МИНОБРНАУКИ РОССИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Тверской государственный технический университет»
(ТвГТУ)

А.Н. Балашов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания для студентов очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки бакалавров 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника и 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 2-й курс

Тверь 2025

УДК 517.91/93(075.8)
ББК 22.161.6я7

Рецензент – кандидат физико-математических наук доцент кафедры высшей математики ТвГТУ Григорьева В.В.

Балашов А.Н. Дифференциальные уравнения: методические указания. Тверь: Тверской государственный технический университет, 2025. 36 с.

В пособии приводятся краткие теоретические сведения и методические указания по курсу дифференциальных уравнений, необходимые для решения задач. Разобраны примеры типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений.

Предназначено для студентов очной и заочной формы обучения, а также адресовано тем, кто самостоятельно изучает высшую математику и желает приобрести необходимые навыки в решении задач.

Обсуждены на заседании кафедры высшей математики ТвГТУ, рекомендованы к изданию (протокол № 2 от 18 декабря 2024 г.).

А.Н. Балашов

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания для студентов очной и заочной форм обучения по направлениям подготовки бакалавров 13.03.02 Электроэнергетика и электротехника и 15.03.05 Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, 2-й курс

Технический редактор Воробьева Ю.Ф.

Физ. печ. л. 2,25 Усл. печ. л. 2,09 Уч.-изд. л. 1,96

Редакционно-издательский центр
Тверского государственного технического университета
170026, г. Тверь, наб. Афанасия Никитина, 22

Дифференциальные уравнения

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

1.1. Основные понятия

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производную y' или дифференциалы dy и dx.

Символически дифференциальное уравнение первого порядка можно написать так:

$$F(x, y, y') = 0, \text{ или } F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

Неизвестной является функция y, входящая под знак производной (или дифференциала).

Уравнение первого порядка может быть записано также в *дифференциальном виде*: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$.

Если искомая функция $y = f(x)$ есть функция одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*.

Решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = f(x)$, обращающая это уравнение в тождество.

Решение $F(x, y) = 0$, заданное в неявном виде, называется интегралом дифференциального уравнения.

График дифференциального уравнения называется интегральной кривой.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от x и произвольной независимой постоянной C, обращающая это уравнение в тождество.

Общее решение, заданное в неявном виде $F(x, y, C) = 0$ называется **общим интегралом**.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, которое получается из общего, если придать определенное значение произвольной постоянной $C = C_0$.

Частным интегралом называется интеграл, полученный из общего, если придать определенное значение произвольной постоянной.

Условие $y = y_0$ при $x = x_0$ называют *начальным условием* и записывают в виде $y(x_0) = y_0$ или $y|_{x=x_0} = y_0$.

Задача отыскания частного решения ДУ, удовлетворяющего заданному начальному условию, называется *задачей Коши*.

1.2. Уравнения с разделяющимися переменными

Наиболее простым ДУ первого порядка является уравнение вида

$$P(x)dx = Q(y)dy. \qquad (1)$$

Такое уравнение называется уравнением с *разделенными переменными*. Проинтегрировав это уравнение, получим:

$\int P(x)dx = \int Q(y)dy$ – общий интеграл ДУ.

Более общий случай описывают уравнения с *разделяющимися переменными*, которые имеют вид:

$$P_1(x) \cdot Q_1(y)dx + P_2(x) \cdot Q_2(y)dy = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) сводится к уравнению (1) путем деления его на $P_2(x) \cdot Q_1(y) \neq 0$. Получаем:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0 \Rightarrow \frac{P_1(x)}{P_2(x)} \cdot dx = -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy.$$

Замечание: при проведении деления дифференциального уравнения на $P_2(x)Q_1(y)$ могут быть потеряны некоторые решения. Поэтому следует отдельно решить уравнение $P_2(x)Q_1(y) = 0$ и установить те решения, которые не могут быть получены из общего решения, – *особые решения*.

Уравнение

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

также сводится к уравнению с разделенными переменными. Для этого достаточно положить $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx.$$

Задание 1. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0.$$

Решение. Вынесем общие множители в каждом слагаемом:

$$(y + xy)dx + (x - xy)dy = 0 \Rightarrow y(1 + x)dx = x(y - 1)dy.$$

Разделим обе части уравнения на xy:

$$\frac{1 + x}{x}dx = \frac{y - 1}{y}dy \Rightarrow \int \left(1 + \frac{1}{x}\right)dx = \int \left(1 - \frac{1}{y}\right)dy \Rightarrow$$

$x + ln|x| = y - ln|y| + C$ – общий интеграл дифференциального уравнения.

Решения уравнения $xy = 0$: $x = 0$ и $y = 0$ – не входят в общий интеграл, значит, это *особое решение.*

Задание 2. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения $y' = \frac{1+y^2}{(2x-6)y}$ или $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{(2x-6)y}$.

Решение. Разделим переменные $\frac{y}{1+y^2}dy = \frac{dx}{2x-6}$ и интегрируем $\int \frac{y}{1+y^2}dy = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-3}$. В результате нахождения интегралов получим: $\frac{1}{2}ln|1 + y^2| = \frac{1}{2}ln|x - 3| + C_1$. Это выражение можно записать в иной форме: $\frac{1}{2}ln|1 + y^2| = \frac{1}{2}ln|x - 3| + \frac{1}{2}ln\,C$, т. к. всякое число можно представить в виде логарифма другого.

Таким образом, общий интеграл данного уравнения будет иметь вид:

$$1 + y^2 = C(x - 3).$$

Задание 3. Скорость движения материальной точки массой m направлена по линии действия постоянной силы F. Движение материальной точки происходит прямолинейно. Найдите скорость движения материальной точки.

Решение. Из второго закона Ньютона получим дифференциальное уравнение движения точки

$$m\frac{dv}{dt} = F.$$

Разделяем переменные $dv = \frac{F}{m}dt$ и интегрируем $\int dv = \int \frac{F}{m}dt$. В результате получим $v = \frac{F}{m}t + C$.

Задание 4. Тело массой 10 кг свободно падает под действием силы тяжести. Найдите скорость тела через две секунду после начала падения.

Решение. На тело действует сила тяжести $F = mg$, где g – ускорение свободного падения.

Из второго закона Ньютона получим дифференциальное уравнение движения точки

$$m\frac{dv}{dt} = mg.$$

Разделяем переменные $dv = gdt$ и интегрируем $\int dv = \int gdt$. В результате получим $v = gt + C$.

Поскольку в начальный момент времени скорость равна нулю, то $C = 0$. Через две секунды скорость тела будет равна $v = 2g \approx 19{,}6$ м/с.

Задание 5. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' = 4x^3 + 6x^2 + 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 2$.

Решение. Интегрируя обе части уравнения, получим общее решение

$$y = x^4 + 2x^3 + x + C.$$

Для нахождения частного решения положим в общем решении $x = 1$, $y = 2$ и найдем C:

$$2 = 1 + 2 + 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = -2.$$

Частное решение имеет вид

$$y = x^4 + 2x^3 + x - 2.$$

Задание 6. Найдите уравнение кривой, зная, что отрезок, который отсекается касательной в произвольной точке кривой на оси ординат, равен утроенной ординате точки касания.

Решение. Уравнение касательной в произвольной точке кривой $A(x;\, y)$ имеет вид

$$Y - y = y'(X - x).$$

Для нахождения дифференциального уравнения положим в уравнение касательной $X = 0$, $Y = 3y$:

$$2y = -xy'.$$

Разделяем переменные

$$x\frac{dy}{dx} = -2y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = -2\frac{dx}{x}.$$

Интегрируем обе части

$$lny = -2lnx + C_1.$$

Пусть произвольная постоянная $C_1 = lnC$, тогда искомое уравнение кривой имеет вид

$$y = \frac{C}{x^2}.$$

Задание 7. Ракета с начальной массой m_0 движется прямолинейно под действием отдачи от истечения непрерывной струи газов, выбрасываемых из ракеты. Скорость u_0 истечения газов (относительно ракеты) постоянна по величине и направлена в сторону, противоположную начальной скорости ракеты v_0. Найти закон движения ракеты, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (задача Циолковского о прямолинейном движении ракеты в пустоте).

Решение. Рассмотрим случай $u_0 > v + \Delta v$, где v - скорость движения ракеты в моменты времени t. Запишем закон сохранения импульса системы в моменты времени t и $t + \Delta t$ ($\Delta m < 0$)

$$mv = (m + \Delta m)(v + \Delta v) + \Delta m(u_0 - v + \Delta v).$$

После упрощения уравнения получим:

$$m\Delta v = -u_0 \Delta m.$$

Аналогичный результат получим при $u_0 < v + \Delta v$

Предположим, что масса, как и скорость, непрерывная и дифференцируемая функция времени. Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$mdv = -u_0 dm.$$

Разделяем переменные

$$dv = -u_0 \frac{dm}{m}.$$

Интегрируем обе части

$$v = -u_0 lnm + C.$$

Произвольную постоянную C находим из начального условия $v = v_0$, $m = m_0$ при $t = 0$:

$$C = v_0 + u_0 lnm_0.$$

С учетом этого имеем

$$v = u_0 ln\frac{m_0}{m} + v_0.$$

Эта формула носит имя *Циолковского*.

Задание 8. Число распадов атомных ядер за интервал времени Δt в произвольном радиоактивном веществе пропорционально числу N имеющихся в образце радиоактивных атомов данного тип. Определить закон радиоактивного распада.

Решение. Введем постоянную распада λ, которая характеризует вероятность радиоактивного распада атома за единицу времени. Число радиоактивных атомов убывает со временем, поэтому $\Delta N < 0$.

Количество распавшихся атомом за время Δt равно

$$\Delta N = -\lambda N \Delta t.$$

Предположим, что количество нераспавшихся атомом непрерывная и дифференцируемая функция времени. Перейдя к пределу при $\Delta t \to 0$, получим

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt.$$

Интегрируем обе части

$$lnN = -\lambda t + lnC \;\; \Rightarrow \;\; N = Ce^{-\lambda t}.$$

Произвольную постоянную C находим из начального условия $N = N_0$ при $t = 0$:

$$C = N_0.$$

С учетом этого имеем

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Задание 9. Круглый цилиндрический бак с вертикальной осью, радиусом R и высотой H наполнен водой. На дне бака имеется небольшое круглое отверстие радиусом r, через которое вода вытекает. Определить время, за которое уровень воды понизится от начального положения H до высоты h. Определить время полного опорожнения бака, если $H = 1{,}2$ м, $R = 0{,}5$ м, $r = 0{,}01$ м.

