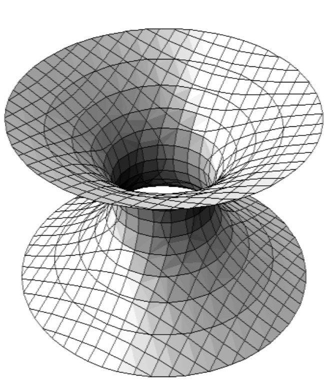
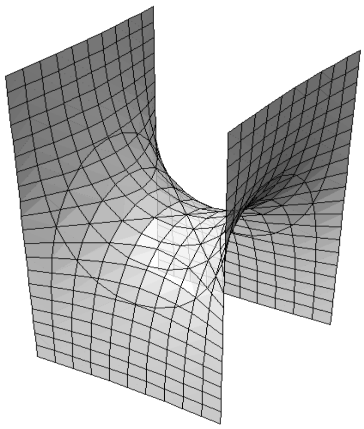
Министерство образования Российской Федерации
Тверской государственный технический университет

Кафедра высшей математики

РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

ЧАСТЬ 2





Тверь 2010

Руководство предназначено для студентов заочной формы обучения и особенно для тех, кто самостоятельно изучает высшую математику и желает приобрести необходимые навыки в решении задач. Для каждого раздела приведены краткие сведения по теории и методические указания, необходимые для решения последующих задач. Приводятся примеры типичных задач с краткими пояснениями теоретических положений.

Содержание этого пособия соответствует программе на 3–й и 4–й семестры по высшей математике для заочного факультета машиностроительных, энергетических, экологических и строительных специальностей. Это пособие также пригодно и для студентов гуманитарных специальностей, которые могут опустить те разделы и задачи, которые не входят в их программу по курсу высшей математики.

Работа обсуждена и рекомендована к печати на заседании кафедры (протокол № 2 от 30 августа 2010 г.).

Руководство к решению задач по математике
Часть 2

Составители: А.Н. Балашов, Л.А. Валяева, Ю.А. Егоров

Методические указания к выполнению контрольной работы № 5:
« Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»

I. Основные понятия функций многих переменных

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y, если каждой паре допустимых значений x и y соответствует единственное значение z (записывают так: $z = f(x, y)$). Существует понятие многозначной функции (самостоятельно изучите). Функцию двух переменных можно назвать как функцию точки $M(x, y)$: $z= f(M)$.

Переменная величина u называется *функцией трех переменных* величин x, y и z, если каждой тройке допустимых значений x, y и z соответствует единственное значение u (записывают так: $u = f(x, y, z)$). Функцию трех переменных можно назвать как функцию точки $M\ (x, y, z)$: $u = f(M)$. Аналогично определяется функция n переменных $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$: $u = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Совокупность значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют точкой $M\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n – мерного пространства, а функцию n переменных – функцией точки M: $u = f(M)$.

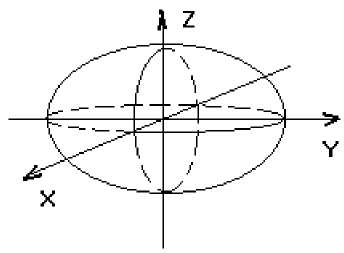
Техника и естествознание дают много примеров функций нескольких переменных. Например, формула Клайперона $V = RT/P$, где R - некоторая постоянная, T - абсолютная температура, P - давление , V - объем данной массы газа, позволяет рассматривать объем как функцию двух переменных P и T. Объем прямоугольного параллелепипеда ($V = abc$) является функцией трех переменных a, b, c.

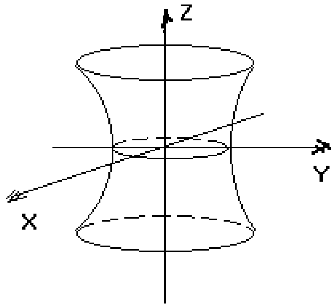
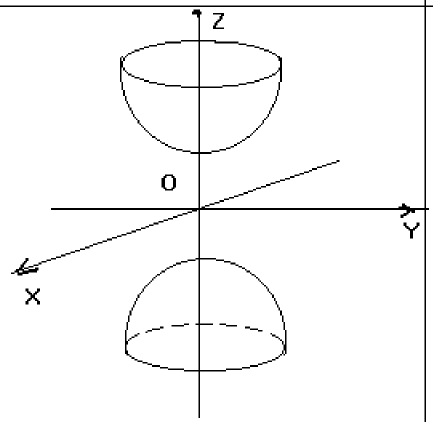
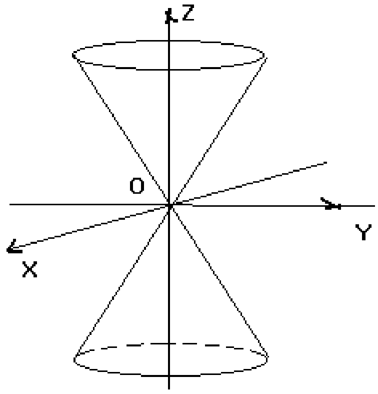
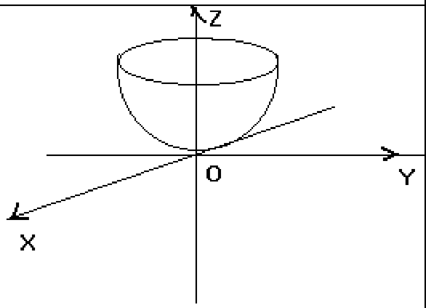
Основные сведения будем излагать для функций двух и трех переменных. Многие понятия и формулы для этих функций легко распространяются по аналогии на случай n переменных (читайте предлагаемую литературу).

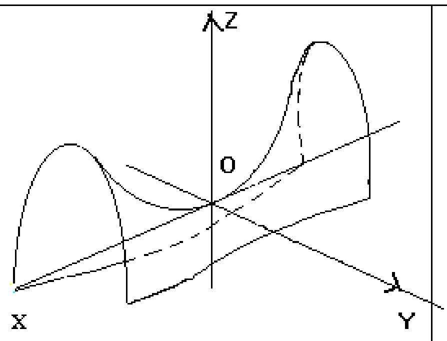
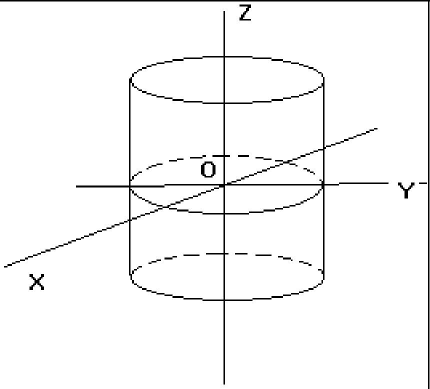
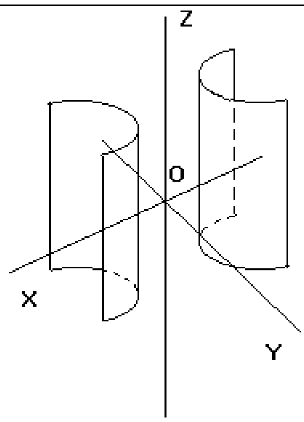
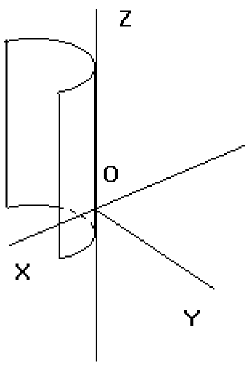
Множество всех точек, в которых определена функция нескольких переменных, называется *областью определения функции* (D). Для функции двух переменных область определения D – некоторая часть плоскости или вся плоскость(R^2). Для функции трех переменных область определения D – некоторая часть пространства или все пространство (R^3).

Геометрическим изображением функции двух переменных $f(x, y)$ называется некоторая поверхность в пространстве, проектирующая на плоскость Oxy в область D . Функции трех переменных не имеют геометрического представления.

Поверхности 2 - го порядка

Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$		$a = b = c$ сфера, $a = b$ эллипсоид вращения

Гиперболоиды: Однополостный	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$		
Двуполостный	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$		
Конус второго порядка	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$		
Параболоиды: Эллиптический	$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}$ $p>0, q>0$		$p=q$ параболоид вращения

Гиперболический	$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$ $p > 0, q > 0$		
Цилиндры второго порядка: Эллиптический	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$		
Гиперболический	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		
Параболический	$y^2 = 2px$		

II. Частные производные и полный дифференциал

Рассмотрим функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$. Без указания направления движения точки $P(x; y; z)$ нельзя говорить о скорости изменения функции (иначе, о производной функции в этой точке). Но производная по любому направлению есть линейная комбинация частных производных (производных по направлениям, параллельным осям координат). В направлении, параллельном оси Ox, остаются постоянными другие аргументы и функция $u = f(x, y, z)$ становится функцией одного переменного x. Частная производная

$$u'_x = \frac{\partial u}{\partial x} = f'_x(x,y,z) = \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)}{\Delta x}$$

есть предел отношения частного приращения

$$\Delta_x f(x,y,z) = f(x+\Delta x, y, z) - f(x,y,z)$$

функции к приращению соответствующего аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю. Так же определяются для функции трех переменных две другие частные производные u'_y и u'_z.

Механический смысл частных производных ясен. Они указывают быстроту изменения функции $u = f(x, y, z)$ в точке $(x; y; z)$ по направлениям, параллельным осям координат.

Нетрудно понять и *геометрический смысл* частной производной. При постоянных y и z уравнению $u = f(x, y, z)$ отвечает кривая и u'_x – угловой коэффициент ее касательной в точке $(x; f(x, y, z))$. Аналогичный смысл имеют и другие частные производные.

Все правила и формулы дифференцирования, выведенные для функций одной переменной, полностью сохраняются при нахождении частных производных нескольких переменных. Важно только помнить, что при нахождении, например, производной по x с остальными аргументами обращаются как с постоянными величинами.

Существование частных производных в окрестности точки и непрерывность в точке $M(x; y; z)$ обеспечивает дифференцируемость функции в этой точке. Выражение $df(x,y,z) = f'_x(x,y,z)dx + f'_y(x,y,z)dy + f'_z(x,y,z)dz$

называется *полным дифференциалом дифференцируемой функции* $u = f(x, y, z)$.

Пример 1. Найти частные производные первого порядка функции $u(x,y,z) = \left(x^2 + y^3 + z^4\right)^3$.

