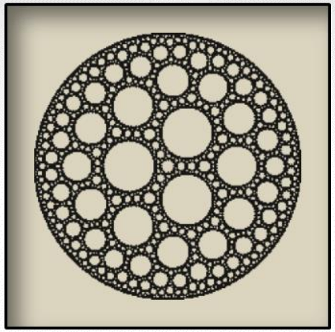
Ряды Фурье – приложения



{ решение уравнений математической физики – уравнение теплопроводности }

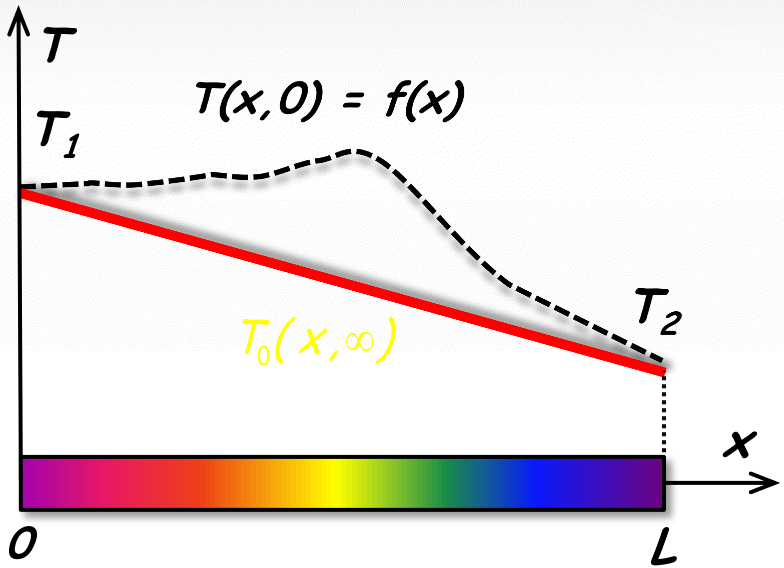
Решение дифференциального уравнения теплопроводности

- *Одномерное дифференциальное уравнение теплопроводности*

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad k = \frac{k^*}{c_p}$$

Граничные условия: $T = T_1$ при $x = 0$, $T = T_2$ при $x = L$
Начальное распределение температуры: $T(x,0) = f(x)$

Решение



Сначала мы определим *стационарное распределение температуры* при заданных граничных условиях:

$$k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0(x) = C_1 + C_2 x$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} T_1 = C_1 \\ T_2 = C_1 + C_2 L \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad T_0(x) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}$$

Решение дифференциального уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Нестационарное распределение температуры

$$\frac{\partial y}{\partial t} = k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Введем новую переменную: $y(x,t) = T(x,t) - T_0(x)$.

Граничные условия для $y(x,t)$ принимают вид: $y(0,t) = y(L,t) = 0$, начальное распределение записывается в форме $y(x,0) = f(x) - T_0(x) = g(x)$.

С учетом новых условий: $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$ $b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$

Общее решение дифференциального уравнения ищется в форме тригонометрического ряда:

$$y(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Очевидно, что граничные условия $y(0,t) = 0$ и $y(L,t) = 0$ выполняются при любых значениях времени $t > 0$. Начальные условия для $c_n(t)$ имеют вид

$$c_n(0) = b_n,\ n = 0,1,2,...$$

Решение дифференциального уравнения теплопроводности

Подставим последнее выражение в уравнение теплопроводности: $k\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\partial y}{\partial t}$

$$-k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}c_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{dc_n(t)}{dt}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Умножим обе части этого выражения на $\sin\dfrac{m\pi x}{L}$ и интегрируем его на $[0, L]$.

Используются соотношения ортогональности $\displaystyle\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ \dfrac{L}{2}, & m = n \end{cases}$

В результате получим

$$-k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2\pi^2}{L^2}c_n(t)\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{dc_n(t)}{dt}\int_0^L \sin\frac{n\pi x}{L}\sin\frac{m\pi x}{L}dx$$

$$\Rightarrow (m = n) \Rightarrow \quad -k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^2\pi^2}{L^2}c_m(t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{dc_m(t)}{dt}$$

Решение дифференциального уравнения теплопроводности

$$-k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m^2\pi^2}{L^2}c_m(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{dc_m(t)}{dt}$$

Решаем это дифференциальное уравнение и находим $C_m(t)$

$$\frac{dc_m}{c_m}=-\frac{km^2\pi^2}{L^2}dt \quad\Rightarrow\quad \int\frac{dc_m}{c_m}=-\frac{km^2\pi^2}{L^2}\int dt \quad\Rightarrow$$

$$\ln c_m(t)=-\frac{km^2\pi^2}{L^2}t+C_0 \quad\Rightarrow\quad c_m(t)=e^{C_0}e^{\left(-\frac{km^2\pi^2}{L^2}t\right)}\Rightarrow(m=n)\Rightarrow\; c_n(t)=Ae^{\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t\right)}$$

Используем начальные условия: $c_n(t=0)=b_n$ получим $c_n(t)=b_ne^{\left(-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t\right)}$

Решение уравнения теплопроводности выражается формулой:

$$T(x,t)=T_0(x)+\sum_{n=0}^{\infty}b_ne^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}\sin\frac{n\pi x}{L}=T_1+(T_2-T_1)\frac{x}{L}+\sum_{n=0}^{\infty}b_ne^{-\frac{kn^2\pi^2}{L^2}t}\sin\frac{n\pi x}{L}$$