Решение. Пусть в некоторый момент времени t высота жидкости в баке равна h. Количество жидкости dV, вытекшее из сосуда за промежуток времени dt, составит

$$dV = \pi r^2 v(h) dt.$$

Согласно закону Торичелли, скорость истечения жидкости через малое отверстие определяется

$$v = \mu\sqrt{2gh},$$

где g – ускорение свободного падения,

μ – коэффициент расхода, зависящий от вязкости жидкости и формы отверстия. В нашем примере $\mu = 0{,}62$.

Вследствие утечке воды ее уровень h в баке понизится на величину dh ($dh < 0$), следовательно, $dV = -\pi R^2 dh$.

Приравнивая оба выражения для dV, составляем дифференциальное уравнение

$$\pi r^2 \mu\sqrt{2gh} dt = -\pi R^2 dh \;\; \Rightarrow \;\; dt = -\frac{R^2}{r^2\mu\sqrt{2g}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{h}}.$$

Интегрируем обе части

$$t = -\frac{R^2}{r^2\mu\sqrt{2g}} \cdot \int_H^h \frac{dh}{\sqrt{h}} \;\; \Rightarrow t = \frac{2R^2}{r^2\mu\sqrt{2g}} \cdot \left(\sqrt{H} - \sqrt{h}\right).$$

Для частого случая, при $H = 1{,}2$ м, $h = 0$, $R = 0{,}5$ м, $r = 0{,}01$ м, получим

$$t = \frac{2 \cdot 0{,}5^2}{0{,}01^2 \cdot 0{,}62 \cdot \sqrt{2 \cdot 9{,}81}} \cdot \sqrt{1{,}2} \approx 1\,572 \text{ с } \approx 26 \text{ мин.}$$

Задание 10. Пусть в начальный момент тело с постоянной теплоемкостью имеет температуру T_0. Температура окружающей среды постоянна и равна T_c ($T_c < T_0$). Найдите закон охлаждения тела, принимая, что тепло, отданное телом за бесконечно малый промежуток времени dt, пропорционально разности температур тела и окружающей среды, а также длительности промежутка времени (закон Ньютона).

Решение. Воспользуемся законом Ньютона по теплопередаче. Скорость теплопотерь тела пропорциональна разнице температур между телом и окружающей средой:

$$\frac{dT}{dt} = -\lambda(T - T_c),$$

где λ – коэффициент теплопередачи,

$dT < 0$.

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dT}{T - T_c} = -\lambda dt \;\; \Rightarrow \; \ln(T - T_c) = -\lambda t + lnC \;\; \Rightarrow \;\; T = T_c + Ce^{-\lambda t}.$$

Произвольную постоянную C находим из начального условия $T = T_0$ при $t = 0$:

$$C = T_0 - T_c.$$

С учетом этого имеем

$$T = T_c + (T_0 - T_c)e^{-\lambda t}$$

Задание 11. Поглощение светового потока тонким слоем воды пропорционально толщине слоя и потоку, падающему на его поверхность. Зная, что при прохождении через слой 1 м поглощается 5% первоначального светового потока F_0, определить, какой процент его дойдет до глубины 3 м.

Решение. Обозначим через F световой поток, падающий на поверхность на глубине h. При прохождении через слой воды толщиной dh поглощенный световой поток dF ($dF < 0$) равен

$$dF = -\lambda F dh,$$

где λ – коэффициент пропорциональности.

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dF}{F} = -\lambda dh \;\; \Rightarrow \; \ln F = -\lambda h + lnC \;\; \Rightarrow \;\; F = Ce^{-\lambda h}.$$

Произвольную постоянную C находим из начального условия $F = F_0$ при $t = 0$: $C = F_0$.

С учетом этого имеем

$$F = F_0 e^{-\lambda h}.$$

По условию задания при $h = 1$ имеем $F = 0,95F_0$, поэтому

$$0{,}95F_0 = F_0 e^{-\lambda} \;\; \Rightarrow \;\; e^{-\lambda} = 0{,}95.$$

До глубины 3 м дойдет световой поток, равный

$$F = F_0 \cdot 0{,}95^3 \approx 0{,}8574F_0,$$

Что составляет 85,74% падающего светового потока.

Задание 12. В баке находится 400 л морской воды, содержащей 3,5 % соли (35 г/л). В бак непрерывно подается пресная вода со скоростью 3 л/мин. Полученная смесь перемешивается и вытекает со скоростью 3 л/мин. Какой станет концентрация соли через 2 часа?

Решение. Пусть в произвольный момент времени t в баке содержится $m(t)$ количества соли. За небольшой промежуток времени dt из бака выльется $\frac{3m(t)dt}{400}$ граммов соли. Если в течение этого промежутка времени концентрацию соли считать неизменной, то изменение количества соли dm ($dm < 0$) в баке составит

$$dm = -\frac{3mdt}{400}.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dm}{m} = -\frac{3dt}{400} \;\Rightarrow\; lnm = -\frac{3t}{400} + lnC \;\Rightarrow\; m = Ce^{-\frac{3t}{400}}.$$

Произвольную постоянную C находим из начального условия $m_0 = 35 \cdot 400 = 14000$ при $t = 0$: $C = 14000$.

Через 2 часа концентрация соли ρ составит

$$\rho = \frac{14000}{400} e^{-\frac{3\cdot 120}{400}} \approx 14{,}2 \text{ г/л}.$$

Задание 13. Кредит в триста тысяч рублей взят на пять лет под 20 % годовых. Какую разовую сумму необходимо выплатить кредитору в конце срока, если проценты начисляются: а) каждый год; б) непрерывно?

Решение. а) Воспользуемся формулой сложных процентов

$$S = S_0\left(1 + \frac{i}{100}\right)^n \Rightarrow S = 300\,000 \cdot 1{,}2^5 = 746\,496.$$

б) Прирост задолженности dS за время dt (время измеряется в годах) составляет

$$dS = 0{,}2Sdt.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dS}{S} = 0{,}2dt \;\Rightarrow\; lnS = 0{,}2t + lnC \;\Rightarrow\; S = Ce^{0{,}2t}.$$

Произвольную постоянную C находим из начального условия $S_0 = 300\,000$ при $t = 0$: $C = 300\,000$.

Через пять лет задолженность составит

$$S = 300\,000 \cdot e^{0{,}2\cdot 5} \approx 815\,484{,}55.$$

Задание 14. Комбинат строительных материалов выпускает и продает 1000 кирпичей в сутки стоимостью 25 рублей за один кирпич. В течение месяца 2% вырученных денег от стоимости реализованного товара направляется на расширение производства. Каждые 2000 рублей, вложенные в расширение производства, приводит к увеличению выпуска на один кирпич в день. Сколько кирпичей в день будет производить комбинат к концу месяца?

Решение. Обозначим через $S(t)$ количество произведенного кирпича в момент времени t (время измеряется в сутках). Выручка от реализации произведенных кирпичей составит $25S$ рублей. На расширение производства будет направлено $25S \cdot 0{,}02 = 0{,}5S$ рублей. Это приведет к увеличению производства на величину $0{,}5S/2000$, т. е.

$$dS = 0{,}00025Sdt.$$

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dS}{S} = 0{,}00025dt \ \Rightarrow \ lnS = 0{,}00025t + lnC \ \Rightarrow \ S = Ce^{0{,}00025t}.$$

Произвольную постоянную C находим из начального условия $S_0 = 1\,000$ при $t = 0$: $C = 1\,000$.

Через 30 дней комбинат будет производить

$$S = 1\,000 \cdot e^{0{,}00025 \cdot 30} \approx 1\,007$$

кирпичей в сутки.

Задание 15. *Выберите несколько вариантов ответа.* Из данных дифференциальных уравнений уравнениями с разделяющимися переменными являются …

1) $y^3 \frac{dy}{dx} - y^3 tgx = 0$ 2) $\frac{dy}{dx} = ln\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^2}$

3) $\frac{dy}{dx} - 2x^2 = x^2 e^{2y}$ 4) $\frac{dy}{dx} = 2\frac{y}{x} + \frac{y^3}{x^3} + 3$

Решение. Дифференциальное уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$ относится к типу уравнений с разделяющимися переменными. К такому виду можно привести уравнения 1) и 3).

Запишем уравнение 1) в виде $y^3 \frac{dy}{dx} = y^3 tgx$ и, разделив обе части уравнения на y^3, получим $\frac{dy}{dx} = tgx$. Последнее означает, что уравнение 1) – уравнение с разделяющимися переменными, где $f(x) = tgx$, а $g(y) = 1$, а значит, и исходное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными.

Перепишем уравнение 3) в виде $\frac{dy}{dx} = 2x^2 + x^2 e^{2y}$ и, разложив выражение в правой части на множители, получим уравнение указанного выше вида $\frac{dy}{dx} = x^2(2 + e^{2y})$. Здесь $f(x) = x^2$, а $g(y) = 2 + e^{2y}$.

Уравнения 2) и 4) нельзя привести к указанному типу.

Ответ: 1) *и* 3).

1.3. Однородные уравнения первого порядка

Рассмотрим сначала понятие однородной функции двух переменных.

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется **однородной функцией измерения (порядка) $\boldsymbol{n}$**, если при любом t справедливо тождество

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Например, функция $f(x, y) = x^2 - 3xy + 5y^2$ есть однородная функция второго измерения, т. к.

$$f(tx, ty) = (tx)^2 - 3txty + 5(ty)^2 = t^2(x^2 - 3xy + 5y^2) = t^2 f(x, y).$$

С понятием однородной функции связано понятие однородного дифференциального уравнения.

Уравнение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ называется **однородным дифференциальным уравнением первого порядка**, если функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ являются однородными функциями одного и того же измерения.

Однородные дифференциальные уравнения решаются введением новой переменной U по формуле $U = \frac{y}{x}$ или $y = Ux$, при этом $dy = Udx + xdU$. После подстановки данное однородное уравнение будет являться уравнением с разделяющимися переменными x и U; из него определяется U, а из формулы $y = Ux$ искомая функция y.

Задание 16. Найдите решение уравнения$(y^2 - 3x^2)dx + 2xydy = 0$, если $y = 0$ при $x = 0$.

Решение. Здесь $P(x,y) = y^2 - 3x^2$ и $Q(x,y) = 2xy$ - однородные функции второго порядка. Разделим обе части на x^2 и применим подстановку $y = Ux$, $U = \frac{y}{x}$ при этом $dy = Udx + xdU$.