Решение. Для заданной функции существуют три частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial u}{\partial z}$. Считая y и z постоянными и дифференцируя u как функцию от x, получим частную производную по переменной x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\left(x^2 + y^3 + z^4\right)^2 \left(x^2 + y^3 + z^4\right)'_x = 3\left(x^2 + y^3 + z^4\right)^2 2x, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 6x\left(x^2 + y^3 + z^4\right)^2.$$

Аналогично, считая x и z постоянными и дифференцируя u как функцию от y, получим частную производную по переменной y:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3\left(x^2 + y^3 + z^4\right)^2 3y^2 = 9y^2\left(x^2 + y^3 + z^4\right)^2.$$

И, наконец, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = 3\left(x^2 + y^3 + z^4\right)^2 4z^3 = 12z^3\left(x^2 + y^3 + z^4\right)^2.$

Пример 2. Найти частные производные первого порядка функции $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$ по переменным x и y.

Решение. Пользуясь правилами нахождения частных производных, получим:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\right)'_x = \frac{(x)'_x\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)'_x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}.$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}\right)'_y = \frac{x'_y\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - x\left(x^2 + y^2 + z^2\right)'_y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} =$$

$$= \frac{0\cdot\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - x\cdot 2y}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2} = \frac{-2xy}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^2}.$$

III. Производные и дифференциалы высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x, y)$ называют частные производные от ее частных производных первого порядка. Обозначения:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \qquad z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Если смешанные производные z''_{xy} и z''_{xy} непрерывны, то результаты дифференцирования не зависят от порядка дифференцирования, т. е. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Аналогично определяются частные производные более высокого порядка:

$$z'''_{xxx} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \qquad z'''_{yyy} = \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right);$$

$$z'''_{xxy} = \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right); \qquad z'''_{xyy} = \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ и т. д.}$$

Частные производные третьего и высших порядков, отличающиеся только последовательностью дифференцирования, равны между собой при условии их непрерывности.

Дифференциалы второго, третьего и более высоких порядков функции $z = f(x, y)$ определяются формулами $d^2z = d(dz), d^3z = d(d^2z)$ и т. д. Они выражаются через частные производные следующим образом:

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2,$$

$$d^3z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3.$$

Вообще справедлива символическая формула $d^n z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z$, которая формально раскрывается по биномиальному закону.

Пример. Найти смешанную производную второго порядков для функции $z = x^2e^y + \cos^2(xy) + \arcsin y$.

Решение. Найдем частную производную первого порядка по переменной x:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^y + 2\cos(xy)(\cos xy)'_x = 2xe^y - 2y\cos(xy)\sin xy = 2xe^y - y\sin(2xy).$$

Теперь дифференцируем повторно по переменной y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xe^y - y\sin(2xy)\right) = 2xe^y - \sin(2xy) - 2xy\cos(2xy).$$

IV. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательной плоскостью к поверхности в данной точке M (точке касания) называется плоскость, в которой лежат касательные в этой точке к всевозможным кривым, проведенным на данной поверхности через указанную точку.

Нормалью к поверхности /называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Для поверхности $F(x, y, z) = 0$ уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ имеют вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z - z_0) = 0;$$

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M}.$$

Для поверхности $z = f(x, y)$ уравнения касательной плоскости и нормали в точке $M(x_0; y_0; z_0)$ принимают вид:

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) \ ;$$

$$\frac{x - x_0}{f_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Пример 1. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности:

а) $z(x, y) = x^2 + xy + y^2$ в точке $A(1; 2; 7)$,

б) $xyz = 8$ в точке $B(1; 2; 4)$.

Решение. а) Для составления уравнений касательной плоскости и нормали к поверхности $z = z(x, y)$ в точке $A(x_0; y_0; z_0)$ используем формулы:

$$z - z_0 = (z)_x'(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + (z)_y'(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$\frac{x - x_0}{(z)_x'(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{(z)_y'(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Из условия имеем: $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 7$, точка A принадлежит данной поверхности.

$(z)_x'(x, y) = 2x + y$; $\qquad (z)_x'(1,2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$,

$(z)_y' = x + 2y$; $\qquad (z)_y'(1,2) = 5$.

Подставляя значения частных производных и координат т. A в уравнения, получим

$z - 7 = 4(x - 1) + 5(y - 2)$ - уравнение касательной плоскости,

$\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{5} = \dfrac{z-7}{-1}$ - уравнение нормали.

б) Для поверхности, заданной уравнением $xyz - 8 = 0$ ($F(x, y, z) = 0$) используем формулы:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_B (x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_B (y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_B (z - z_0) = 0,$$

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_B} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_B} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_B}.$$

В нашем случае $F(x, y, z) = xyz - 8$,

$\dfrac{\partial F}{\partial x} = yz$, $\qquad \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_B = 2 \cdot 4 = 8$; $\qquad \dfrac{\partial F}{\partial y} = xz$, $\qquad \left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_B = 1 \cdot 4 = 4$;

$\dfrac{\partial F}{\partial z} = xy$, $\qquad \left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_B = 1 \cdot 2 = 2$.

Уравнение касательной плоскости имеет вид: $8(x-1)+4(y-2)+2(z-4)=0$ или $4(x-1)+2(y-2)+z-4=0$, $\quad 4x+2y+z-12=0$.

Уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-4}{2} \text{ или } \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-4}{1}.$$

Пример 2. Определить плоскость, касательную к поверхности $x^2+4y^2+z^2=36$ и параллельной плоскости $x+y-z=0$.

Решение. Уравнение искомой плоскости имеет вид

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M (x-x_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M (y-y_0)+\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M (z-z_0)=0,$$

где $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка касания,

$\vec{n}=\left\{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M;\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M;\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M\right\}$ - нормальный вектор.

По условию $F(x,y,z)=x^2+4y^2+z^2-36$. Следовательно,

$\frac{\partial F}{\partial x}=2x$, $\quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_M=2x_0$; $\quad \frac{\partial F}{\partial y}=8y$, $\quad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_M=8y_0$;

$\frac{\partial F}{\partial z}=2z$, $\quad \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_M=2z_0$, $\quad \vec{n}=\{2x_0;8y_0;2z_0\}$.

Так как искомая плоскость параллельна данной плоскости $x+y-z=0$ с нормальным вектором $\vec{n}_1=\{1;1;-1\}$, параллельным вектору $\vec{n}$, то их координаты будут пропорциональны $\frac{2x_0}{1}=\frac{8y_0}{1}=\frac{2z_0}{-1}=\lambda$.

Поскольку точка M принадлежит поверхности, то ее координаты можно вычислить, решив систему:

$$\begin{cases} 2x_0=\lambda, \\ 8y_0=\lambda, \\ 2z_0=-\lambda, \\ x_0^2+4y_0^2+z_0^2=36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0=\frac{\lambda}{2}, \\ y_0=\frac{\lambda}{8}, \\ z_0=-\frac{\lambda}{2}, \\ \frac{\lambda^2}{4}+\frac{4\lambda^2}{64}+\frac{\lambda^2}{4}=36 \end{cases} \Rightarrow$$

$\lambda^2=64$, $\quad \lambda=\pm 8$, $\quad x_0=\pm 4$, $\quad y_0=\pm 1$, $\quad z_0=\mp 4$. Имеем две точки касания $M_1(4;1;-4)$ и $M_2(-4;-1;4)$.

Для точки M_1 уравнение касательной плоскости имеет вид

$2\cdot 4\cdot(x-4)+8\cdot 1\cdot(y-1)+2\cdot(-4)\cdot(z+4)=0$ или $x+y-z=9$.

Для точки M_2 уравнение касательной плоскости имеет вид

$2\cdot(-4)\cdot(x+4)+8\cdot(-1)\cdot(y+1)+2\cdot 4\cdot(z-4)=0$ или $x+y-z=-9$.

V. Экстремум функции нескольких переменных

Определение 1. Двумерной δ - окрестностью точки $P_0(x_0;\,y_0)$ называется множество точек $(x;\,y)$, принадлежащих открытому кругу радиуса $\delta>0$ с центром в точке $P_0(x_0;\,y_0)$ и обозначается $U_2(\delta;\,x_0;\,y_0)$.

Если при фиксированном числе $\delta>0$ точка $(x;\,y)\in\delta$ - окрестности (символика $(x;\,y)\in U_2(\delta;\,x_0;\,y_0)$), то говорят, что точка $(x;\,y)$ близка к точке $P_0(x_0;\,y_0)$. Если точка $(x;\,y)\notin U_2(\delta;\,x_0;\,y_0)$, то говорят, что точка $(x;\,y)$далека от точки $(x_0;\,y_0)$.

Если точка $(x_0;\,y_0)$ принадлежит множеству M вместе со своей δ - окрестностью $U_2(\delta;\,x_0;\,y_0)$, т.е. со всеми своими близкими точками $(x;\,y)$, то она (точка $(x_0;\,y_0)$) называется внутренней точкой множества M.

Определение 2. Точка $P_0(x_0;\,y_0)$ называется точкой локального максимума (минимума) функции $z = f\,(x,\,y)$, если для всех точек $(x;\,y)$ из области определения функции, близких к точке $P_0(x_0;\,y_0)$ выполняется неравенство $f(x_0;\,y_0)>f(x;\,y)$ (соответственно, $f(x_0;\,y_0)<f(x;\,y)$).

Значение функции $z = f\,(x,\,y)$ в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции.

Если точка $(x_0;\,y_0)$ - точка локального максимума (минимума) функции $z=f(x,\,y)$, то около точки $(x_0;\,y_0;\,f(x_0,\,y_0))$ трехмерного пространства график функции $z=f(x,\,y)$ имеет вид «шапочки» (соответственно, перевернутой «шапочки») см. рис.

Слова ”максимум“ и ”минимум“ можно заменить одним “экстремум “. Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.

Экстремум функции нескольких переменных может достигаться лишь в точках, лежащих внутри области ее определения, в которых все частные производные первого порядка обращаются в нуль. Такие точки называются стационарными. Для функции двух переменных $z = f(x,\,y)$ стационарные точки находятся из системы уравнений:

$$\begin{cases} z'_x(x,y)=0 \\ z'_y(x,y)=0 \end{cases} \qquad (1)$$

Условия (1) являются необходимыми условиями существования экстремума.

