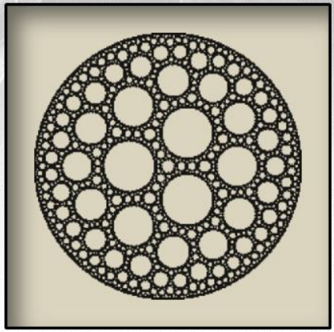
Степенные ряды – разложение функций и приложения



{степенные ряды – ряд Тейлора – вычисление интегралов - решение дифференциальных уравнений - примеры }

- ***Ряд Тейлора*** – степенной ряд, членами которого являются степенные функции аргумента x с коэффициентами, рассчитываемыми по формулам

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

- $$f(x)=T_n(x)+0((x-x_0)^n)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+..+a_n(x-x_0)^n+R_n(x)$$

$$T_n(x_0)=a_0=f(x_0) \qquad a_0=f(x_0)$$

$$f'(x_0)\Rightarrow T_n'(x_0)=a_1+2a_2(x-x_0)+.....+na_n(x-x_0)^{n-1}\Rightarrow a_1=T_n'(x_0)=f'(x_0)$$

$$f''(x_0)\Rightarrow T_n''(x_0)\Rightarrow a_2=\frac{f''(x_0)}{1\cdot 2}$$

$$f^{(n)}(x_0)\Rightarrow T_n^{(n)}(x)=1\cdot 2\cdots(n-1)n\cdot a_n \qquad a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot n}=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots$$

Разложить $f(x)=x^3-10x^2+6$ в ряд по степеням x в окрестности $x_0 = 3$

Решение

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(3)}{n!}(x-3)^n \quad =$$

$$=\frac{\left.\left(x^3-10x^2+6\right)\right|_{x=3}}{0!}+\frac{\left.\left(x^3-10x^2+6\right)^{(1)}\right|_{x=3}}{1!}(x-3)+\frac{\left.\left(x^3-10x^2+6\right)^{(2)}\right|_{x=3}}{2!}(x-3)^2+\frac{\left.\left(x^3-10x^2+6\right)^{(3)}\right|_{x=3}}{3!}(x-3)^3+..$$

$$=-57+\frac{\left.\left(3x^2-20x\right)\right|_{x=3}}{1!}(x-3)+\frac{\left.\left(6x-20\right)\right|_{x=3}}{2!}(x-3)^2+\frac{6}{3!}(x-3)^3+0+0+.. \quad \Rightarrow$$

$$x^3-10x^2+6= -57-33(x-3)-(x-3)^2+(x-3)^3$$

@ Разложить функцию e^x в степенной ряд в окрестности $x_0 = 0$

Решение

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \qquad \left.\frac{d(e^x)}{dx}\right|_{x=0} = \left.e^x\right|_{x=0} = 1$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad R = \infty$$

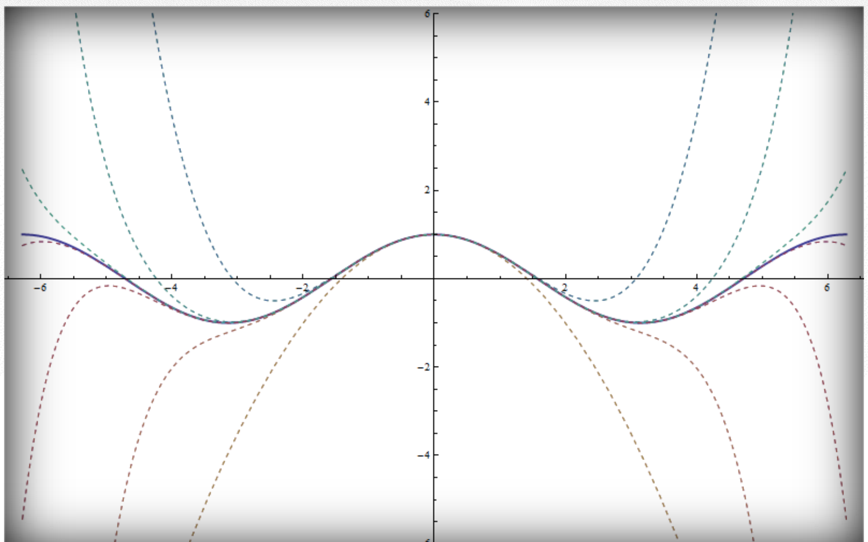
Ряд сходится абсолютно $-\infty < x < \infty$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots +$$

Ряды Тейлора для функций sin(x) и cos(x)

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x)$$

$$\cos x = \frac{d \sin x}{dx} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \pm \ldots + R_{2n}(x)$$



$$\left|R_{2n+1}(x)\right| < \frac{1}{(2n+3)!}|x|^{2n+3} \quad \to 0 \ (n \to \infty, \forall x)$$

$$\left|R_{2n}(x)\right| < \frac{1}{(2n+2)!}|x|^{2n+2} \quad \to 0 \ (n \to \infty, \forall x)$$

$$\sin(x) = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \frac{d \sin x}{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Вывести формулу Эйлера $e^{ix} = cos(x) + i\,sin(x)$

Решение

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \qquad e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \ldots +$$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \; = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \ldots}_{cos(x)} + i\underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} \pm \ldots\right)}_{i\,sin(x)} =$$

$$e^{ix} = cos(x) + i\,sin(x)$$

\# Решить приближенно уравнение $y' = x^2 + y^2$ при заданных начальных условиях $y(0) = \frac{1}{2}$

Решение

Решение ищем в форме ряда $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$

$$y(0) = \frac{1}{2} \qquad y'(0) = \left(x^2 + y^2\right)\Big|_{x=0} = \frac{1}{4}$$

$$y''(0) = \left(x^2 + y^2\right)'\Big|_{x=0} = \left(2x + 2yy'\right)\Big|_{x=0} = 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$y'''(0) = \left(2x + 2yy'\right)'\Big|_{x=0} = \left(2 + 2y'^2 + 2yy''\right)\Big|_{x=0} = 2 + 2\frac{1}{16} + 2\frac{1}{2}\frac{1}{4} = \frac{19}{8}$$

$$y^{(4)}(0) = \frac{11}{4}$$

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \ldots$$

и т.д. ...