Получим:

$$(U^2 - 3)dx + 2U(Udx + xdU) = 0 \Rightarrow 3(U^2 - 1)dx + 2UxdU = 0.$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{3}{x}dx = -\frac{2UdU}{U^2 - 1} \Rightarrow 3\,ln|x| = -\,ln|U^2 - 1| + ln\,|C| \Rightarrow x^3(U^2 - 1) = C.$$

Так как $U = \frac{y}{x}$, то $x^3\left(\frac{y^2}{x^2} - 1\right) = C$, $x(y^2 - x^2) = C$ - общий интеграл. Используя начальные условия $y(0) = 0$ имеем $0(0^2 - 0^2) = C$, $C = 0$. Тогда $x(y^2 - x^2) = 0$ и $y = \pm x$ - частное решение данного уравнения.

1.4. Линейные уравнения первого порядка

Уравнение $y' + py = q$, где $p = p(x)$ и $q = q(x)$ - заданные непрерывные функции, называется **линейным дифференциальным уравнением первого порядка.**

Если функция $q(x)$, стоящая в правой части уравнения, тождественно равна нулю, т. е. $q(x) = 0$, то уравнение называется **линейным однородным**, в противном случае – **линейным неоднородным**.

Таким образом, $y' + py = 0$ - линейное однородное уравнение, а $y' + py = q$ - линейное неоднородное уравнение.

Рассмотрим три метода интегрирования линейных уравнений.

I метод. Для решения уравнения применяют подстановку $y = UV$, причем функцию $U = U(x)$ считают новой неизвестной функцией, а функцию $V = V(x)$ подчиняют условию: $\frac{dV}{dx} + pV = 0$. Данная подстановка приводит к двум уравнениям с разделяющимися переменными относительно U и V. Произведение полученных функций даст общее решение линейного уравнения: $y = UV$.

Задание 17. Найдите общее решение уравнения $y' - \frac{y}{x} = x$.

Решение. Здесь $p = -\frac{1}{x}$, $q = x$. Имеем: $y = UV$, $y' = U'V + V'U$,

$$U'V + V'U - \frac{UV}{x} = x \Rightarrow U'V + U\left(V' - \frac{V}{x}\right) = x \Rightarrow$$

$$\begin{cases} V' - \dfrac{V}{x} = 0, \\ U'V = x. \end{cases}$$

Для первого уравнения находим частное решение (без C):

$$\frac{dV}{dx} = \frac{V}{x} \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dx}{x} \Rightarrow lnV = lnx \Rightarrow V = x.$$

Подставляем во второе уравнение системы найденное частное решение однородного уравнения

$$\frac{dU}{dx}x = x \Rightarrow dU = dx \Rightarrow U = x + C.$$

Поскольку $y = UV$, то $y = x(x + C)$ - общее решение линейного уравнения.

II метод (Метод вариации произвольной постоянной).

В линейном однородном уравнении $y' + py = 0$ переменные разделяются и его общее решение, которое мы обозначим через Y, легко находится. Затем находят общее решение неоднородного линейного уравнения $y' + py = q$, считая, что оно имеет такую же форму, как и общее решение соответствующего однородного уравнения Y, но где C есть не постоянная величина, а неизвестная функция от x, т. е. считая, что $y = C(x)$.

Полученное общее решение состоит из двух слагаемых: общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения.

Задание 18. Найдите общее решение уравнения $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2$.

Решение. Интегрируем соответствующее однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2xy}{1+x^2} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2xdx}{1+x^2} \Rightarrow$$

$$ln\, y = ln|1 + x^2| + ln\, C \Rightarrow y = C(1 + x^2).$$

Считаем C функцией x:

$$y = C(x)(1 + x^2),\ y' = C'(x)(1 + x^2) + C(x) \cdot 2x.$$

Подставляем в исходное уравнение:

$$C'(x)(1 + x^2) + C(x) \cdot 2x - \frac{2xC(x)(1 + x^2)}{1 + x^2} = 1 + x^2,$$

$$C'(x)(1 + x^2) = 1 + x^2,\ \frac{dC}{dx} = 1,\ C = x + C_1,\ y = (x + C_1)(1 + x^2),$$

$y = C_1(1 + x^2) + x + x^3$ - общее решение линейного уравнения.

III метод. Используем готовое решение в общем виде

$$y = e^{-\int p dx}\left(\int q e^{\int p dx} dx + C\right).$$

Оба интеграла находятся без C.

Задание 19. Найдите общее решение уравнения $y' - 3y = x$.

Решение. Здесь $p = -3$, $q = x$. Найдем первый интеграл без C:

$$\int p dx = \int (-3) dx = -3x.$$

Найдем второй интеграл без C, используя формулу интегрирования по частям:

$$\int q e^{\int p dx} dx = \int x e^{-3x} dx = \begin{vmatrix} u = x, & e^{-3x} dx = dv, \\ du = dx, & -\frac{1}{3} e^{-3x} = v \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3} x e^{-3x} + \frac{1}{3}\int e^{-3x} dx = -\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x}.$$

Подставляем в формулу найденные частные интегралы:

$$y = e^{-\int p dx}\left(\int q e^{\int p dx} dx + C\right) =$$

$$= e^{3x}\left(-\frac{1}{3} x e^{-3x} - \frac{1}{9} e^{-3x} + C\right) = C e^{3x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{9}.$$

Задание 20. Сила тока i в цепи с сопротивлением R, самоиндукции L и постоянной электродвижущей силой E удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$Li' + Ri = E.$$

Найдите решение это дифференциального уравнения.

Решение.

1 способ. Введем новую переменную $i = UV$, $i' = U'V + V'U$, тогда

$$LU'V + LV'U + RUV = E \Rightarrow \begin{cases} LV' + RV = 0, \\ LU'V = E. \end{cases}$$

Находим частное решение первого уравнения системы:

$$L\frac{dV}{dt} = -RV \Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{Rdt}{L} \Rightarrow lnV = -\frac{R}{L} t \Rightarrow V = e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Подставляем во второе уравнение системы найденное частное решение

$$L e^{-\frac{R}{L} t} \cdot \frac{dU}{dt} = E \Rightarrow dU = \frac{E}{L} e^{\frac{R}{L} t} dt \Rightarrow U = \frac{E}{R} e^{\frac{R}{L} t} + C.$$

Поскольку $i = UV$, то $i = \frac{E}{R} + C e^{-\frac{R}{L} t}$ - общее решение линейного уравнения.

2 способ. Представим это уравнение в виде уравнения с разделенными переменными

$$L\frac{di}{dt} = E - Ri \Rightarrow \frac{di}{E - Ri} = \frac{dt}{L}.$$

Интегрируем обе части

$$-\frac{1}{R}\int\frac{d(E-Ri)}{E-Ri}=\int\frac{dt}{L}\Rightarrow ln(E-Ri)=-\frac{R}{L}t+lnC_1\ \Rightarrow i=\frac{E}{R}+Ce^{-\frac{R}{L}t},$$

где $C=-\frac{C_1}{R}$.

1.5. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида $y'+py=qy^n$ (здесь $n\neq 0$ и $n\neq 1$).

Это уравнение решается с помощью замены $y=UV$, или приводится к линейному с помощью подстановки $y^{-n+1}=z$. Решая линейное уравнение относительно функции z и подставляя вместо z выражение y^{-n+1}, получим общий интеграл уравнения Бернулли.

Задание 21. Найдите общее решение уравнения $y'+y=y^2$.

Решение. Введем новую переменную $y=UV,\ \ y'=U'V+V'U$. Тогда

$$U'V+V'U+UV=(UV)^2\Rightarrow\begin{cases}V'+V=0,\\ U'=U^2V.\end{cases}$$

Находим частное решение первого уравнения системы:

$$\frac{dV}{dx}=-V\ \ \Rightarrow\ \frac{dV}{V}=-dx\ \ \Rightarrow\ lnV=-x\ \ \Rightarrow V=e^{-x}.$$

Подставляем во второе уравнение системы найденное частное решение

$$\frac{dU}{dx}=U^2e^{-x}\ \ \Rightarrow\ \frac{dU}{U^2}=e^{-x}dx\ \ \Rightarrow\ -\frac{1}{U}=-e^{-x}-C\ \Rightarrow\ U=\frac{1}{e^{-x}+C}.$$

Поскольку $y=UV$, то $y=\frac{1}{Ce^x+1}$ - общее решение уравнения Бернулли.

1.6. Уравнения в полных дифференциалах

Если левая часть уравнения

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$$

представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, т. е.

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=du(x,y),$$

то это уравнение называется *уравнением в полных дифференциалах*.

Общий интеграл дифференциального уравнения равен

$$u(x,y)=C.$$

Необходимое условие полного дифференциала. Для того чтобы дифференциальное выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ являлось в области D полным дифференциалом некоторой функции $u=u(x,y)$, необходимо, чтобы в этой области выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \forall(x,y)\in D.$$

Общий интеграл находится из системы

$$\begin{cases} u(x,y) = \int P(x, y = const)dx + \varphi(y), \\ u(x,y) = \int Q(x = const, y)dy + \psi(x). \end{cases}$$

Задание 22. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения
$$(2x + 5y)dx + (5x - 4y)dy = 0.$$

Решение. В нашем случае $P(x, y) = 2x + 5y$, $Q(x, y) = 5x - 4y$, $\frac{dP}{dy} = 5$, $\frac{dQ}{dx} = 5$, необходимое условие $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ выполнено.

Найдем первый интеграл
$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \int (2x + 5y)dx + \varphi(y) = x^2 + 5xy + \varphi(y).$$

Найдем второй интеграл
$$u(x,y) = \int Q(x,y)dy + \psi(x) = \int (5x - 4y)dy + \psi(x) = \\ = 5xy - 2y^2 + \psi(x)$$

Сравнивая правые части полученных выражений, получим общий интеграл дифференциального уравнения
$$x^2 + 5xy - 2y^2 = C.$$

Если условие $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ не выполнено, то дифференциальное
$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$
не является уравнением в полных дифференциалах. Однако это уравнение можно превратить в уравнение в полных дифференциалах умножением на подходящую функцию $\mu(x, y)$. Такая функция носит название *интегрирующего множителя*.

Частый случай нахождения интегрирующего множителя:

- если $\frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}}{Q} = f(x)$, то $ln\mu = \int f(x)dx$;
- если $\frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}}{P} = g(y)$, то $ln\mu = -\int g(y)dy$.

Задание 23. Найдите общий интеграл дифференциального уравнения
$$(x + y)dx + (x^2 - x)dy = 0.$$

Решение. В нашем случае $P(x, y) = x + y$, $Q(x, y) = x^2 - x$, $\frac{dP}{dy} = 1$, $\frac{dQ}{dx} = 2x - 1$, условие $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$ не выполнено.