Достаточные условия экстремума для функции $z = f\,(x,\,y)$ выражаются с помощью определителя $\Delta=\begin{vmatrix} AB \\ BC \end{vmatrix}=AC-B^2$,

где $A=z''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=z''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=z''_{yy}(x_0,y_0)$, а именно:

1) если $\Delta>0$, то $P_0(x_0;\,y_0)$ – точка экстремума: при $A<0$ (или $C<0$) – точка максимума, при $A>0$ (или $C>0$) – точка минимума.

2) если $\Delta<0$, то в точке P_0 нет экстремума.

3) Если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума функции остается открытым (требуется дальнейшее исследование функции, например, по знаку приращения Δf вблизи этой точки).

Пример 1. Найти экстремум функции $z = x^3 + y^3 - 9xy$.

Решение. 1) Находим частные производные первого порядка

$z'_x = 3x^2 - 9y, \quad z'_y = 3y^2 - 9x$

2) Воспользовавшись необходимыми условиями, находим стационарные точки $\begin{cases} 3x^2 - 9y = 0 \\ 3y^2 - 9x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 3y \\ y^2 = 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{3}x^2 \\ \left(\dfrac{1}{3}x^2\right)^2 = 3x \end{cases} \Rightarrow x^4 - 27x = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 3.$

Из первого уравнения системы получим $y_1 = 0,\ y_2 = 3$. Таким образом, найдены две стационарные точки $P_1(0;\ 0)$ и $P_2(3;\ 3)$.

3) Находим частные производные второго порядка и их значения в стационарных точках: $z''_{xx} = 6x,\ z''_{xy} = -9,\ z''_{yy} = 6y$.

В точке $P_1(0;\ 0)$ $A = 0$, $B = -9$, $C = 0$, $\Delta = AC - B^2 = -81 < 0$ и в точке $P_1(0;\ 0)$ нет экстремума.

В точке $P(3;\ 3)$ $A = 18$, $B = -9$, $C = 18$, $\Delta = 324 - 81 > 0$, $A > 0$ и в точке $P(3;\ 3)$ функция имеет минимум. Величина этого минимума $z_{min} = -27$.

Пример 2. Исследовать функцию $z = x^4 + y^4$ на экстремум.

Решаем аналогично. Здесь стационарной точкой является (0; 0). В этой точке $A = B = C = 0$ и поэтому $\Delta = 0$, т. е. теорема не применима. Но поскольку в точке (0; 0) будет $z = 0$, а во всех остальных точках $z > 0$, то ясно, что здесь мы имеем минимум. Разумеется, что не всегда дело обстоит так просто.

VI. Условный экстремум

Функция $f(p) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет условный максимум (условный минимум) в т. $P_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$, если $\exists$такая окрестность точки P_0, для всех точек P ($P \neq P_0$), удовлетворяющих уравнениям связи $\varphi_k(P) = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$.

Задача нахождения условного экстремума сводится к исследованию на обычный экстремум функции Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где λ_k называются множителями Лагранжа.

В случае функции двух переменных $z = f(x, y)$ при уравнении связи $\varphi(x, y) = 0$ функция Лагранжа имеет вид:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y),$$

где λ - неопределенный постоянный множитель Лагранжа.

Необходимые условия экстремума выражаются системой уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0. \end{cases}$$

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа:

$$d^2 L(x, y) = \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$$

при условии, что dx и dy связаны уравнением:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0 \quad (dx^2 + dy^2 \neq 0).$$

Функция $f(x,y)$ имеет условный максимум, если $d^2 L < 0$, и условный минимум, если $d^2 L > 0$. В частности, эти условия эквивалентны достаточным условиям существования экстремума.

Пример. Найти условный экстремум функции $z = x + 2y$ при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 5$.

Решение. Составим функцию Лагранжа $L(x, y, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$.

Имеем $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$; $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$.

Находим стационарные точки:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1}{2\lambda}, \\ y = -\dfrac{1}{\lambda}, \\ \dfrac{1}{4\lambda^2} + \dfrac{1}{\lambda^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{4\lambda^2} = 5,\ \lambda^2 = \frac{1}{4},\ \lambda_{1,2} = \pm\frac{1}{2} \text{ и}$$

$x_1 = -1$, $y_1 = -2$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$.

Имеем две стационарные точки для $\lambda_1 = 0{,}5$, $P_1(-1;-2)$ и для $\lambda_2 = -0{,}5$, $P_2(1;2)$.

Так как $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, то $d^2 L(x, y) = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2$,

$d^2 L(x, y) = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

Если $\lambda = 0{,}5$, $x = -1$, $y = -2$, то $d^2 L(x, y) > 0$ и данная функция в т. $P_1(-1;-2)$ имеет условный минимум $z_{\min} = -5$.

Если $\lambda = -0{,}5$, $x = 1$, $y = 2$, то $d^2 L(x, y) < 0$ и данная функция в т. $P_2(1;\,2)$ имеет условный максимум $z_{\max} = 5$.

Ответ: $z_{\max}(1,2)=5$, $z_{\min}(-1,-2)=-5$

VII. Производная в данном направлении. Градиент функции

Если функция $u = f(x, y, z)$ дифференцируема в точке $M(x; y; z)$, то она имеет производные по всем направлениям и справедливо равенство:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{a}} = u'_x(x,y,z)\cos\alpha + u'_y(x,y,z)\cos\beta + u'_z(x,y,z)\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{a}\,\{a_x; a_y; a_z\}$, определяемые формулами $\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$; $\cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$.

Градиентом функции $u = f(x, y, z)$ называется вектор $\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$. Градиент функции $u = f(x, y, z)$ в точке $(x; y; z)$ направлен в сторону наибольшего роста функции $u = f(x, y, z)$, а длина его равна скорости роста функции в этом направлении и

$$v_{max} = |\operatorname{grad} u(x,y,z)| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}.$$

Пример. Пусть $z = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}}$. Найти а) *grad z* в т. $A(4;\ 1)$; б) производную функции z по направлению вектора $\vec{a}\{3; 4\}$ в т. $A(4;\ 1)$; в) построить линию уровня, проходящую через точку A.

Решение. а) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_A = \frac{1}{4}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_A = 1$;

$\operatorname{grad} z = \frac{1}{4}\vec{i} + \vec{j}$.

б) Вычислим производную функции в т. A по направлению вектора $\vec{a}\{3; 4\}$. Для этого найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = \frac{4}{5}.$$

Подставляя в формулу производной функции по направлению вектора значение частных производных и направляющих косинусов, получим значение производной функции $z(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ в т. A:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = 1\cdot\frac{3}{5} + 4\cdot\frac{4}{5} = \frac{19}{5} = 3{,}8.$$

в) Найдем значение функции z в т. A: $z = 1\cdot 2 = 2$, $\sqrt{x}\sqrt{y} = 2$ - линия уровня функции, проходящей через т. A. Возведем обе части в квадрат и выразим y: $y = \frac{4}{x}$ - гипербола, расположенная в первой четверти (О.О.Ф. $x \ge 0,\ y \ge 0$).

Следует обратить внимание, что $\operatorname{grad} z(4,1) \perp$ (ортогонален) касательной к линии (гиперболе) в т. $A(4;\ 1)$. Этот частный факт есть иллюстрация общего случая: градиент в точке $(x_0; y_0)$ всегда ортогонален линии уровня, проходящей через точку $(x_0; y_0)$.

VIII. Наибольшее и наименьшее значение функции $z = f(x, y)$

Функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области D, достигает в ней наибольшего и наименьшего значения или в критических точках, или в точках, лежащих на границе области.

Для нахождения наибольшего и наименьшего значения функции в замкнутой ограниченной области D необходимо:

1) Найти критические точки лежащие внутри данной области и вычислить в них значения функции;
2) Найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области;
3) Сравнить все полученные значения функции: самое большее (меньшее) и будет наибольшим (наименьшим) значением функции в данной области.

Как правило, граница области D разбивается на ряд участков, каждый из которых определяется уравнением вида $y = \varphi(x)$, $a \le x \le b$ или $x = \psi(y)$, $c \le y \le d$. Вдоль такого участка границы функция $z = f(x, y)$ превращается в функцию только одной переменной x (или y). Иногда граница области D может задаваться параметрическими уравнениями: $x = X(t)$, $y = Y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$. В этом случае функция z превращается вдоль границы в функцию параметра t: $z = f(x(t), y(t))$, $\alpha \le t \le \beta$. Поэтому задача нахождения наибольшего и наименьшего значения функции $z = f(x, y)$ на границе области D сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значения функции одной переменной.

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $x \ge -1,\ y \ge -1,\ x + y \le 1$.

Решение. Изобразим на координатной плоскости OXY область D.

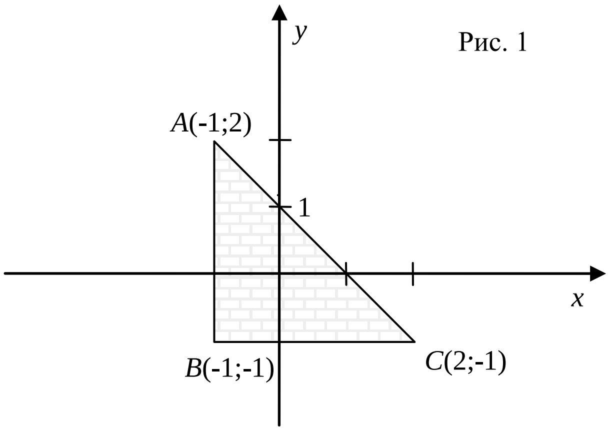


Рис. 1

Область D представляет собой треугольник ABC.

1) Найдем критические точки, лежащие внутри ΔABC.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 10x - 3y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y,$$

$$\begin{cases} 10x - 3y = 0, \\ -3x + 2y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases} \Rightarrow \text{O(0; 0)} -$$

критическая точка, лежащая внутри ΔABC, причем $z(0;0) = 4$.

2) Исследуем теперь значения функции на контуре треугольника.
На стороне *BC*:

при y = -1 имеем $z = 5x^2 + 3x + 5$, $x \in [-1; 2]$.

Найдем критические точки

$z' = 10x + 3$, $z' = 0 \Rightarrow 10x + 3 = 0$, $x = -0{,}3 \in [-1; 2]$, $z(-0{,}3; -1) = 6{,}35$.

Найдем значения функции на концах отрезка *BC*:

$z(-1; -1) = 7$, $z(2; -1) = 31$.

На стороне *AB*:

при x = -1 имеем $z = y^2 + 3y + 9$, $y \in [-1; 2]$.

Найдем критические точки

$z' = 2y + 3$, $z' = 0 \Rightarrow 2y + 3 = 0$, $y = -1{,}5 \notin [-1; 2]$.

