| \ne 1$ $\quad S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-g}$ $\quad |g| < 1$ - ряд сходится, $\quad |g| \ge 1$ - ряд расходится

- Обобщенный гармонический ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p} = 1 + \dfrac{1}{2^p} + \dfrac{1}{3^p} + \dfrac{1}{4^p} + ...$ Частный случай ряда Дирихле.

$p > 1$ - ряд сходится, $\quad 0 < p \le 1$ - ряд расходится,

Сумма ряда: дзета-функция Римана

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + ... = \zeta(p)$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

@

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3-3}$

Решение

$$n^3-3<n^3 \qquad \frac{1}{n^3-3}>\frac{1}{n^3} \qquad \underbrace{\frac{n^2}{n^3-3}}_{a_n}>\frac{n^2}{n^3}=\underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3-3}>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Ряд справа (гармонический) расходится, по признаку сравнения – заданный ряд также расходится.

Использование предельного признака сравнения рядов

Если $0<\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}<\infty$ то оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2}{n^3-3}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3-3}=1$$

Интегральный признак сходимости рядов – признак Коши

Пусть f(x) является непрерывной, положительной и монотонно убывающей функцией на промежутке $[1,+\infty)$.

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \dots + f(n) + \dots$ сходится, если сходится несобственный интеграл $\int_{1}^{\infty} f(x)dx$ и расходится, если последний стремится к бесконечности.

Признак Даламбера

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если существует предел отношения $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Если он больше единицы то ряд расходится. Если эта величина равна единице, то возможна как сходимость, так и расходимость. Нужно воспользоваться другим признаком.

Радикальный признак

- Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, если существует предел $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$. Если он больше единицы то ряд расходится. Если эта величина равна единице, то возможна как сходимость, так и расходимость. Нужно воспользоваться другим признаком.

@ Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{1+n^2}$

Решение

Проверим сходимость ? $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$

$$arctgn<\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{1+n^2}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{1+n^2}=\frac{\pi}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{dx}{1+x^2}=\lim_{n\to\infty}(arctgx)\Big|_1^n=\lim_{n\to\infty}(arctgn-arctg1)=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$ сходится: <u>по интегральному признаку</u>.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{arctgn}{1+n^2}$ сходится: <u>по признаку сравнения</u>.

@ Выразить бесконечную периодическую дробь 0.13131313... рациональным числом.

Решение

$$0.131313... = \frac{13}{100} + \frac{13}{10000} + \frac{13}{1000000} + ... =$$

$$= \frac{13}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{10000} + ...\right) = \frac{13}{100}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{100}}\right) = \frac{13}{99}$$

Ряд - геометрическая прогрессия, $g = 1/100$

$$S = \frac{1}{1 - g} = \frac{1}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{100}{99}$$

Числовой ряд, содержащий бесконечное множество положительных и отрицательных членов, называется *знакопеременным*.

Частным случаем знакопеременного ряда является *знакочередующийся ряд* в котором члены ряда последовательно имеют противоположные знаки.

Достаточный признак сходимости Лейбница

- Пусть $\{a_n\}$ является числовой последовательностью, такой что

1. $a_{n+1} < a_n$ для всех n ;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

Тогда знакочередующиеся ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} a_n$ сходятся.

Абсолютная и условная сходимость

- Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ также сходится.
- Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится абсолютно, то он является сходящимся в обычном смысле.
- Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется условно сходящимся, если сам он сходится, а ряд из модулей расходится.

@ Исследовать на сходимость ряд: $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{14}-\frac{1}{19}\pm\dots$

Решение

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$ $\Rightarrow$ Ряд знакочередующийся: $\frac{1}{4}-\frac{1}{9}+\frac{1}{14}\pm\dots$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{4}>\frac{1}{9}>\frac{1}{14}>\frac{1}{19}>\dots$ члены ряда монотонно убывают,

$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{5n-1}=0$ $\Rightarrow$ Ряд сходится по признаку Лейбница.

Проверяем сходимость ряда из модулей: $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5n-1}$

$\int_1^{\infty}\frac{dx}{5x-1}=\lim_{n\to\infty}\int_1^{n}\frac{dx}{5x-1}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln(5x-1)}{5}\bigg|_1^n\right]=\infty$ Ряд из модулей расходится – по интегральному признаку.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$ сходится условно.