Попробуем найти интегрирующий множитель.
$$\frac{\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx}}{Q} = \frac{1 - (2x - 1)}{x^2 - x} = \frac{2(1 - x)}{x(x - 1)} = \frac{-2}{x} = f(x).$$

Следовательно,

$$ln\mu = \int f(x)dx = \int \frac{-2}{x}dx = -2\ln x\,.$$

Интегрирующий множитель равен

$$\mu = \frac{1}{x^2}.$$

Умножим обе части уравнения на μ; получим

$$\frac{x+y}{x^2}dx + \frac{x^2-x}{x^2}dy = 0 \ \Rightarrow \ \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \left(1 - \frac{1}{x}\right)dy = 0.$$

Найдем первый интеграл

$$u(x,y) = \int P(x,y)dx + \varphi(y) = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{y}{x^2}\right)dx + \varphi(y) = lnx - \frac{y}{x} + \varphi(y).$$

Найдем второй интеграл

$$u(x,y) = \int Q(x,y)dy + \psi(x) = \int \left(1 - \frac{1}{x}\right)dy + \psi(x) = y - \frac{y}{x} + \psi(x).$$

Сравнивая правые части полученных выражений, получим

$$lnx - \frac{y}{x} + y = C \ \text{ или } \ xlnx - y + xy - Cx = 0.$$

Замечание. Данное уравнение можно преобразовать к линейному дифференциальному уравнению вида

$$(x^2 - x)y' + y = -x.$$

1.7. Одношаговые методы интегрирования дифференциальных уравнений первого порядка

Простейшим численным методом решения задачи Коши для дифференциального уравнения является *метод Эйлера*. Для равноотстоящих узлов значения сеточной функции в узлах определяются по формулам: $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, $i = 0, 1, ...$

Напомним формулировку задачи Коши. Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению $y' = f(x,y)$ и принимающую при $x = x_0$ заданное значение y_0, т. е. $y(x_0) = y_0$.

Наиболее распространенным является *метод Рунге – Кутта*. Приведем схему Рунге – Кутта четвертого порядка.

$$y_{i+1} = y_i + \tfrac{1}{6}(c_0 + 2c_1 + 2c_2 + c_3),\ i = 0, 1, ...,$$

$$c_0 = hf(x_i, y_i), \qquad c_1 = hf\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{c_0}{2}\right),$$

$$c_2 = hf\left(x_i + \tfrac{h}{2}, y_i + \tfrac{c_1}{2}\right), \qquad c_3 = hf(x_i + h, y_i + c_2).$$

Метод Рунге – Кутта требует большого объема вычислений, но имеет малую погрешность и позволяет проводить расчеты с большим шагом.

Задание 24. Решить задачу Коши $y' = 2x - 1$ при $y(0) = 1$, $0 \le x \le 0{,}5$, $h = 0{,}1$ методом Эйлера.

Решение. В нашем случае $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $f(x, y) = 2x - 1$. Найдем значения y_i

$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0 - 1) = 0{,}9,$

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 0{,}9 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}1 - 1) = 0{,}9 - 0{,}08 = 0{,}82,$$
$$y_3 = y_2 + hf(x_2, y_2) = 0{,}82 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}2 - 1) = 0{,}82 - 0{,}06 = 0{,}76,$$
$$y_4 = y_3 + hf(x_3, y_3) = 0{,}76 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}3 - 1) = 0{,}76 - 0{,}04 = 0{,}72,$$
$$y_5 = y_4 + hf(x_4, y_4) = 0{,}72 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}4 - 1) = 0{,}72 - 0{,}02 = 0{,}7,$$
$$y_6 = y_5 + hf(x_5, y_5) = 0{,}7 + 0{,}1 \cdot (2 \cdot 0{,}5 - 1) = 0{,}7.$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид $y = x^2 - x + C$. Найдем константу C из начальных условий: $1 = 0 - 0 + C$, $C = 1$. Следовательно, точное решение задачи Коши $y = x^2 - x + 1$. Сравним результаты.

x_i	Метод Эйлера	Точное решение
0	1	1
0,1	0,9	0,91
0,2	0,82	0,84
0,3	0,76	0,79
0,4	0,72	0,76
0,5	0,7	0,75

Для сравнения найдем методом Рунге – Кутта y_1 и y_2:

$$c_0 = 0{,}1 \cdot f(0,\ 1) = -0{,}1, \qquad c_1 = 0{,}1 \cdot f(0{,}05,\ 0{,}5) = -0{,}09,$$
$$c_2 = 0{,}1 \cdot f(0{,}05,\ 0{,}55) = -0{,}09, \qquad c_3 = 0{,}1 \cdot f(0{,}1,\ 0{,}1) = -0{,}08,$$
$$y_1 = y_0 + \frac{1}{6}(c_0 + 2c_1 + 2c_2 + c_3) =$$
$$= 1 + \frac{1}{6}(-0{,}1 - 0{,}18 - 0{,}18 - 0{,}08) = 1 - \frac{0{,}54}{6} = 0{,}91.$$
$$c_0 = 0{,}1 \cdot f(0{,}1,\ 0{,}91) = -0{,}08, \qquad c_1 = 0{,}1 \cdot f(0{,}15,\ 0{,}51) = -0{,}07,$$
$$c_2 = 0{,}1 \cdot f(0{,}15,\ 0{,}56) = -0{,}07, \qquad c_3 = 0{,}1 \cdot f(0{,}2,\ 0{,}21) = -0{,}06,$$
$$y_2 = 0{,}91 + \frac{1}{6}(-0{,}08 - 0{,}14 - 0{,}14 - 0{,}06) = 0{,}91 - \frac{0{,}42}{6} = 0{,}84.$$

§ 2. Дифференциальные уравнения высших порядков

2.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$

Решение данного уравнения получается последовательным интегрированием его левой и правой частей.

Задание 25. Найдите общее решение дифференциального уравнения
$$y''' = e^{\frac{x}{2}} + 1.$$

Решение. Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y'' = \int (e^{\frac{x}{2}} + 1)dx = 2e^{\frac{x}{2}} + x + C_1,$$
$$y' = \int (2e^{\frac{x}{2}} + x + C_1)dx = 4e^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2,$$
$$y = \int (4e^{\frac{x}{2}} + \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2)dx = 8e^{\frac{x}{2}} + \frac{x^3}{6} + C_1\frac{x^2}{2} + C_2x + C_3.$$

Задание 26. Найдите общее решение дифференциального уравнения
$$y'' = sin\, 4\, x + x - 1.$$

Решение. Найдем общее решение последовательным интегрированием данного уравнения:

$$y' = \int (sin\, 4\, x + x - 1)dx = -\frac{1}{4}cos\, 4\, x + \frac{x^2}{2} - x + C_1,$$
$$y = \int \left(-\frac{1}{4}cos\, 4\, x + \frac{x^2}{2} - x + C_1\right)dx = -\frac{1}{16}sin\, 4\, x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + C_1x + C_2.$$

Задание 27. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Определить закон движения без учета силы трения.

Решение. На тело действует сила тяжести $F = mg$, где g – ускорение свободного падения.

Из второго закона Ньютона получим дифференциальное уравнение движения
$$ma = -mg \;\; \Rightarrow \; \frac{d^2s}{dt^2} = -g.$$

Интегрируя дважды по t, получим
$$\frac{ds}{dt} = -gt + C_1 \;\; \Rightarrow \; s = -\frac{gt^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Используя начальные условия $s(0) = 0$, $v(0) = v_0$, найдем постоянные C_1 и C_2: $C_2 = 0$, $C_1 = v_0$.

Пройденный путь брошенного вертикально вверх тела с начальной скоростью v_0 без учета силы трения определяется
$$s = -\frac{gt^2}{2} + v_0t.$$

2.2. Уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

1. Уравнение вида $y'' = f(x, y')$ *не содержит явным образом искомой функции* y. Порядок такого уравнения может быть понижен с помощью подстановки $y' = p,\ y'' = p'$.

2. Уравнение вида $y'' = f(y, y')$ *не содержит явным образом независимую переменную* x. Порядок этого уравнения также может быть понижен. И в этом случае полагаем $y' = p$, но теперь мы будем считать p функцией от y (а не от x, как прежде), тогда $y'' = pp'$.

Задание 27. Найдите общее решение дифференциального уравнения $xy'' + 2y' = 0$.

Решение. В запись данного дифференциального уравнения второго порядка не входит искомая функция $y = y(x)$, поэтому понижение порядка достигается с помощью замены $z = y'$. Тогда $y'' = (y')' = z'$ и исходное уравнение принимает вид $xz' + 2z = 0$. Мы получили уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.

$$x\frac{dz}{dx} = -2z \ \Rightarrow\ \frac{dz}{z} = -2\frac{dx}{x} \ \Rightarrow\ lnz = -2lnx + lnC_1 \ \Rightarrow z = \frac{C_1}{x^2}.$$

Особое решение $z = 0$ будет входить в общее, если его дополнить условием

$C_1 = 0$.

Так как $z = \frac{dy}{dx}$, то получаем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x^2} \ \Rightarrow\ dy = \frac{C_1}{x^2} \ \Rightarrow\ y = -\frac{C_1}{x} + C_2.$$

Задание 28. Найдите частное решение уравнения $y'' = 4y$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1,\ y'(0) = 1$.

Решение. Данное уравнение не содержит x. Положим $y' = p$, рассматривая p как функцию от y. Тогда $y'' = pp'$, и мы получаем уравнение первого порядка относительно вспомогательной функции p:

$$p\frac{dp}{dy} = 4y \ \Rightarrow\ pdp = 4ydy \ \Rightarrow\ \frac{p^2}{2} = 2y^2 + C_1.$$

Определим значение произвольной постоянной C_1, используя начальные условия: $1 = 1 + C_1,\ C_1 = 0$. Следовательно, $\frac{dy}{dx} = \pm y$.

Разделяем переменные и интегрируем

$$\frac{dy}{y} = \pm dx \ \Rightarrow\ lny = \pm x + lnC_2 \ \Rightarrow\ y = C_2 e^{\pm x}.$$

Пользуясь тем, что $y(0) = 1$, найдем C_2: $C_2 = 1$.

Искомое частное решение:

$$y = e^{x} \text{ или } y = e^{-x}.$$

Замечание. Аналогичным способом можно проинтегрировать уравнение $y^{(n)} = f\left(x, y^{(n-1)}\right)$, полагая $y^{(n-1)} = p$.