Найдем значения функции на концах отрезка *AB*:

$z(-1; -1) = 7$, $z(-1; 2) = 19$.

На стороне *AC*:

при $y = 1 - x$ имеем $z = 5x^2 - 3x(1-x) + (1-x)^2 + 4 = 9x^2 - 5x + 5$, $x \in [-1; 2]$.

Найдем критические точки

$$z' = 18x - 5,\ z' = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{18} \in [-1; 2],\ z\left(\frac{5}{18}; \frac{13}{18}\right) = 4{,}31$$

Значения функции на концах отрезка *AC* найдены ранее.

В итоге получим следующую таблицу возможных наибольших и наименьших значений функции.

Таблица 1

$(x; y)$	(0; 0)	(-0,3; -1)	(-1; -1)	(2; -1)	(-1; 2)	$\left(\frac{5}{18}; \frac{13}{18}\right)$
$z(x, y)$	4	6,35	7	31	19	4,31

Из таблицы видно, что наибольшее значение $z_{наиб.}(2, -1) = 31$, $z_{наим.}(0, 0) = 4$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = 2x^2 - 2y^2$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

Решение. Эту задачу можно решить аналогично первой задаче. Приведем второй способ решения. Окружность $x^2 + y^2 = 1$ имеет следующие параметрические уравнения $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$. Подставляя эти выражения для x и y в формулу $z = 2x^2 - 2y^2$, получим функцию одной переменной t:

$z = 2(\cos t)^2 - 2(\sin t)^2 = 2(\cos^2 t - \sin^2 t) = 2\cos 2t$, т.е. $z = 2\cos 2t$.

Находим критические точки: $z'(t) = -4\sin 2t$, $-4\sin 2t = 0$, $2t = \pi n$, $n \in Z$, $t = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$, но $0 \le t \le 2\pi$, следовательно, $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$, $t_4 = \frac{3\pi}{2}$, $t_5 = 2\pi$. Находим значения в критических точках и на концах отрезка $[0; 2\pi]$:

$z(0)=2,\ z\left(\frac{\pi}{2}\right)=\text{-}2,\ z(\pi(=2,\ z\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-2,\ z(2\pi)=2.$

Следовательно, $z_{наиб.}=z(-3;0)=z(3;0)=2$, $z_{наим.}=z(0;-3)=z(0;3)=-2$.

IX. Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов имеет многочисленные приложения. В частности, он применяется для нахождения эмпирических формул при решении задач сглаживания экспериментальных зависимостей.

Пусть в результате N измерений получена совокупность соответствующих значений двух величин *x* и *y*. Предположим, что результаты эксперимента указывают на линейную зависимость между *x* и *y*, то есть $y=ax+b$.

Но из-за погрешности измерений и из-за случайных возмущений, как правило, имеет место разброс экспериментальных данных (точек (*x*; *y*)) вокруг предполагаемой прямой линии $y=ax+b$. Требуется подобрать a и b так, чтобы имело место наилучшее согласование прямой и экспериментальных точек. Это равносильно тому, чтобы сумма квадратов отклонений экспериментальных точек от точек сглаживающей прямой обращалась в минимум. Из условия минимума функции $S=\sum_{i=1}^{N}(y_i-(ax_i+b))^2$ найдем параметры a и b.

$$\frac{\partial S}{\partial a}=-\sum_{i=1}^{N}2(y_i-(ax_i+b))x_i=0,\quad \frac{\partial S}{\partial b}=-\sum_{i=1}^{N}2(y_i-(ax_i+b))=0;\ \text{откуда}$$

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{N}y_ix_i-a\sum_{i=1}^{N}x_i^2-b\sum_{i=1}^{N}x_i=0\\ \sum_{i=1}^{N}y_i-a\sum_{i=1}^{N}x_i-bN=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\sum_{i=1}^{N}x_i^2+b\sum_{i=1}^{N}x_i=\sum_{i=1}^{N}y_ix_i\\ a\sum_{i=1}^{N}x_i+bN=\sum_{i=1}^{N}y_i\end{cases}$$

Итак, для нахождения a и b получилась система двух уравнений с двумя неизвестными.

Пример. Найти формулу вида $y=ax+b$ методом наименьших квадратов по данным опыта

x	1	2	3	4	6
y	4	3	3	1	2

Решение. Для определения коэффициентов a и b в линейной функции $y=ax+b$ предварительно вычислим

$\sum_{i=1}^{5}y_ix_i$ =4 + 6 + 9 + 4 + 12 = 35, $\sum_{i=1}^{5}x_i^2$ = 1 + 4 + 9 + 16 + 36 = 66,

$\sum_{i=1}^{5}y_i$ = 13, $\sum_{i=1}^{5}x_i$ = 16, N = 5.

Система для определения параметров примет вид:

$$\begin{cases} 66a + 16b = 35 \\ 16a + 5b = 13 \end{cases}$$, откуда

$$a = -\frac{33}{74};\ b = \frac{149}{37} = 4\frac{1}{37}.$$

Искомая прямая есть $y = -\frac{33}{74}x + 4\frac{1}{37}$.

На рис. 2 показаны найденная линейная функция и полученные экспериментальные данные.

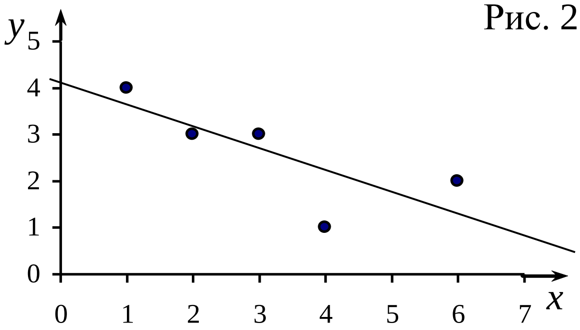
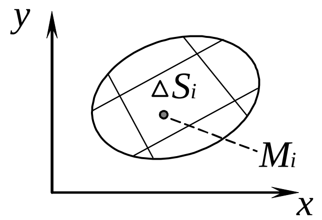


Рис. 2

Методические указания к выполнению контрольной работы № 6:
«Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Векторный анализ»

I. Двойной интеграл

Рис. 3



Пусть на замкнутой области S плоскости Oxy задана непрерывная функция $z = f(x, y)$. Разобьем область S на n частей ΔS_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) и возьмем точки $M_i \in \Delta S_i$ (рис. 3). Составим сумму $V_n = \sum\limits_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta S_i$. Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y)$ в области S.

Двойным интегралом $\iint\limits_S f(x,y)dS$ (1) от функции $f(x, y)$, распространенным на область S, называется предел интегральной суммы $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i$ при $d \to 0$, если этот предел существует и не зависит от способа дробления области S на элементарные ячейки ΔS_i и выбора точек $M_i(x_i; y_i)$ в них; где d – наибольший диаметр ячеек ΔS_i, $f(x, y)$ называется подынтегральной функцией, S – областью интегрирования, dS – элементом площади. В прямоугольных координатах $dS = dxdy$.

Геометрический смысл двойного интеграла. Если в интеграле (1) подынтегральная функция $f(x, y) \geq 0$ и поверхность $z = f(x, y)$ является непрерывной, то двойной интеграл представляет собой объем прямого цилиндра с образующей параллельной оси Oz, ограниченного снизу конечной замкнутой областью S плоскости Oxy, сверху – поверхностью $z = f(x, y)$.

Двойной интеграл обладает всеми основными свойствами определенного интеграла:

1. Область интегрирования двойного интеграла можно разбить на части
$\iint\limits_S f(x,y)dS = \iint\limits_{S_1} f(x,y)dS + \iint\limits_{S_1} f(x,y)dS$, где $S = S_1 \cup S_2$;

2. Двойной интеграл от суммы функций равен сумме двойных интегралов от всех слагаемых

$$\iint\limits_S \big(f(x,y) + g(x,y) - \varphi(x,y)\big)dS = \iint\limits_S f(x,y)dS + \iint\limits_S g(x,y)dS - \iint\limits_S \varphi(x,y)dS;$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак двойного интеграла
$\iint\limits_S a \cdot f(x,y)dS = a\iint\limits_S f(x,y)dS$.

Область S называется **стандартной** (***x* – трапецией**) относительно оси Oy, если она представляет собой криволинейную трапецию (рис. 4): $a \leq x \leq b$, $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – однозначные непрерывные функции на отрезке $[a; b]$. Причем любая вертикаль, проходящая через точку $x \in [a; b]$, пересекает границу области S только в двух точках.

Область S называется **стандартной** (***y*** **– трапецией**) относительно оси Ox, если она представляет собой криволинейную трапецию (рис. 5):
$\varphi(y) \le x \le \psi(y), \quad a \le y \le b,$ где $\varphi(y)$ и $\psi(y)$ – однозначные непрерывные функции на отрезке $[a; b]$. Причем любая горизонталь, проходящая через точку $y \in [a; b]$, пересекает границу области S только в двух точках.

Вычисление двойного интеграла (1) сводится к вычислению одного или суммы нескольких двукратных интегралов вида $\iint\limits_S f(x,y)dS = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$. В этом выражении сначала вычисляется интеграл, стоящий в скобках, причем интегрирование производится по y, а x считается постоянным. Как правило, пределы при первом интегрировании являются переменными. Пределы при втором интегрировании всегда постоянны.

Рис. 4

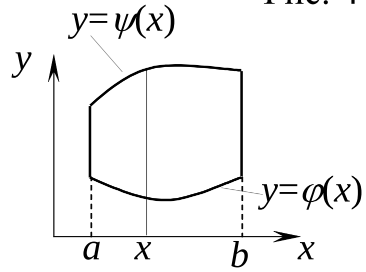


Рис. 5

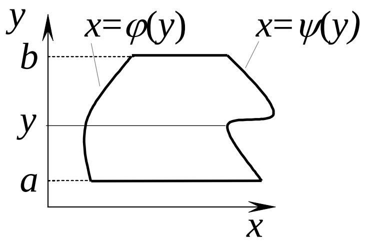
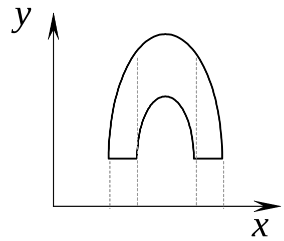


Рис. 6



Если область S – стандартная относительно оси Oy (рис. 4), то двойной интеграл удобно вычислять по формуле $\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)} f(x,y)dy$.

