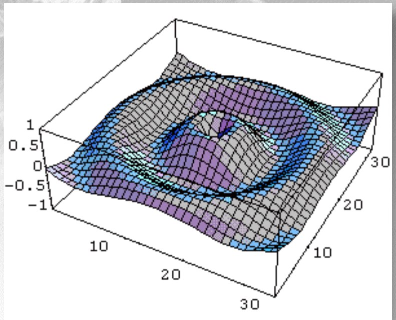
Интеграл Фурье и преобразование Фурье



{Интеграл Фурье, преобразование Фурье, приложения}

- **Рядом Фурье** называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

Действительные числа $a_0, a_1, b_1, b_2, \ldots, a_n, b_n$, называются коэффициентами ряда.

Коэффициенты тригонометрического ряда Фурье определяются по формулам:

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx$$

Пусть $f(x)$ – произвольная периодическая функция с периодом $T=2\pi$. Предположим, что функция $f(x)$ раскладывается в тригонометрический ряд, то есть $f(x)$ является суммой ряда:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right)$$

Ряд Фурье $$f(x)=\frac{a_o}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nx+b_n\sin nx\right),\qquad x\in(-\pi,\pi)$$

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt\qquad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt\qquad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\,dt$$

Интеграл Фурье

$$f(x)=\int_{0}^{+\infty}\left(a(s)\cos sx+b(s)\sin sx\right)dx,\qquad x\in\Re$$

$$a(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\cos sx\,dx\qquad b(s)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\sin sx\,dx$$

f(x) - функция четная

$$f(x)=\int_0^{+\infty} a(s)\cos sx\,ds, \qquad x\in\Re$$

$$a(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\cos sx\,dx, \qquad b(s)=0$$

f(x) - функция нечетная

$$f(x)=\int_0^{+\infty} b(s)\sin sx\,ds, \qquad x\in\Re$$

$$a(s)=0, \qquad b(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} f(x)\sin sx\,dx$$

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$Re\left(e^{-isx}\right) = \cos sx \qquad Im\left(e^{-isx}\right) = -\sin sx$$

$$a(s) = Re\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(t)\,dt\right), \quad b(s) = -Im\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(t)\,dt\right)$$

$$\Phi(s) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(t)\,dt = a(s) - ib(s)$$

$$\Phi(s)e^{isx} = \left(a(s) - ib(s)\right)\left(\cos sx + i\sin sx\right) =$$
$$= a(s)\cos sx + b(s)\sin sx + i\left(a(s)\sin sx - b(s)\cos sx\right)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx}\Phi(s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(a(s)\cos sx + b(s)\sin sx\right)ds +$$

функция четная

$$+\, i\int_{-\infty}^{+\infty}\left(a(s)\sin sx - b(s)\cos sx\right)ds$$

функция нечетная

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(a(s)\cos sx + b(s)\sin sx\right)ds = 2\int_{0}^{+\infty}\left(a(s)\cos sx + b(s)\sin sx\right)ds = 2f(x)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(a(s)\sin sx - b(s)\cos sx\right)ds = 0$$

$$f(x) = 2\int_{0}^{+\infty} e^{isx}\Phi(s)ds$$

Пусть $f(x) \in C(R)$ $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

Для функции f(x) существует **интегральное преобразование Фурье (ИПФ)**

Образ Фурье $$\Phi(s) = \hat{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} f(x) dx$$

Восстановление функции по образу Фурье

$$f(x) = \hat{\Phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} \Phi(s) ds$$

Пусть $f(x) \in C(0,+\infty)$ $\int_0^{+\infty} |f(x)| dx < +\infty$

косинус преобразование Фурье

$$\Phi_C(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(sx) f(x) dx$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(sx) \Phi_C(s) ds, \quad x > 0$$

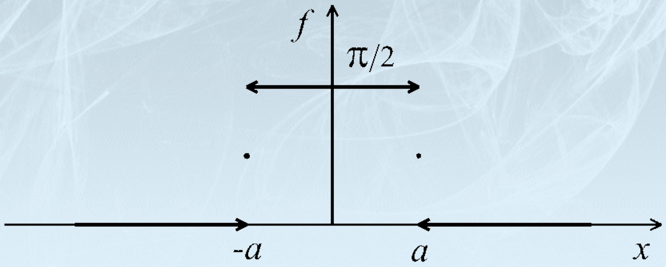
синус преобразование Фурье

$$\Phi_S(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(sx) f(x) dx$$

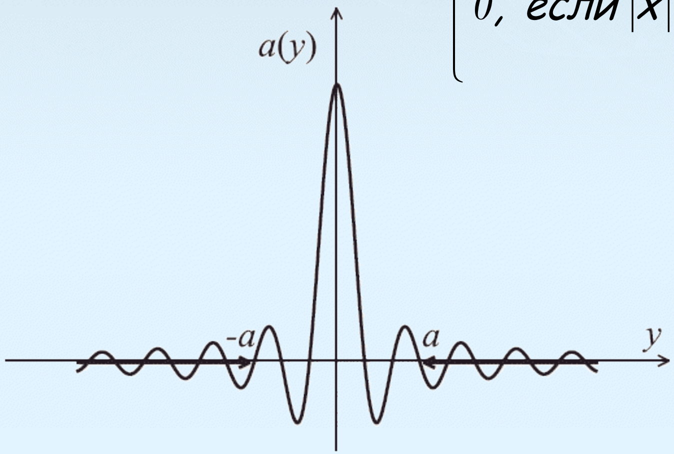
$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(sx) \Phi_S(s) ds, \quad x > 0$$

@ Вычислить

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin ay}{y}\cos yx\,dy=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{если } |x|<a\\ \dfrac{\pi}{4}, & \text{если } |x|=a\\ 0, & \text{если } |x|>a\end{cases}$$



Функция абсолютно интегрируема и кусочно-гладкая



Решение

$$a(y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos ty\,dt$$

$$a(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}f(t)\cos ty\,dt=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^{a}\cos ty\,dt=\left.\frac{\sin ty}{y}\right|_{t=0}^{t=a}=\frac{\sin ay}{y}$$