Задание 30. Тело массой m падает с некоторой высоты. Найдите закон движения падающего тела, если оно испытывает сопротивление, пропорциональное скорости.

Решение. Запишем второй закон Ньютона

$$ma = mg - kv.$$

Если путь равен s, то

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Второй закон Ньютона запишем в виде

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\frac{ds}{dt}.$$

Сделаем замену $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv \;\Rightarrow\; \frac{mdv}{mg - kv} = dt \;\Rightarrow\; -\frac{m}{k}ln(mg - kv) = t + C.$$

Выражаем v

$$mg - kv = e^{-\frac{k}{m}(t+C)} \;\Rightarrow\; v = \frac{mg}{k} - \frac{1}{k}e^{-\frac{k}{m}(t+C)}.$$

Из начальных условий $v(0) = 0$ находим C

$$0 = \frac{mg}{k} - \frac{1}{k}e^{-\frac{k}{m}C} \;\Rightarrow\; -\frac{k}{m}C = \ln(mg) \Rightarrow\; C = -\frac{m}{k}\ln(mg).$$

В результате имеем

$$v = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Поскольку $\frac{ds}{dt} = v$, то

$$ds = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)dt \Rightarrow\; s = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right) + C_1.$$

Из начальных условий $s(0) = 0$ находим C_1

$$0 = \frac{m^2g}{k^2} + C_1 \Rightarrow\; C_1 = -\frac{m^2g}{k^2}.$$

Пройденный путь брошенного тела с нулевой начальной скоростью с учетом силы трения, пропорциональной скорости, определяется

$$s = \frac{mg}{k}t - \frac{m^2g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right).$$

Задание 31. Тело массой m падает с некоторой высоты. Найдите скорость падающего тела через 2 сек для $m = 75$ кг и $m = 12$ кг, если оно испытывает сопротивление, пропорциональное квадрату скорости. Коэффициент пропорциональности равен 0,6 кг/м.

Решение. Запишем второй закон Ньютона

$$ma = mg - kv^2.$$

Если путь равен s, то

$$v = \frac{ds}{dt}, \qquad a = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

Второй закон Ньютона запишем в виде

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

Сделаем замену $\frac{ds}{dt} = v$, $\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$. Тогда получим дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2 \;\Rightarrow\; \frac{mdv}{mg - kv^2} = dt \;\Rightarrow\; -\frac{m}{k}\frac{dv}{v^2 - \frac{mg}{k}} = dt.$$

Пусть $\frac{mg}{k} = b^2$. Интегрируем обе части

$$-\frac{m}{kb} ln\left|\frac{v-b}{v+b}\right| = t + C.$$

Из начальных условий $v(0) = 0$ находим $C = 0$.

Выражаем скорость v

$$\frac{v-b}{v+b} = -e^{-\frac{kb}{m}t} \;\Rightarrow\; v - b = -ve^{-\frac{kb}{m}t} - be^{-\frac{kb}{m}t} \Rightarrow\; v = b\frac{1 - e^{-\frac{kb}{m}t}}{1 + e^{-\frac{kb}{m}t}},$$

или

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\left(1 - \frac{2}{e^{\sqrt{\frac{kg}{m}}\cdot t} + 1}\right).$$

Скорость через 2 секунды для $m = 75$ кг

$$v = 35 - \frac{2}{e^{0,56} + 1} \approx 35 - 0,73 = 34,27\ \frac{\text{м}}{\text{с}},$$

для $m = 12$ кг

$$v = 14 - \frac{2}{e^{1,4} + 1} \approx 14 - 0,4 = 13,6\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

2.3. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, т. е. уравнение $y'' + py' + qy = 0$, где p и q - постоянные числа.

Чтобы найти общее решение этого уравнения, достаточно найти два линейно независимых частных решения в виде $y = e^{kx}$, где $k = Const$.

Подставляя эту функцию и ее производные $y' = ke^{kx}$ и $y'' = k^2e^{kx}$ в рассматриваемое уравнение, получим: $e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0$. Так как $e^{kx} \neq 0$, значит $k^2 + pk + q = 0$.

Следовательно, если k будет удовлетворять полученному уравнению, которое называется **характеристическим**, то e^{kx} будет решением исходного уравнения.

Характеристическим уравнением является квадратное уравнение, имеющее два корня.

Возможны следующие случаи:

а) Корни характеристического уравнения действительные и различные.

В этом случае частными решениями будут функции $y_1 = e^{k_1 x}$ и $y_2 = e^{k_2 x}$. Общим решением уравнения будет $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$.

Задание 29. Найдите общее решение уравнения $y'' + y' - 6y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + k - 6 = 0$. Корни характеристического уравнения: $k_1 = 2,\ \mathrm{k}_2 = -3$. Общее решение:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

б) Корни характеристического уравнения действительные и равные.

В этом случае мы имеем только одно частное решение $y = e^{kx}$, т. к. $k_1 = k_2 = k$. При этом общее решение будет

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}.$$

Задание 30. Найдите общее решение уравнения $y'' + 6y' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 6k + 9 = 0$. Найдем его корни: $k_1 = -3,\ \ k_2 = -3$. Общим решением будет функция

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}.$$

в) Корни характеристического уравнения комплексные (см. прилржение).

Так как коэффициенты p и q характеристического уравнения действительные числа, то комплексные корни будут сопряженными. Причем, $k_1 = \alpha + i\beta$,
$k_2 = \alpha - i\beta$. Общее решение в рассматриваемом случае имеет вид

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta\, x + C_2 \sin\beta\, x).$$

Задание 31. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0,\ \ y'(0) = 1$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$. Найдем его корни $k_{1,2} = -1 \pm 2i$. Следовательно, общее решение

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2\,x + C_2 \sin 2\,x).$$

Найдем теперь частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям. На основании первого условия находим $0 = e^{-0}(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0)$, откуда $C_1 = 0$. С учетом этого $y' = e^{-x} 2C_2 \cos 2\,x - e^{-x} C_2 \sin 2\,x$, из второго условия получаем: $1 = 2C_2$, т. е. $C_2 = \frac{1}{2}$. Таким образом, искомое частное решение

$$y = \frac{1}{2}e^{-x}\, sin\, 2\, x.$$

Замечание. Аналогичным способом решаются однородное дифференциальное n – порядка.

Задание 32. Найдите общее решение уравнения $y''' + 5y'' + 6y' = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^3 + 5k^2 + 6k = 0$. Найдем его корни: $k_1 = -3,\ \ k_2 = -2,\ \ k_3 = 0$. Общим решением будет функция

$$y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} + C_3.$$

2.4. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами имеют вид $y'' + py' + qy = f(x)$, где p и q - действительные числа.

Общее решение линейного неоднородного уравнения представляется как сумма какого-нибудь частного решения y^* этого уравнения и общего решения Y соответствующего однородного уравнения, т. е. $y = Y + y^*$.

Вид частного y^* решения неоднородного уравнения зависит от вида правой части этого уравнения. Рассмотрим некоторые случаи.

а) $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\ \ (a_2 \neq 0)$. Если $q \neq 0$, то частное решение неоднородного уравнения ищем также в форме квадратного трехчлена: $y^* = A_2x^2 + A_1x + A_0$, где A_2, A_1, A_0 - неопределенные коэффициенты. Если $q = 0$, то частное решение y^* ищем в виде $y^* = x(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда один из корней характеристического уравнения равен нулю, и в виде $y^* = x^2(A_2x^2 + A_1x + A_0)$, когда оба корня характеристического уравнения нули. Аналогично обстоит дело, если $f(x)$ - многочлен $P(x)$ произвольной степени.

Задание 33. Найдите общее решение уравнения $y'' + y' = 2x + 1$.

Решение. Составим характеристическое уравнение однородного уравнения и найдем его корни: $k^2 + k = 0,\ \ k_1 = 0,\ \ k_2 = -1,\ \ Y = C_1 + C_2e^{-x}$. Так как ноль – однократный корень характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $y^* = x(A_1x + A_0)$. Отсюда имеем: $y^{*\prime} = 2A_1x + A_0,\ \ y^{*\prime\prime} = 2A_1$. Подставляем в исходное уравнение: $2A_1 + 2A_1x + A_0 = 2x + 1$. Искомые коэффициенты будут: $A_1 = 1,\ \ A_0 = -1$. Значит, частное решение будет $y^* = x^2 - x$, а общее решение имеет вид

$$y = C_1 + C_2e^{-x} + x^2 - x.$$

б) $f(x) = ae^{bx}\ \ (a \neq 0)$. Частное решение ищем в виде $y^* = Ae^{bx}$, где A - неопределенный коэффициент. Если b - корень характеристического уравнения, то частное решение ищем в виде $y^* = Axe^{bx}$, когда b - однократный корень, и в виде $y^* = Ax^2e^{bx}$, когда b - двукратный корень. Аналогично будет, если $f(x) = P(x)ae^{bx}$, где $P(x)$ - многочлен.

Задание 34. Найдите общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = 2e^x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение однородного уравнения и найдем его корни: $k^2 - 2k + 1 = 0,\ \ k_1 = k_2 = 1,\ \ Y = (C_1 + C_2x)e^x$. Так как в характеристическом уравнении корень имеет кратность, равную двум, то частное решение данного уравнения ищем в виде $y^* = Ax^2e^x$. Далее имеем:

$$y^{*'} = Ax(x+2)e^x,\ \ y^{*''} = A(x^2+4x+2)e^x,$$
$$Ae^x(x^2+4x+2) - 2Axe^x(x+2) + Ax^2e^x = 2e^x,\ \ A = 1,$$
$$y^* = x^2e^x.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$$y = (C_1 + C_2x)e^x + x^2e^x.$$

в) $f(x) = a\cos\omega x + b\sin\omega x$ (a и b не нули одновременно). В этом случае частное решение y^* ищем также в форме тригонометрического двучлена $y^* = A\cos\omega x + B\sin\omega x$, где A и B - неопределенные коэффициенты.