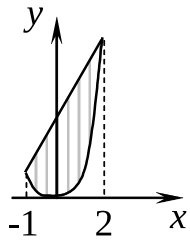
Если область S – стандартная относительно оси Ox (рис. 5), то двойной интеграл удобно вычислять по формуле $\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dy \int\limits_{x=\varphi(y)}^{x=\psi(y)} f(x,y)dx$.

Если область S – нестандартная (рис. 6) и ее удается разбить на сумму стандартных областей, то при вычислении двойного интеграла используют его первое свойство.

Величина двойного интеграла не изменится, если его вычислять сначала по переменной x, а потом по переменной y, или наоборот.

Пример 1. Изменить порядок интегрирования в двукратном интеграле
$J = \int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x,y)dy$.

Рис. 7



Решение. Область интегрирования S ограничена кривыми $y = x^2$, $y = x + 2$ и $x = -1$, $x = 2$ (рис. 7). Отсюда, изменяя роли осей координат, получаем
$x = -\sqrt{y}, \quad x = \sqrt{y},\ x = y - 2$ и $y = 0, y = 4$.

Следовательно,

$$J=\int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_1^4 dy\int_{y-2}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$$

В рассматриваемом примере, поскольку область интегрирования S является стандартной относительно оси Oy, двойной интеграл J проще вычислять сначала по переменной y, потом по переменной x.

Для преобразования двойного интеграла, отнесенного к прямоугольным координатам, в **двойной интеграл в полярных координатах** нужно в подынтегральном выражении прямоугольные координаты заменить полярными: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, а вместо $dxdy$ подставить $rd\varphi\, dr$. При этом уравнения линий, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к полярным координатам.

Площадь S плоской области D в прямоугольных координатах равна двойному интегралу $S=\iint\limits_D dxdy$, в полярных координатах – $S=\iint\limits_D r\,d\varphi dr$.

Масса m плоской фигуры, занимающей область D, с поверхностной плотностью $\delta=\delta(x, y)$, статические моменты m_y и m_x, координаты центра тяжести $C(x_c; y_c)$, моменты инерции относительно осей Ox и Oy (I_x и I_y) и начала координат I_0 выражаются по формулам: $m=\iint\limits_D \delta\, dxdy$, $m_y=\iint\limits_D x\delta\, dxdy$,

$$m_x=\iint\limits_D y\delta\, dxdy,\ x_c=\frac{m_y}{m},\ y_c=\frac{m_x}{m},\ I_x=\iint\limits_D y^2\delta\, dxdy,\ I_y=\iint\limits_D x^2\delta\, dxdy,$$

$$I_0=I_x+I_y=\iint\limits_D (x^2+y^2)\delta\, dxdy.$$

Пример 2. Вычислить с помощью двойного интеграла в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в декартовых координатах $\left(x^2+y^2\right)^2=a^2\left(x^2+2y^2\right)$, $a > 0$.

Решение. Перейдем к полярным координатам. Полагая в уравнении кривой $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ получим:

$$\left(r^2\cos^2\varphi+r^2\sin^2\varphi\right)^2=a^2\left(r^2\cos^2\varphi+2r^2\sin^2\varphi\right);\qquad r^4=r^2a^2\left(1+\sin^2\varphi\right);\ \Rightarrow$$

$$r^2=a^2\left(1+\sin^2\varphi\right),\ r=0 \text{ – точка};\Rightarrow\ r=a\sqrt{1+\sin^2\varphi}.$$

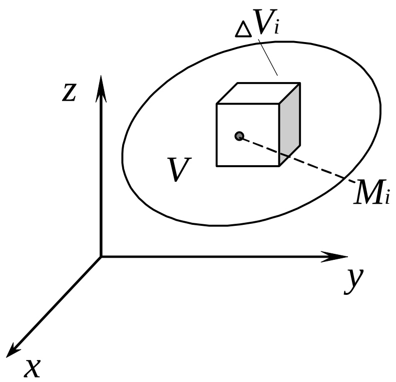
Кривая определена при любых значениях φ. Найдем площадь, ограниченную кривой по формуле $S=\iint\limits_D r\,d\varphi dr=\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^{a\sqrt{1+\sin^2\varphi}} rdr=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2\Big|_0^{a\sqrt{1+\sin^2\varphi}} dr=$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\sin^2\varphi\right)d\varphi=\frac{a^2}{2}\left(2\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\,d\varphi\right)=\frac{a^2}{2}\left(3\pi-\frac{\sin 2\varphi}{4}\Big|_0^{2\pi}\right)=\frac{3a^2\pi}{2}.$$

Ответ: $S=\dfrac{3a^2\pi}{2}$.

II. Тройной интеграл

Рис. 8



Пусть в замкнутой области V в декартовой системе координат $Oxyz$ задана непрерывная функция $f(x, y, z)$. Разобьем область V на n ячеек ΔV_i (i = 1, 2, …, n) и возьмем точки $M_i(x_i, y_i, z_i) \in \Delta V_i$ (рис. 8). Составим сумму $P_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i$. Эта сумма называется интегральной суммой для функции $f(x, y, z)$ в области V.

Тройным интегралом $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dV$ (2) от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область V, называется предел интегральной суммы $\lim\limits_{d\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$ при $d \to 0$, если этот предел существует и не зависит от формы ячеек ΔV_i и выбора точек $M_i(x_i; y_i; z_i)$ в них, где d – наибольший диаметр ячеек ΔV_i. В прямоугольных координатах элемент объема $dV = dxdydz$.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла.

Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению трехкратного интеграла

$$\int_a^b \left\{ \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx.$$

В результате интегрирования по z и подстановки пределов в фигурных скобках получится функция от x и y. Далее вычисляется двойной интеграл от этой функции.

Масса m тела, занимающего область V, с объемной плотностью $\delta = \delta(x, y, z)$, статические моменты m_{yz}, m_{xz} и m_{xy}, координаты центра тяжести $C(x_c; y_c; z_c)$, моменты инерции относительно осей Ox, Oy и Oz (I_x, I_y и I_z) и начала координат I_0 выражаются по формулам: $m = \iiint\limits_V \delta\, dxdydz$, $m_{yz} = \iiint\limits_V x\delta\, dxdydz$,

$$m_{xz} = \iiint\limits_V y\delta\, dxdydz,\ m_{xy} = \iiint\limits_V z\delta\, dxdydz,\ x_c = \frac{m_{yz}}{m},\ y_c = \frac{m_{xz}}{m},\ z_c = \frac{m_{xy}}{m},$$

$$I_x = \iiint\limits_V (y^2+z^2)\delta\, dxdydz,\ I_y = \iiint\limits_V (x^2+z^2)\delta\, dxdydz,\ I_z = \iiint\limits_V (x^2+y^2)\delta\, dxdydz,$$

$$I_0 = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)\delta\, dxdydz.$$

Переход тройного интеграла в прямоугольных координатах в тройной интеграл в цилиндрических координатах осуществляется по формулам: $x = r\cos\varphi$,

$y = r\sin\varphi$, $z = z$; элемент объема $dV = r\,d\varphi\,dr\,dz$. При этом уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к цилиндрическим координатам:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ z)r\,d\varphi\ dr\ dz.$$

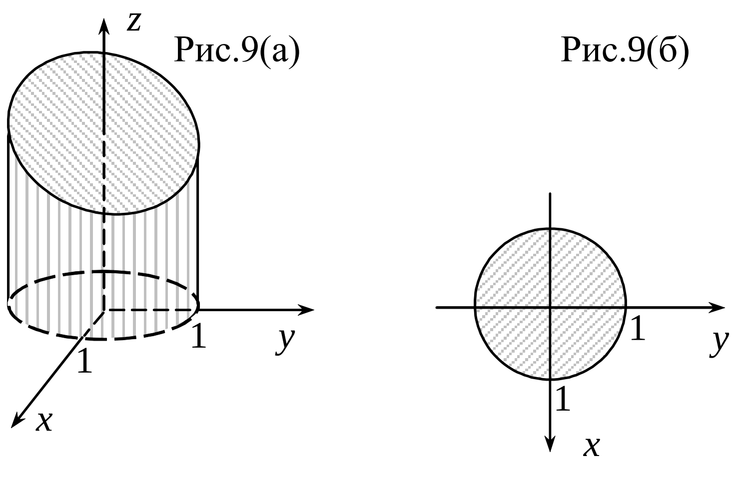
Переход тройного интеграла в прямоугольных координатах в тройной интеграл в сферических координатах осуществляется по формулам: $x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$; элемент объема $dV = r^2\sin\theta\,d\varphi\,dr\,d\theta$. При этом уравнения поверхностей, ограничивающих область интегрирования, также преобразуются к сферическим координатам:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)r^2\sin\theta\ d\varphi\ dr\ d\theta.$$

Пример. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного указанными поверхностями: $z = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x + y + z = 3$. Сделать чертежи данного тела и его проекции на плоскость Oxy.

Решение. Тело, ограниченное плоскостями $z = 0$, $x + y + z = 3$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 1$, изображено на рис. 9(а). Его проекция на плоскость Oxy является кругом с радиусом $r = 1$ (рис. 9(б)). Объем тела равен

$V = \iiint\limits_G dxdydz = \iint\limits_{G_{xy}} dxdy \int\limits_0^{3-x-y} dz = \iint\limits_{G_{xy}} (3 - x - y)\,dxdy$, где G – область, занимаемая данным телом; G_{xy} – ее проекция на плоскость Oxy. Линия, ограничивающая плоскую область G_{xy}, есть окружность $x^2 + y^2 = 1$. Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = r\,d\varphi\,dr$, найдем:



$$V = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (3 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)r\,dr = \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3r^2}{2} - \frac{r^3}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right)\Bigg|_{r=0}^{r=1} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}(\cos\varphi + \sin\varphi)\right)d\varphi = 3\pi.$$

Ответ. $V = 3\pi$.

III. Криволинейный интеграл

Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна в каждой точке $M(x; y)$ дуги L. Если разбить эту дугу произвольным способом на n частичных дуг длиною Δl_1, Δl_2, …, Δl_n, выбрать на каждой из них по одной произвольной точке $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, …, $M_n(x_n; y_n)$, вычислить значения функции в этих точках и составить сумму

$$f(x_1,y_1)\Delta l_1+f(x_2,y_2)\Delta l_2+\ldots+f(x_n,y_n)\Delta l_n=\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta l_i\,,$$

то она называется интегральной суммой функции $f(x, y)$ по дуге L.