В случае $p = 0,\ \ q = \omega^2$ (или когда $\pm\omega i$ - корни характеристического уравнения) частное решение исходного уравнения ищем в виде

$$y^* = x(A\cos\omega x + +B\sin\omega x).$$

Задание 35. Найдите общее решение уравнения $y'' + y = \cos x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение однородного уравнения и найдем его корни: $k^2 + 1 = 0,\ \ k_1 = i,\ \ k_2 = -i,\ \ Y = C_1\cos x + C_2\sin x$. Так как $\pm i$ - корни характеристического уравнения, то частное решение данного уравнения ищем в виде $y^* = x(A\cos x + B\sin x)$. Далее имеем:

$$y^{*'} = A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x),$$
$$y^{*''} = -2A\sin x + 2B\cos x - x(A\cos x + B\sin x),$$
$$-2A\sin x + 2B\cos x = \cos x\,,\ \ A = 0,\ \ B = \frac{1}{2},\ \ y^* = \frac{x}{2}\sin x.$$

Общее решение дифференциального уравнения

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{2}\sin x.$$

Задание 20. Идеальный колебательный контур с индуктивностью L и емкостью C подключается к источнику переменного напряжения $U = U_0 sin\omega t$. При какой частоте источника ω колебания тока будут иметь неограниченно возрастающую со временем амплитуду?

Решение. Пусть $i(t)$ — это сила тока в цепи, а $q(t)$ — заряд конденсатора в момент времени t. Тогда напряжение на катушке составляет $L \cdot i'$, а на конденсаторе $\frac{q}{C}$. Используя второй закон Кирхгофа, получим

$$L \cdot i' + \frac{q}{C} = U_0 sin\omega t.$$

Дифференцируя полученное уравнение по t с учетом $q' = i$, получим

$$L \cdot i'' + \frac{i}{C} = U_0\omega \cdot cos\omega t.$$

Характеристическое уравнение $L \cdot k^2 + \frac{1}{C} = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

Общее решение однородного дифференциального уравнения

$$i = C_1 cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + C_2 sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

с постоянной амплитудой $\sqrt{C_1^2 + C_2^2}$.

Если $\omega \neq \frac{t}{\sqrt{LC}}$, то частное решение будем искать в виде

$$i = Acos\omega t + Bsin\omega t.$$

В этом случае амплитуда колебания тоже будет постоянной

$$\sqrt{A^2 + B^2}.$$

Если $\omega = \frac{t}{\sqrt{LC}}$, то частное решение будем искать в виде

$$i = t(Acos\omega t + Bsin\omega t).$$

В этом случае амплитуда колебания будет линейно возрастать со временем

$$t\sqrt{A^2 + B^2}.$$

При $\omega = \frac{t}{\sqrt{LC}}$ сила тока в цепи

$$i = (C_1 + At)cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + (C_2 + Bt)sin\frac{t}{\sqrt{LC}}.$$

имеет неограниченно возрастающую амплитуду со временем

$$\sqrt{(C_1 + At)^2 + (C_2 + Bt)^2}.$$

Для рассматриваемых дифференциальных уравнений справедлива так называемая **теорема наложения**, которая позволяет отыскивать частное решение в более сложных случаях.

Теорема. Если y_1 является решением уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x)$, а y_2 решением уравнения $y'' + py' + qy = f_2(x)$, то $y_1 + y_2$ есть решение уравнения $y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x)$.

Задание 36. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' = 1 + 2e^x - sin\,x$.

Решение. Составим характеристическое уравнение однородного уравнения и найдем его корни:$k^2 + 2k = 0$, $k_1 = 0$, $k_2 = -2$, $Y = C_1 + C_2e^{-2x}$. Находим частное решение y_1^* уравнения $y'' + 2y' = 1$ в виде $y_1^* = Ax$, тогда $y_1^{*\prime} = A$, $y_1^{*\prime\prime} = 0$. Отсюда $0 - 2A = 1$, $A = -\frac{1}{2}$. Следовательно, $y_1^* = -\frac{1}{2}x$.

Частное решение y_2^* уравнения $y'' + 2y' = 2e^x$ ищем в форме $y_2^* = Be^x$. Тогда $y_2^{*\prime} = Be^x$, $y_2^{*\prime\prime} = Be^x$. Отсюда $Be^x + 2Be^x = 2e^x$, $3B = 2$, $B = \frac{2}{3}$. Следовательно, $y_2^* = \frac{2}{3}e^x$.

Наконец, находим частное решение y_3^* уравнения $y'' + 2y' = -sin\,x$ в форме $y_3^* = C\,cos\,x + D\,sin\,x$, тогда $y_3^{*\prime} = -C\,sin\,x + D\,cos\,x$, $y_3^{*\prime\prime} = -C\,cos\,x - D\,sin\,x$. Подставляя в уравнение, получим: $-C\,cos\,x - D\,sin\,x - 2C\,sin\,x +$

$2D\cos x = -\sin x$. Отсюда имеем: $\begin{cases} -C + 2B = 0, \\ -D - 2C = -1. \end{cases}$ Значит $C = \frac{2}{5}$, $D = \frac{1}{5}$. Следовательно, $y_3^* = \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$. По теореме наложения частное решение исходного уравнения будет: $y^* = y_1^* + y_2^* + y_3^* = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}e^x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x$.

Общее решение дифференциального уравнения

$$y = C_1 + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}e^x + \frac{2}{5}\cos x + \frac{1}{5}\sin x.$$

Задание 37. Установите соответствие между дифференциальным уравнением

1) $y'' - 5y' + 4y = 2 - 3x + 2x^2$ 2) $y'' + 6y' = 4 + 3x + x^2$

3) $y'' + 3 = 6 - 4x + 2x^2$

и общим видом его частного решения …

A) $y^*(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2)x$ *B*) $y^*(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2)x^2$

C) $y^*(x) = C_0x + C_1x^2$ *D*) $y^*(x) = (C_0x + C_1x^2)x$

E) $y^*(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$

Решение. Вид частного решения устанавливается по виду правой части дифференциального уравнения и корней соответствующего характеристического уравнения. Правая часть исходных уравнений $f(x) = P_2(x)$ – многочлен второго порядка. В этом случае частное решение y^* ищем в виде $y^* = Q_2(x)$, если число 0 не является корнем характеристического уравнения, и в виде $y^* = x^sQ_2(x)$, если число 0 является корнем характеристического уравнения кратности s.

1. Рассмотрим первое уравнение $y'' - 5y' + 4y = 2 - 3x + 2x^2$. Составим характеристическое уравнение для соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 5y' + 4y = 0$: $k^2 - 5k + 4 = 0$. Находим его корни: $k_1 = 1$, $k_2 = 4$. Среди корней 0 нет, поэтому частное решение имеет вид $y^*(x) = Q_2(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2$.

2. Характеристическое уравнение $k^2 + 6k = 0$ однородного дифференциального уравнения, соответствующего второму уравнению $y'' + 6y' = 4 + 3x + x^2$, имеет корни: $k_1 = 0$, $k_2 = -6$. Число 0 является корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение имеет вид $y^*(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2)x$.

3. Перенесем число 3 в правую часть. Написав характеристическое уравнение $k^2 = 0$, находим его корни $k_1 = k_2 = 0$. Так как число 0 является корнем кратности 2, то частное решение имеет вид $y^*(x) = (C_0 + C_1x + C_2x^2)x^2$.

Ответ: 1 – *E*, 2 – *A*, 3 – *B*.

Задание 38. Общим решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и характеристическими корнями $k_1 = k_2 = 3$, $k_3 = -1$ является …

1) $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + C_3e^{-x}$,

2) $y = C_1\sin 3x + C_2\cos 3x - C_3\sin x + C_4\cos x$,

3) $y = (C_1 + C_2x)\sin 3x + (C_3 + C_4x)\cos 3x + C_5e^{-x}$,

4) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x}$.

Решение. Действительное число 3 является двукратным корнем, поэтому линейно независимыми частными решениями служат e^{-x},e^{3x}, xe^{3x}. Общее решение имеет вид $y = (C_1 + C_2x)e^{3x} + C_3e^{-x}$.

Ответ: 1).

2.5. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)

Этот метод применяется для отыскания частного решения y^* линейного неоднородного уравнения, когда известно общее решение соответствующего линейного однородного уравнения. Пусть дано линейное неоднородное уравнение второго порядка $y'' + py' + qy = f(x)$ и пусть общим решением соответствующего однородного уравнения $y'' + py' + qy = 0$ является функция

$$Y = C_1y_1 + C_2y_2.$$

В такой же форме ищется и частное решение y^* линейного неоднородного уравнения, только C_1 и C_2 считаются не произвольными постоянными, а некоторыми, пока неизвестными функциями от x, т. е. $y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. Дифференцируя это выражение дважды и подставляя его в исходное уравнение, получим систему двух уравнение относительно $C_1(x)$ и $C_2(x)$

$$\begin{cases} C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0, \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' = f(x). \end{cases}$$

Интегрируя найденные значения, получим: $C_1(x) = \int \phi_1(x)dx$ и $C_2(x) = \int \phi_2(x)dx$. При этих значениях $C_1(x)$ и $C_2(x)$ получим частное решение

$$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2.$$

Задание 39. Найдите общее решение уравнения $y'' + 4y = \frac{1}{sin\,2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm 2i$. Значит, $Y = C_1\,cos\,2\,x + C_2\,sin\,2\,x$. Будем искать частное решение в форме $y^* = C_1(x)\,cos\,2\,x + C_2(x)\,sin\,2\,x$. Находим $C_1'(x)$ и $C_2'(x)$, решая систему уравнений

$$\begin{cases} C_1'cos2x + C_2'sin2x = 0, \\ -2C_1'sin2x + 2C_2'cos2x = \dfrac{1}{sin\,2\,x}. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} cos\,2\,x & sin\,2\,x \\ -2\,sin\,2\,x & 2\,cos\,2\,x \end{vmatrix} = 2cos^2 2x + 2sin^2 2x = 2,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & sin\,2\,x \\ \frac{1}{sin\,2x} & 2\,cos\,2\,x \end{vmatrix} = -1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} cos\,2\,x & 0 \\ -2\,sin\,2\,x & \frac{1}{sin\,2x} \end{vmatrix} = \frac{cos\,2x}{sin\,2x}.$$

$$C_1{}' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{2}, \quad C_2{}' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{cos\,2\,x}{2\,sin\,2\,x}.$$

Интегрируя без C, находим: $C_1 = -\frac{1}{2}x$, $C_2 = \frac{1}{4}lnsin\,2\,x$. Следовательно, $y^* = -\frac{1}{2}x\,cos\,2\,x + \frac{1}{4}sin\,2\,x\,lnsin\,2\,x$.

Общее решение

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x \ln\sin 2x.$$

§ 3. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим систему двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y. \end{cases}$$

Дифференцируем первое уравнение по t, далее подставляем во второе уравнения выраженные правые части y и y', получаем дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' - d \cdot x' + \Delta \cdot x = 0,$$

где $d = a_{11} + a_{22}$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Задание 40. Найдите общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 7x + 5y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y. \end{cases}$$

Решение. Найдем d и Δ

$$d = 7 + 3 = 10, \quad \Delta = \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 21 - 5 = 16.$$

Получим дифференциальное уравнение второго порядка

$$x'' - 10x' + 16x = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения

$$k_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \left[\begin{array}{l} 2, \\ 8. \end{array}\right.$$

Общее решение дифференциальное уравнение второго порядка

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}.$$

Дифференцируем полученное равенство по t и подставляем результат в первое уравнение системы

$$2C_1 e^{2t} + 8C_2 e^{8t} = 7C_1 e^{2t} + 7C_2 e^{8t} + 5y,$$
$$y = -C_1 e^{2t} + 0{,}2C_2 e^{8t}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{8t}, \\ y = -C_1 e^{2t} + 0{,}2C_2 e^{8t}. \end{cases}$$

Общее решение иногда записывают в матричной форме $X = AC$, где

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0{,}2 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} C_1 e^{2t} \\ C_2 e^{8t} \end{pmatrix}.$$

Одной из простейших моделей кинетического типа является модель военных действий Ланкастера. Уравнения модели Ланкастера имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\alpha y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\beta x. \end{cases}$$

Смысл этой модели состоит в следующем. Воюют две армии численностью $x(t)$ и $y(t)$. Каждый солдат первой армии за единицу времени уничтожает β солдат второй армии, так что ее численность за единицу времени уменьшается на $\beta x(t)$. В то же время каждый солдат второй армии уничтожает α солдат первой армии так, что ее численность за единицу времени убывает на величину $\alpha y(t)$.

Задание 41. Каждый солдат первой армии за один день в среднем уничтожает 0,4 солдата второй армии, а каждый солдат второй армии за один день в среднем уничтожает 0,1 солдата первой армии. В начальный момент в первой армии было 1000 солдат, а во второй 3000 солдат. Определить количество солдат в каждой армии через 5 дней.

Решение. Составим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -0{,}1y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -0{,}4x. \end{cases}$$

Продифференцируем первое уравнение по t и подставим во второе уравнение

$$-10x'' + 0{,}4x = 0.$$

Корни характеристического уравнения

$$-10k^2 + 0{,}4 = 0$$

равны $k_{1,2} = \pm 0{,}2$. Тогда

$$x = C_1 e^{0{,}2t} + C_2 e^{-0{,}2t}.$$

Дифференцируем полученное равенство по t и подставляем результат в первое уравнение системы

$$0{,}2C_1 e^{0{,}2t} - 0{,}2C_2 e^{-0{,}2t} = -0{,}1y,$$

$$y = -2C_1 e^{0{,}2t} + 2C_2 e^{-0{,}2t}.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x = C_1 e^{0{,}2t} + C_2 e^{-0{,}2t}, \\ y = -2C_1 e^{0{,}2t} + 2C_2 e^{-0{,}2t}. \end{cases}$$

Используя начальные условия, найдем C_1 и C_2

$$\begin{cases} 1000 = C_1 + C_2, \\ 3000 = -2C_1 + 2C_2. \end{cases}$$

Откуда $C_1 = -250$, $C_2 = 1250$,

$$\begin{cases} x = -250e^{0,2t} + 1250e^{-0,2t}, \\ y = 500e^{0,2t} + 2500e^{-0,2t}. \end{cases}$$

Через пять дней численность первой армии x = -219. Следовательно, сражение закончится при x = 0, т. е. через $t = 2,5ln5 \approx 4$ дня. Численность второй армии составит 403 солдата.

§ 4. Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите общие интегралы уравнений:

1. $(y+2)^2dx - (x+1)^3dy = 0$. 2. $5yy' + 4x = 2$.
3. $y^2dx - xdy = 0$. 4. $e^{2y}y' + e^{-x} = sin5x$.
5. $2xyy' + x = 1$. 6. $(2x+5)y' = 2y$.

2. Найдите частные интегралы уравнений при указанных начальных условиях:

1. $y' + 4y = 1$; $y(0) = 5$. 2. $s^3ds - dt = cos2tdt$; $s(0) = 2$.

3. Согласно опытам в течение года из каждого грамма радия распадается 0,44 мг. Через сколько лет распадется десятая часть имеющегося радия.

4. Тело охладилось за 10 мин от 80 до 50 °С. Температура окружающей среды поддерживается равной 20 °С. Сколько еще минут понадобится, чтобы тело охладилось до 35 °С?

5. Поглощение светового потока тонким листом стекла пропорционально толщине листа и потоку, падающему на его поверхность. Зная, что при прохождении через слой 1 мм поглощается 2% первоначального светового потока F_0, определить, какой процент поглощается листом стекла толщиной 8 мм.

6. В цепь последовательно включены резистор сопротивлением 500 Ом и конденсатор емкостью 2 мкФ, заряд которого в момент замыкания цепи равен 5 Кл. Найти силу тока в цепи в момент ее замыкания и через тысячную долю секунды после замыкания.

7. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку (4; 6) и обладающей свойством, что угловой коэффициент любой касательной вдвое меньше углового коэффициента радиуса-вектора точки касания.

8. Проинтегрировать следующие уравнения:

1. $ydx - xdy = xdx$; $y(1) = 2$. 2. $2x^2 + y^2 - xyy' = 0$.
3. $xy' - y = 2\sqrt{x^2+y^2}$. 4. $(x+y)dx = (x-y)dy$.

9. Решить уравнения:

1. $y' - 3y = e^{2x}$. 2. $xy' - y = -x^2$; $y(1) = 0$.
3. $xy' - y = xy^2$; $y(1) = -2$. 4. $y' + y = x\sqrt{y}$.
5. $y' - 2xy = e^{x^2}$; $y(1) = 1$. 6. $xy' + y = y^2lnx$.

10. В цепь последовательно включены источник напряжения $U = 100sin50t$, сопротивление 2 Ом и индуктивность 0,4 Гн. Найти амплитуду силы тока в цепи при установившемся режиме.

11. Решить уравнения:

1. $(2y-4)dx+(2x+3y)dy=0.$ 2. $(1+2xy)dx+2x^2dy=0.$
3. $(2x-3y)dx-(3x+4y)dy=0.$ 4. $xe^{2y}dx+(y+x^2e^{2y})dy.$

12. Решить уравнения:

1. $y'''-e^{2x}=cos3x.$ 2. $y''=2x;\ \ y(0)=3, y'(0)=1.$
3. $y''tg2x=2y'.$ 4. $y''y^3+36=0;\ \ y(0)=3, y'(0)=2.$
5. $y''=xe^{-x}-sin2x+\sqrt{x+1}.$ 6. $y''+\frac{y'}{x}=0.$
7. $y''y=(y')^2.$ 8. $y''x+y'=10.$

13. Горизонтально расположенная консольная стальная балка длиной $l = 6$ м закреплена с одной стороны и нагружена сосредоточенной силой $P = 1$ т с другой стороны. Найдите уравнение упругой линии (кривой изгиба) и определить величину прогиба балки, если модуль упругости $E = 2{,}1\cdot 10^{10}$ кг/м^2, момент инерции $J = 0{,}004$ м^4.

Примечание. Радиус кривизны R упругой линии для балки $R=\frac{EJ}{M(x)}$, где $M(x) = P(l - x)$ – изгибающий момент. При малых отклонениях принять $1+(y')^{3/2}\approx 1.$

14. Решить уравнения:

1. $y''+5y'-6y=0.$ 2. $\frac{d^2S}{dt^2}-6\frac{dS}{dt}+9S=0.$
3. $y'''+6y''+13y'=0.$ 4. $y''+2y'=0;\ \ y(0)=1, y'(0)=1.$

15. Найдите закон движения и определить период T колебания математического маятника длиной $l = 30$ см при малых колебаниях.

Примечание. При малых колебаниях принять $sin\alpha\ \approx\alpha,\ \ \alpha=\frac{s}{l},$ где s – длина, пройденная грузом по окружности.

16. Решить уравнения:

1. $y''-4y'+4y=2e^{2x}.$ 2. $y''+4y=8x;\ y(0)=0, y'(0)=4.$
3. $y''+6y'+13y=30sinx.$ 4. $y'''-y'=-2x.$
5. $y''+y'=x+sinx.$ 6. $y''+y=e^x+cosx.$
7. $y'''-3y'-2y=-4xe^x.$ 8. $y''-3y'=2-6x;\ y(0)=3, y'(0)=3.$

17. Решить уравнения:

1. $y''+y=\frac{1}{sinx}.$ 2. $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}.$
3. $y''+y=5cos^2x.$ 4. $y''+y=\frac{1}{cos^3x}.$
5. $\frac{d^3x}{dt^3}+\frac{d^2x}{dt^2}=e^{-t}+6t.$ 6. $y''+16y=sin^3x.$

18. Моторная лодка движется в спокойной воде со скоростью 12 км/ч. На полном ходу ее мотор был выключен, и через 10 сек скорость лодки уменьшилась до 6 км/ч. Определить путь, пройденный лодкой за 1 мин с момента выключения мотора, считая, что сопротивление воды пропорционально квадрату скорости движения лодки.

19. Найдите общее решение системы уравнений:

1. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 8x + y. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + 4y. \end{cases}$

20. Найдите частное решение системы уравнений, удовлетворяющее указанным условиям:

$$\frac{dx}{dt} + 3x + y = 0, \qquad \frac{dy}{dt} - x + y = 0; \quad x(0) = 1, y(0) = -1.$$

Приложение

Комплексным числом z называют выражение: $z = a + i \cdot b$, где a и b – действительные числа; i – **мнимая единица**, определяемая равенством:

$$i^2 = -1.$$

Выражение $z = a + i \cdot b$ называют **алгебраической формой записи** комплексного числа, a называется **действительной частью** числа z, b – **мнимой частью**. Их обозначают так: $a = Re\, z$; $b = Im\, z$ (от французского *reèl* - действительный, *imaginiare* - мнимый).

Если $a = 0$, то число $z = ib$ называется **чисто мнимым**.

Если $b = 0$, то получается действительное число $z = a$.

Два комплексных числа, отличающиеся только знаком мнимой части, называются **сопряженными**: $z = a + i \cdot b$, $\bar{z} = a - i \cdot b$.

Пусть комплексному числу $z = a + i \cdot b$ соответствует вектор $\overrightarrow{OA}$ с координатами (a; b) (рис. 1). Обозначим длину вектора $\left|\overrightarrow{OA}\right| = r$, а угол, который он образует с осью OX, через φ (угол φ считается положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки, и отрицательным в противном случае).