Криволинейным интегралом первого рода $\int\limits_L f(x,y)dl$ от функции $f(x, y)$, взятым по плоской кривой L, называется предел интегральной суммы $\lim\limits_{\max(\Delta l_i)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i,y_i)\Delta l_i$ при стремлении к нулю наибольшей по длине элементарной ячейки Δl_i, если этот предел существует и не зависит от способа дробления кривой L на элементарные ячейки Δl_i и выбора точек $M_i(x_i; y_i)$ в них.

В прямоугольных координатах элемент дуги $dl=\sqrt{dx^2+dy^2}$.

Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[\alpha; \beta]$,

то $dl=\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,|dt|$, $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left(x(t),y(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\,|dt|$.

Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $a\le x\le b$,

то $dl=\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$, $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_a^b f\left(x,y(x)\right)\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx$.

Если кривая L задана уравнением $x = \varphi(y)$, $c\le x\le d$,

то $dl=\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy$, $\int\limits_L f(x,y)dl=\int\limits_c^d f\left(\varphi(y),y\right)\sqrt{1+\left(\varphi'(y)\right)^2}\,dy$.

Физический смысл криволинейного интеграла первого рода. Масса m линии L с линейной плотностью $\delta = f(x, y)$ определяется по формуле $m=\int\limits_L \delta\,dl$.

Свойства криволинейного интеграла первого рода.

1) При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл первого рода не изменяет своего знака, т. е. $\int\limits_{L^+}f(x,y)\,dl=\int\limits_{L^-}f(x,y)\,dl$, где L^+ – кривая L, пробегаемая в заданном направлении, L^- – кривая L, пробегаемая в противоположном направлении.
2) Если кривая L с помощью некоторой точки разбита на части: $L = L_1\cup L_2$, то $\int\limits_L f(x,y)\,dl=\int\limits_{L_1}f(x,y)\,dl+\int\limits_{L_2}f(x,y)\,dl$.

Криволинейным интегралом второго рода от пары функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, взятым по кривой L, понимается интеграл $J = \int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$. Если кривая L задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t\in[\alpha, \beta]$, то $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$, $J = \int\limits_\alpha^\beta \{P(x(t),y(t))\,x'(t) + Q(x(t),y(t))\,y'(t)\}\,dt$. Если кривая L задана уравнением $y = y(x)$, $x\in[a; b]$, то $dy = y'(x)dx$,

$$J = \int\limits_a^b \{P(x,y(x)) + Q(x,y(x))\cdot y'(x)\}\,dx.$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) При изменении направления интегрирования криволинейный интеграл второго рода изменяет свой знак, т. е. $\int\limits_{L^+} = -\int\limits_{L^-}$.
2) Если кривая L с помощью некоторой точки разбита на части: $L = L_1\cup L_2$, то $\int\limits_L = \int\limits_{L_1} + \int\limits_{L_2}$.

Циркуляцией называется криволинейный интеграл по замкнутой плоской линии L. При положительном направлении ее обхода (против движения часовой стрелки) обозначается $\oint\limits_{+L}$, а при отрицательном направлении обхода обозначается $\oint\limits_{-L}$.

Обычно криволинейный интеграл $\int\limits_{AB}$ зависит от линии интегрирования. Взятый вдоль разных линий, соединяющих точки A и B, он будет иметь различные значения. Если же в некоторой области D выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки A и B, а взятый по любой замкнутой линии, пролегающей в области D, равен нулю.

Выражение $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$ будет полным дифференциалом функции $u(x, y)$ в некоторой области D, если $P'_y = Q'_x$ и если P, Q, P'_y, Q'_x непрерывны в этой области.

Полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$ с помощью криволинейного интеграла вдоль ломаной ABM ($A(x_0; y_0)$, $B(x; y_0)$, $M(x; y)$) находят по формуле $u = \int\limits_{ABM} du + C = \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C$.

Полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$ с помощью криволинейного интеграла вдоль ломаной $ABKM$ ($A(x_0; y_0; z_0)$, $B(x; y_0; z_0)$, $K(x; y; z_0)$, $M(x; y; z)$) находят по формуле

$$u = \int\limits_{ABKM} du + C = \int\limits_{x_0}^{x} F_x(x, y_0, z_0)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x, y, z)\, dz + C\,.$$

С помощью криволинейных интегралов вычисляются следующие величины:

1) Длина дуги *AB* плоской или пространственной линии $l_{AB} = \int\limits_{AB} dl\,.$

2) Площадь фигуры, расположенной в плоскости *xOy* и ограниченной замкнутой линией *C*

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{+C} xdy - ydx\,.$$

3) Масса *m* материальной дуги *AB* с линейной плотностью $\rho(M)$ вещества в точке *M* дуги $m = \int\limits_{AB} \rho(M)dl\,.$

4) Координаты центра тяжести $C(x_c, y_c, z_c)$ дуги *AB*

$$x_c = \frac{\int\limits_{AB} x\rho(M)dl}{m}, \quad y_c = \frac{\int\limits_{AB} y\rho(M)dl}{m}, \quad z_c = \frac{\int\limits_{AB} z\rho(M)dl}{m}\,.$$

5) Работа *A*, совершаемая силой $\vec{F}\{P; Q; R\}$, действующей на точку при перемещении ее по дуге *L*,

$$A = \int\limits_{L} Pdx + Qdy + Rdz\,.$$

Формула Грина $\iint\limits_{D} \left(Q'_x - P'_y\right)dxdy = \oint\limits_{L} Pdx + Qdy$. Устанавливает связь между двойным интегралом по некоторой плоской области *D* и криволинейным интегралом по границе *L* этой области.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл, сделать чертеж:

а) $J = \int\limits_{L} y^2dx + 2xydy$ вдоль дуги параболы $y = 3x^2$ от точки $A(0; 0)$ до точки $B(1; 3)$.

б) $J = \int\limits_{L} 3y^2dx + xdy$ по дуге L эллипса $x = \cos t$, $y = 2\sin t$ обходя ее против хода часовой стрелки от точки $A(1; 0)$ до точки $B(-1; 0)$.

Решение. а) Преобразуем криволинейный интеграл в определенный интеграл с переменной x: $y = 3x^2$, $dy = 6xdx$. Пределы интегрирования определяем из рис. 10: $x_A = 0$, $x_B = 1$. Вычислим интеграл J:

$$J = \int\limits_{0}^{1} 9x^4dx + 2x \cdot 3x^2 \cdot 6x\, dx = \int\limits_{0}^{1} 45x^4dx = 9x^5\Big|_0^1 = 9.$$

Ответ. $J = 9$.

Рис. 10

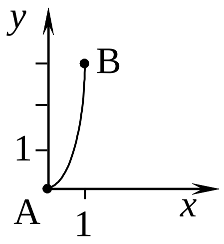
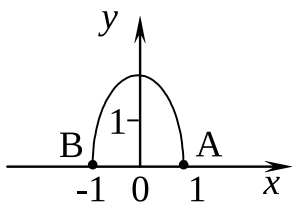


Рис. 11



б) Найдем значение параметра t $(0 \le t \le 2\pi)$ в точках $A(1;\,0)$ и $B(-1;\,0)$ (рис. 11):

$$\begin{cases}\cos t = 1\\ \sin t = 0\end{cases} \Rightarrow t_A = 0; \qquad \begin{cases}\cos t = -1\\ \sin t = 0\end{cases} \Rightarrow t_B = \pi .$$

Преобразуем криволинейный интеграл в определенный с переменной t, затем вычислим его: $x = \cos t$, $dx = -\sin t\, dt$; $y = 2\sin t$, $dy = 2\cos t\, dt$;

$$J = \int_0^{\pi} 3\cdot 4\sin^2 t\cdot(-\sin t)dt + \cos t\cdot 2\cos t\, dt = -12\int_0^{\pi}\sin^2 t\cdot \sin t\, dt + 2\int_0^{\pi}\cos^2 t\, dt =$$

$$= 12\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2 t\right)d(\cos t) + \int_0^{\pi}(1+\cos 2t)\, dt = 12\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \pi - 16$$

Ответ: $J = \pi - 16$.

Пример 2. Проверить, является ли заданное выражение полным дифференциалом некоторой функции $du = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}\right)dx + \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}\right)dy$, в случае положительного ответа найти $u(x, y)$ с помощью криволинейного интеграла.

Решение. Обозначим коэффициенты при дифференциалах $P = \dfrac{1}{y} - \dfrac{y}{x^2}$, $Q = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{y^2}$ и найдем $P'_y = -\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{x^2}$ и $Q'_x = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{y^2}$. Так как $P'_y = Q'_x$ и P, Q, P'_y, Q'_x непрерывны во всей области, за исключением $x = 0$ и $y = 0$, то заданное выражение является полным дифференциалом некоторой функции $u(x, y)$.

Найдем эту функцию:

$$u = \int_{AM} du + C_1 = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy + C_1 = \int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{y_0} - \frac{y_0}{x^2}\right)dx + \int_{y_0}^{y}\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{y^2}\right)dy +$$

$$+ C_1 = \left(\frac{x}{y_0} + \frac{y_0}{x}\right)\Bigg|_{x=x_0}^{x=x} + \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y}\right)\Bigg|_{y=y_0}^{y=y} + C_1 = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + C, \quad \text{где } C = C_1 - \frac{x_0}{y_0} - \frac{y_0}{x_0}.$$

Область определения функции $u(x, y)$ совпадает с P и Q.

Ответ: $u = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + C$.

IV. Векторный анализ

Скалярным полем называется область, расположенная в плоскости или пространстве, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой скалярной физической величины $u = u(M)$.

Функция $u(M)$, определяющая плоское скалярное поле, зависит от двух переменных $u = u(x, y)$, а функция, определяющая пространственное скалярное поле, зависит от трех переменных $u = u(x, y, z)$.

Линией уровня плоского скалярного поля называется совокупность точек плоскости, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения. Линия уровня определяется уравнением $u(x, y) = C$. Различным постоянным значениям C_1, C_2, .. функции поля соответствуют различные линии уровня: $u(x, y) = C_1$, $u(x, y) = C_2, \ldots$

Поверхностью уровня пространственного скалярного поля называется совокупность точек пространства, в которых функция этого поля имеет одинаковые значения. Поверхность уровня определяется уравнением $u(x, y, z) = C$.

Через каждую точку проходит только одна поверхность (линия) уровня. Они заполняют всю рассматриваемую область и не пересекаются между собой.