По определению синуса и косинуса $\frac{a}{r} = cos\, \varphi$, $\frac{b}{r} = sin\, \varphi$ $\Rightarrow$ $a = r \cdot cos\, \varphi$, $b = r \cdot sin\, \varphi$. Комплексное число $a + bi$ можно записать в виде $a + bi = r \cdot cos\, \phi + i \cdot r \cdot sin\, \varphi = r(cos\, \varphi + i \cdot sin\, \varphi)$.

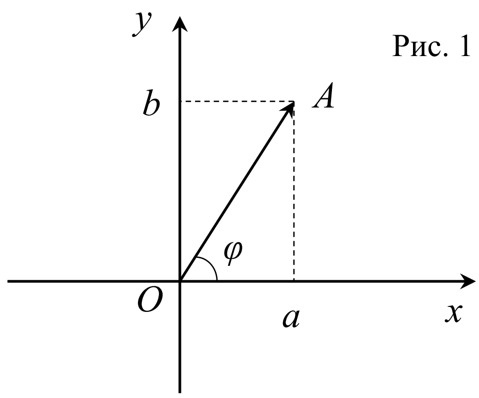

Рис. 1

Любое комплексное число $a + ib$ можно представить в **тригонометрической форме**: $a + ib = r(cos\, \varphi + i \cdot sin\, \varphi)$, где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, а угол φ отличного от нуля комплексного числа определяется из условия

$$\begin{cases} \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases} \qquad \text{или} \qquad tg\varphi = \frac{b}{a} \ \text{ с учетом знаков } a \text{ и } b.$$

Число r называется *модулем* $|z|$, а угол φ – *аргументом* $(arg\,z)$ комплексного числа $z = a + ib$.

Значение аргумента φ, заключенное в промежутке ($-\pi$; π] называется **главным значением аргумента** и обозначается *arg z* (в качестве главного значения аргумента иногда берут величину, заключенную в промежутке [0; 2π)).

Всякое комплексное число можно представить также в **показательной форме**:

$$z = r \cdot e^{i\varphi},$$

где $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$ - формула Эйлера.

Задание 1. Представьте комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$ в показательной форме.

Решение. Найдем модуль заданного комплексного числа

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Комплексное число находится в третьей четверти, его аргумент равен

$$\varphi = \pi + arctg\sqrt{3} = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} = 240°.$$

Ответ: $2e^{i240°}$

Задание 2. Найдите модуль комплексного числа $5 - 12i$.

Решение:

Модуль комплексного числа $z = a + ib$ определяется по формуле $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. В нашем случае $a = 5$, $b = -12$, $|z| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = 13$.

Ответ: 13.

Задание 3. Представьте комплексное число z = -8 +6i в показательной форме.

Решение. Модуль комплексного числа равен

$$r = |z| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10.$$

Комплексное число z находится во второй четверти, его аргумент равен

$$\varphi = \pi - arctg\frac{6}{8} \approx 180° - 36{,}9° = 143{,}1°.$$

Ответ: $z \approx 10e^{143{,}1°i}$.

Операции над комплексными числами

При сложении (вычитании) комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, складываются (вычитаются) их действительные и мнимые части:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) + (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 + a_2) + i \cdot (b_1 + b_2),$$
$$z_1 - z_2 = (a_1 + i \cdot b_1) - (a_2 + i \cdot b_2) = (a_1 - a_2) + i \cdot (b_1 - b_2).$$

При сложении комплексных чисел их радиусы-векторы складываются (по правилу параллелограмма), рис 2.

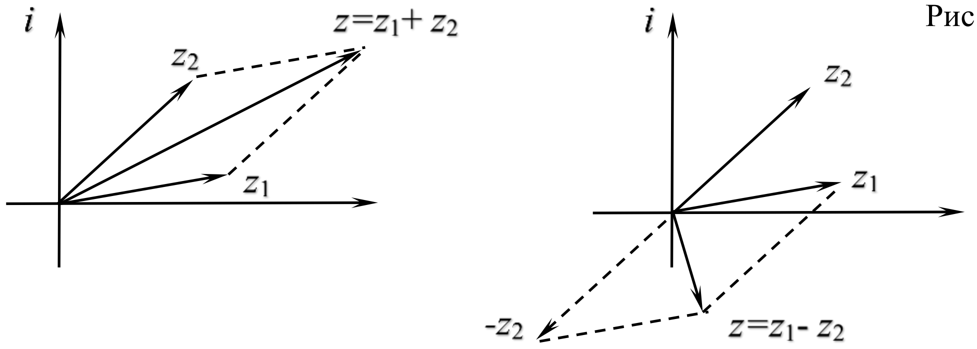

Рис. 2

Умножение комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, производится как умножение многочленов с последующей заменой i^2 на (–1).

При делении комплексных чисел, записанных в алгебраической форме, можно делимое и делитель умножить на число, сопряженное с делителем, а умножение комплексных чисел производить как умножение многочленов:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}.$$

Действия над комплексными числами подчиняются тем же законам, что и действия над действительными числами, поэтому формулы сокращенного умножения автоматически сохраняются для комплексных чисел.

При умножении (делении) комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме, умножаются (делятся) их модули и складываются (вычитаются) их аргументы:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

Аналогично для комплексных чисел, записанных в показательной форме

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \qquad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Складывать и вычитать комплексные числа удобнее, когда они заданы в алгебраической форме, а умножать и делить удобнее в тригонометрической или показательной форме.

При возведении комплексного числа в целую положительную степень n удобно число записать в тригонометрической форме $z = r(cos\,\varphi + i \cdot sin\,\varphi)$. Тогда

$$z^n = r^n(cos\,n\,\varphi + i\,sin\,n\,\varphi)$$ – формула Муавра.

Корнем n-й степени из комплексного числа называется такое комплексное число, n-я степень которого равняется подкоренному числу, т. е.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(cos\,\varphi + i\,sin\,\varphi)} = \rho(cos\,\psi + i\,sin\,\psi),$$

если $\rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Следовательно, $\rho^n = r,\ \rho = \sqrt[n]{r};\ n\psi = \varphi + 2\pi k,\ \psi = \frac{\varphi+2\pi k}{n}$.

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right),\ k = \overline{0, n-1}.$$

Корень n-й степени из любого комплексного числа $z \neq 0$ имеет ровно n значений.

Задание 6. Даны два комплексных числа $z_1 = 5 + 3i$ и $z_2 = 2 - 4i$. Найдите произведение $z_1 \cdot z_2$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = (5 + 3i)(2 - 4i) = 10 - 20i + 6i - 12i^2 =$
$$= 10 - 14i - 12 \cdot (-1) = 22 - 14i.$$

***Ответ*:** $z_1 \cdot z_2 = 22 - 14i$.

Задание 7. Даны два комплексных числа $z_1 = 4 + 3i$ и $z_2 = 15 - 8i$. Найдите частное z_1/z_2.

Решение. $\frac{4+3i}{15-8i} = \frac{(4+3i)(15+8i)}{(15-8i)(15+8i)} = \frac{60+32i+45i+24i^2}{225-64i^2} = \frac{36+77i}{289} = \frac{36}{289} + \frac{77}{289}i$.

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{36}{289} + \frac{77}{289}i$.

Задание 9. Найдите действительную часть комплексного числа $(3 + 7i)^2$.

Решение. Действительной частью комплексного числа $z = a + ib$ называется действительное число a и обозначается следующим образом: $a = Re\, z$.

Преобразуем искомое выражение, используя формулу квадрата суммы: $(3 + 7i)^2 = 9 + 42i + 49i^2 = -40 + 42i$, $Re((3 + 7i)^2) = -40$.

***Ответ*:** –40.

Задание 10. Дано комплексное число $z = 1 + \sqrt{3}i$. Найдите z^6.

Решение. Запишем число $z = 1 + \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме:

1) найдем модуль числа $|z| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$;

2) комплексное число расположено в первой четверти, поэтому
$$\varphi = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, по формуле Муавра
$$z^6 = (1 + \sqrt{3}i)^6 = (2)^6\left(\cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right) + i \cdot \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{3}\right)\right) =$$
$$= 64(\cos 2\pi + i \cdot \sin 2\pi) = 64.$$

***Ответ*:** 64.

Задание 11. Найдите корни уравнения $z^4 = 1$.

Решение. $z = \sqrt[4]{1} = \sqrt[4]{1 \cdot (\cos 0 + i\sin 0)} \ \Rightarrow\ r = 1,\ \varphi = 0$.

По формуле Муавра имеем

$k = 0$, $z_0 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\pi\cdot0}{4} + i\,sin\frac{0+2\pi\cdot0}{4}\right) = 1\cdot cos\,0 = 1;$

$k = 1$, $z_1 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\pi\cdot1}{4} + i\,sin\frac{0+2\pi\cdot1}{4}\right) = cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2} = i;$

$k = 2$, $z_2 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\pi\cdot2}{4} + i\,sin\frac{0+2\pi\cdot2}{4}\right) = cos\,\pi + i\,sin\,\pi = -1;$

$k = 3$, $z_3 = \sqrt[4]{1}\left(cos\frac{0+2\pi\cdot3}{4} + i\,sin\frac{0+2\pi\cdot3}{4}\right) = cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2} = -i;$

Ответ: $z_{1,2} = \pm1,\ z_{3,4} = \pm i.$

Задание 12. Найдите корни уравнения $z^2 - 4z + 5 = 0$.

Решение. Найдем дискриминант квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ по формуле $D = b^2 - 4ac$, $D = (-4)^2 - 4\cdot5 = 16 - 20 = -4 = (2i)^2$.

Найдем корни уравнения по формуле $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,

$$z_{1,2} = \frac{-(-4) \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Ответ: $z_{1,2} = 2 \pm i$.

Задание 13. Найдите корни уравнения $z^2 - 2z + 4 = 0$ и представьте их в показательной форме.

Решение. Найдем дискриминант квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$ по формуле $D = b^2 - 4ac$, $D = (-2)^2 - 4\cdot4 = 4 - 16 = -12 = \left(2\sqrt{3}i\right)^2$.

Найдем корни уравнения по формуле $z_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$,

$$z_{1,2} = \frac{-(-2) \pm 2\sqrt{3}i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}i.$$

$|z_1| = |z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2.$

Первый корень уравнения $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$ находится в четвертой четверти, а второй корень уравнения $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ находится в первой четверти, поэтому

$$\varphi_1 = 2\pi - arctg\sqrt{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}, \qquad \varphi_2 = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Ответ: $z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}, z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$