Векторным полем называется плоская или пространственная область, с каждой точкой M которой связано определенное значение некоторой векторной физической величины $\vec{a} = \vec{a}(M)$.

Если векторное поле отнесено к прямоугольной системе координат $Oxyz$, то вектор $\vec{a}$ будет векторной функцией, а его проекции a_x, a_y, a_z на оси координат будут скалярными функциями от переменных x, y и z:

$$\vec{a}(M) = \vec{a}(x, y, z) = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Векторной линией векторного поля называется кривая, направление которой в каждой точке M совпадает с направлением вектора, соответствующего этой точке поля.

Потоком векторного поля, образованного вектором $\vec{a}\{a_x; a_y; a_z\}$ через поверхность σ, называется поверхностный интеграл

$$J = \iint_{\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy.$$

Если вектор $\vec{a}$ определяет поле скоростей текущей жидкости, то интеграл J выражает количество жидкости, протекающей через поверхность σ за единицу времени. При этом если σ является замкнутой поверхностью, ограничивающей область V, и если интеграл J берется по внешней стороне σ, то величина J называется потоком вектора $\vec{a}$ изнутри поверхности σ; она дает разность между количествами жидкости, вытекшей из области V, и втекшей в эту область за единицу времени.

При $J > 0$ из области V вытекает жидкости больше, чем в нее втекает, что указывает на наличие в этой области источников, питающих поток жидкости. При $J < 0$ из области V вытекает жидкости меньше, чем втекает, что указывает на наличие в этой области стоков, где жидкость удаляется из потока. При $J = 0$ из области V вытекает жидкости столько же, сколько в нее втекает.

Дивергенцией векторного поля, определяемого вектором $\vec{a}\{a_x;a_y;a_z\}$, называется скаляр

$$\operatorname{div}\vec{a} = \nabla\cdot\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Если дивергенция в точке M_0 больше нуля ($\operatorname{div}\vec{a}(M_0) > 0$), то эта точка называется источником, если $\operatorname{div}\vec{a}(M_0) < 0$, то точка M_0 называется стоком. Абсолютная величина $\operatorname{div}\vec{a}(M_0)$ характеризует мощность источника или стока.

Векторное поле, во всех точках которого дивергенция равна нулю, называется **соленоидальным**. Поток такого поля через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Формула Остроградского – Гаусса $\oiint\limits_{\sigma}\vec{a}\cdot\vec{n}\,d\sigma = \iiint\limits_{V}\operatorname{div}\vec{a}\,dV$, где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к поверхности σ. В прямоугольных декартовых координатах формула Остроградского – Гаусса имеет вид: $\oiint\limits_{+\sigma} a_x dydz + a_y dxdz + a_z dxdy =$ $\iiint\limits_{V}\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)dxdydz$. Она устанавливает связь между потоком и дивергенцией векторного поля: поток векторного поля через замкнутую поверхность σ равен тройному интегралу по области V, ограниченной этой поверхностью, от дивергенции поля.

Ротором (или **вихрем**) векторного поля, определяемого вектором $\vec{a}\{a_x,a_y,a_z\}$, называется вектор

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Запись ротора через определитель удобна для запоминания. Определитель обычно вычисляется разложением по первой строке (правая часть).

Векторное поле, во всех точках которого вихревой вектор равен нулю, называется **потенциальным** (или безвихревым). В потенциальном поле циркуляция всегда равна нулю.

Векторное поле, являющееся одновременно и соленоидальным и потенциальным, называется **гармоническим**.

Формула Стокса $\oint\limits_{L}\vec{a}\cdot d\vec{s} = \iint\limits_{\sigma}\vec{n}\cdot\operatorname{rot}\vec{a}\,d\sigma$, где $\vec{n}$ - нормаль к поверхности σ; $d\vec{s} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$. Направление обхода контура L должно быть согласовано с выбранным направлением положительной нормали. Если наблюдатель смотрит с конца нормали, то он видит обход вдоль кривой L против часовой стрелки.

В прямоугольных декартовых координатах формула Стокса имеет вид

$$\oint\limits_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \iint\limits_\sigma \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) dxdy,$$

смысл которого заключается в следующем: циркуляция вектора по замкнутому контуру L равна потоку вихря вектора через поверхность σ, ограниченную этим контуром.

Пример. Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}$ потенциальным или соленоидальным. В случае потенциальности поля $\vec{F}$ найти его потенциал, где $\vec{F} = (4x + 5yz)\vec{i} + (4y + 5xz)\vec{j} + (4z + 5xy)\vec{k}$.

Решение. Найдем дивергенцию векторного поля $\vec{F}\ \{F_x;\ F_y;\ F_z\}$ по формуле $\operatorname{div}\vec{F} = \dfrac{\partial F_x}{\partial x} + \dfrac{\partial F_y}{\partial y} + \dfrac{\partial F_z}{\partial z}$; $\operatorname{div}\vec{F} = 12 \neq 0 \Rightarrow$ поле не является соленоидальным.

Найдем ротор векторного поля $\vec{F}$:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\vec{k} = (5x - 5x)\vec{i} + (5y - 5y)\vec{j} +$$

$$+ (5z - 5z)\vec{k} = 0 \Rightarrow$$ поле потенциальное.

Найдем потенциал поля для функции, зависящей от трех переменных:

$$u = \int\limits_{ABKM} du + C_1 = \int\limits_{x_0}^{x} F_x(x, y_0, z_0)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} F_y(x, y, z_0)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} F_z(x, y, z)\, dz + C_1 =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} (4x + 5y_0 z_0)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} (4y + 5xz_0)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} (4z + 5xy)\, dz + C_1 = \left(2x^2 + 5y_0 z_0 x\right)\Big|_{x=x_0}^{x=x} +$$

$$+ \left(2y^2 + 5xz_0 y\right)\Big|_{y=y_0}^{y=y} + \left(2z^2 + 5xyz\right)\Big|_{z=z_0}^{z=z} + C_1 = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 5xyz + C,$$ где

$$C = C_1 - 2\left(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\right) - 5x_0 y_0 z_0.$$

Ответ: векторное поле $\vec{F}$ является потенциальным, его потенциал

$$u = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 5xyz + C.$$

Методические указания к выполнению контрольной работы № 7: «Ряды»

Последовательность считается заданной, если известен закон, по которому можно вычислить любой ее член a_n при данном n.

Определение 1. Числовым рядом называется выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \qquad (1)$$

где числа a_1, a_2, …, a_n, …, называемые членами ряда, образуют числовую последовательность.

Определение 2. Суммой конечного числа n первых членов ряда называется n–й частичной суммой ряда: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Определение 3. Числовой ряд (1) называется сходящимся, если существует конечный предел $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Этот предел называется суммой сходящегося ряда. Если предел не существует, то ряд (1) называется расходящимся.

Свойства сходящихся рядов.

1. На сходимость ряда не влияет отбрасывание конечного числа его членов.

2. Если ряд (1) сходится и его сумма равна S, то ряд $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$, где c – любое число, также сходится и его сумма равна cS.

3. Если ряды (1) и $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ сходятся и их суммы равны S_1 и S_2, то ряды $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \ldots + (a_n + b_n) + \ldots$ и $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) \ldots + (a_n - b_n) + \ldots$ также сходятся и их суммы соответственно равны $S_1 + S_2$ и $S_1 - S_2$.

Признаки сходимости числовых рядов.

Необходимый признак сходимости. Ряд может сходиться лишь при условии, когда общий член ряда a_n при $n \to +\infty$ стремится к нулю: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Следствие. Если общий член ряда a_n при $n \to +\infty$ не стремится к нулю, то ряд расходится.

Признак Д’ Аламбера. Если в ряде (1) с положительными членами отношение $(n + 1)$-го члена к n-му при $n \to +\infty$ имеет предел ρ, т.е. $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится, при $\rho > 1$ или $\rho = \infty$ ряд расходится. При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда решается с использованием других признаков.

Например, если $\rho = 1$, но отношение $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ для всех номеров n, начиная с некоторого, больше единицы, то ряд расходится.

Признак сравнения рядов. Если ряд с положительными членами $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ (a) сравнить с другим рядом с положительными членами $b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots$ (b) сходимость или расходимость которого известна, и если начиная с некоторого номера n: 1) $a_n \le b_n$ и ряд (b) сходится, то и ряд (a) также сходится; 2) $a_n \ge b_n$ и ряд (b) расходится, то и ряд (a) также расходится.

Предельный признак сравнения рядов. Если существует конечный предел неравный нулю $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$, то ряд ($a$) и ряд ($b$) ведут себя одинаково, т. е. либо оба сходятся, либо расходятся.

При использовании признака сравнения исследуемый ряд (a) часто сравнивают или с бесконечной геометрической прогрессией $1 + q + q^2 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$, которая при $0 < q < 1$ сходится, при $q \geq 1$ расходится; или с расходящимся гармоническим рядом $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n}$; или с рядом $\dfrac{1}{1^p}+\dfrac{1}{2^p}+\dfrac{1}{3^p}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$, который сходится при $p > 1$ и расходится при $p \leq 1$.

Ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{P_k(n)}{Q_m(n)} - \begin{cases}\text{сходятся, если} & m-k>1;\\ \text{расходятся, если} & m-k\leq 1,\end{cases}$

где k – степень многочлена $P_k(n)$, m - степень многочлена $Q_m(n)$, что следует из предельного признака сравнения с рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^p}$, $p=m-k$.

Радикальный признак Коши. Если для ряда с положительными членами (a) величина $\sqrt[n]{a_n}$ имеет конечный предел ρ при $n \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho$, то при $\rho < 1$ ряд сходится; при $\rho > 1$ ряд расходится. При $\rho = 1$ вопрос о сходимости ряда решается с использованием других признаков.

Радикальный признак Коши обычно применяется, когда общий член ряда a_n содержит показательно – степенную функцию вида $(f(n))^{g(n)}$.

Интегральный признак Коши. Ряд с положительными убывающими членами $a_n = f(n)$ сходится или расходится, смотря по тому, сходится или расходится несобственный интеграл $\int\limits_c^{+\infty} f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная убывающая функция; c – любое положительное число из области определения $f(x)$.

Этим признаком можно пользоваться, когда выражение общего члена $a_n = f(n)$ имеет смысл не только для целых положительных значений n. Эффективность признака зависит от сложности вычисления несобственного интеграла.

Пример 1. Исследовать сходимость числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{3n-1}{5n+3}$. 2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n!}{2^n}$. 3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{n^3}{3^n}$. 4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. 5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n\cdot\ln^2 n}$.

6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

Решение. 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3n-1}{5n+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3-\dfrac{1}{n}}{5+\dfrac{3}{n}} = \dfrac{3}{5}$. Необходимый признак сходимости не выполняется. Поэтому этот ряд расходится.

2) Общий член ряда содержит факториал. Поэтому воспользуемся признаком Д' Аламбера. Найдем a_{n+1}: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)!}{2^{n+1}}$.

$\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)!\cdot 2^n}{n!\cdot 2^{n+1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!(n+1)\cdot 2^n}{n!\cdot 2^n\cdot 2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+1}{2} = +\infty$, $\rho > 1$. Согласно признаку Д' Аламбера данный ряд расходится.

3) Общий член ряда есть дробь, в числителе находится степенная функция, а в знаменателе показательная функция. Поэтому воспользуемся признаком Д' Аламбера. Найдем a_{n+1}: $a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$.

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^3\cdot 3^n}{n^3 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \frac{3^n}{3^n\cdot 3} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \frac{1}{3} = \frac{1}{3},\ \rho < 1.$$

Согласно признаку Д' Аламбера данный ряд сходится.

4) Каждый член a_n данного ряда меньше соответствующего члена $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ сходящегося ряда. Поэтому, согласно признаку сравнения, данный ряд сходится.

5) Несобственный интеграл от непрерывной и убывающей функции $f(x)$ с бесконечным верхним пределом вычислить несложно. Поэтому воспользуемся интегральным признаком Коши при условии, что нижний предел равен двум или любому другому числу большему единице.

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\cdot \ln^2 x} = \int_2^{+\infty} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A\to+\infty} \int_2^{A} \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{A\to+\infty} -\frac{1}{\ln x}\bigg|_2^A = \lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln A} + \frac{1}{\ln 2}\right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится. Поэтому согласно интегральному признаку Коши данный ряд сходится.

6) Общий член ряда содержит показательно – степенную функцию. Поэтому применим радикальный признак Коши:

$\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{-n} = \dfrac{1}{e} < 1.$ Согласно радикальному признаку Коши ряд сходится.

Определение 4. Знакочередующимся числовым рядом (знаки членов которого строго чередуются) называется ряд вида

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, где числа a_1, a_2, a_3, … положительны. (2)

Признак Лейбница. Если в знакочередующемся ряде (2) члены таковы, что $a_1 > a_2 > a_3 \ldots$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, то ряд (2) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Признак Лейбница справедлив, если неравенства выполняются, начиная с некоторого номера N.

Ошибка при замене суммы ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, суммой нескольких его первых членов меньше абсолютного значения первого из отброшенных членов.

Определение 5. Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные.

Определение 6. Знакопеременный ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных значений его членов.

Определение 7. Если знакопеременный ряд сходится, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится, то данный знакопеременный ряд называется условно или неабсолютно сходящимся рядом.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

1. Если ряд сходится абсолютно, то он остается абсолютно сходящимся при любой перестановке его членов. При этом сумма ряда не зависит от порядка его членов.

2. Если ряд сходится условно, то, какое бы мы ни задали число M, можно так переставить члены этого ряда, чтобы его сумма оказалась в точности равной M. Более того, можно так переставить члены условно сходящегося ряда, чтобы ряд, полученный после перестановки, оказался расходящимся.

Определение 8. Функциональным рядом называется выражение

$$a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x), \qquad (3)$$

члены которого являются функциями от переменной x.

При различных значениях x из функционального ряда получаются различные числовые ряды, которые могут быть сходящимися или расходящимися. Совокупность значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется его областью сходимости. Суммой функционального ряда называется функция $S(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)$, а разность $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ – остатком ряда.

Определение 9. Ряд (3) называется равномерно сходящимся на отрезке $[a; b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при $n > N$ и любом $x \in [a; b]$ будет выполнено неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$.

Для определения области сходимости функциональных рядов обычно вначале используется признак Д' Аламбера, а затем те значения x, для которых этот признак не решает вопроса о сходимости ряда, исследуются особо, посредством других признаков сходимости рядов.

Определение 10. Степенным рядом называется функциональный ряд

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n, \qquad (4)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots$ - постоянные числа, называемые коэффициентами ряда.

Определение 11. Интервалом сходимости степенного ряда называется такой интервал от $-R$ до $+R$, что для всякой точки x, лежащей внутри этого интервала, ряд сходится и притом абсолютно, а для точек x, лежащих вне его, ряд расходится. Число R называется радиусом сходимости степенного ряда.

Радиус сходимости R степенного ряда можно определить по признаку Д' Аламбера

$\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, или по признаку Коши $\frac{1}{R} = \lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$.

Теорема Абеля. 1) Если степенной ряд сходится при некотором значении x_0, не равном нулю, то он абсолютно сходится при всяком значении x, для которого $|x| < |x_0|$;

2) если ряд расходится при некотором значении x_0, то он расходится при всяком x, для которого $|x| > |x_0|$.

Степенной ряд в своем интервале сходимости по отношению к операциям дифференцирования и интегрирования ведет себя так же, как многочлен с конечным число членов.

Определение 12. Рядом Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки a называется степенной ряд относительно двучлена $x - a$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

При $a = 0$ ряд Тейлора есть степенной ряд относительно независимой переменной x, называемый рядом Маклорена:

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$$

Примеры разложения функции в ряды

1). $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$

2). $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$

3). $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad x \in \boldsymbol{R}.$

4). $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots,$

$-1 < x < 1.$

5). $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \qquad -1 < x \le 1.$

6). $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \qquad -1 \le x \le 1.$

Пример 2. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.

1. $a_n = \dfrac{n^2}{n!}$. 2. $a_n = \dfrac{2^n}{n(n+1)}$

Решение. 1) Найдем радиус сходимости R степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{n^2\cdot(n+1)!}{(n+1)^2\cdot n!} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2}\frac{n!\cdot(n+1)}{n!} = +\infty.$$

Следовательно, $x \in \boldsymbol{R}$.

2) Найдем радиус сходимости R степенного ряда:

$$R = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}{n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2^n\cdot(n+2)}{n\cdot 2^n\cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

Радиус сходимости $R = 0{,}5 \Rightarrow -0{,}5 < x < 0{,}5$.

Согласно признаку Д’ Аламбера при любых значениях x из найденного интервала ряд абсолютно сходится, а при $|x| > 0{,}5$ расходится. Граничные точки $x = \pm\, 0{,}5$ исследуем особо.

При $x = -\,0{,}5$ получим числовой знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n+1)}$, который сходится согласно признаку Лейбница (члены этого ряда убывают по абсолютному значению, стремясь к нулю).

При $x = 0{,}5$ получим числовой ряд с положительными членами $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n(n+1)}$, который сходится, что следует из сравнения его с сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}$ (каждый член исследуемого ряда меньше соответствующего члена сравниваемого ряда).

Следовательно, интервал сходимости ряда является отрезок $-0{,}5 \le x \le 0{,}5$.

Пример 3. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^b f(x)$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в степенной ряд и затем проинтегрировав его почленно.

1. $f(x) = \sin x^3$, $b = 1$. 2. $f(x) = xe^{2x}$, $b = 0{,}25$

Решение. 1) Пользуясь рядом Маклорена для $\sin x$, заменяя в нем x на x^3, имеем $\sin x^3 = x^3 - \dfrac{x^9}{3!} + \dfrac{x^{15}}{5!} - \ldots (x \in \boldsymbol{R})$. Интегрируя в пределах от 0 до 1, получим

$$J_1 = \int_0^1 \sin x^3 dx = \int_0^1\left(x^3 - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{15}}{5!} - \ldots\right)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^{10}}{3!\cdot 10} + \frac{x^{16}}{5!\cdot 16} - \ldots\Big|_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{3!\cdot 10} + \frac{1}{5!\cdot 16} - \ldots$$

Третий член этого знакочередующегося ряда меньше 0,001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму двух первых членов ряда: $J_1 \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{60} \approx 0{,}233$.

2) Пользуясь рядом Маклорена для e^x, заменяя в нем x на $2x$, имеем $e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \ldots (x \in \boldsymbol{R})$. Умножая полученный ряд на x, и интегрируя в пределах от 0 до 0,25, получим

$$J_2 = \int_0^{0,25} xe^{2x}dx = \int_0^{0,25} \left(x + \frac{2x^2}{1!} + \ldots \frac{2^{n-1}x^n}{(n-1)!} + \ldots \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2x^3}{1!\cdot 3} + \ldots \frac{2^{n-1}x^{n+1}}{(n-1)!\cdot(n+1)} + \ldots \right)\Bigg|_0^{0,25} =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{2\cdot 2x^3}{3!} + \ldots + \frac{2^{n-1}\cdot n\cdot x^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots \right)\Bigg|_0^{0,25} = \frac{1}{2\cdot 2^4} + \frac{2}{2^5\cdot 3!} + \ldots \frac{n}{2^{n+3}\cdot(n+1)!} + \ldots.$$

Исследуем сходимость полученного числового ряда по признаку Д' Аламбера

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot(n+1)!\cdot 2^{n+3}}{(n+2)!\cdot 2^{n+4}\cdot n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{n+1}{2n(n+2)} = 0$, $\rho < 1$. Согласно признаку Д' Аламбера полученный числовой ряд сходится, причем абсолютно. Поэтому представим a_n - ый член в виде $a_n = \frac{n}{(n+1)!\cdot 2^{n+3}} = \frac{n+1}{(n+1)!\cdot 2^{n+3}} - \frac{1}{(n+1)!\cdot 2^{n+3}}$.

Тогда $J_2 = \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{192} + \frac{1}{384} - \frac{1}{1536} + \ldots.$

Шестой член этого знакочередующегося ряда меньше 0,001. Поэтому для вычисления искомого приближенного значения интеграла достаточно взять сумму пяти первых членов ряда: $J_2 \approx \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{192} + \frac{1}{384} \approx 0{,}044$.

Пример 4. Найти три первых, отличных от нуля члена разложения в степенной ряд решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющего начальному условию $y(x_0) = y_0$.

1. $y' = x + y^2$, $y(0) = 1$.   2. $y' = xy$, $y(0) = 2$.

Решение. 1) Пусть искомая функция $y(x)$ разложена в ряд Маклорена $y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots$, где $y(0)$, $y'(0)$, $y''(0)$ … являются значениями функции $y(x)$ и ее производных при $x = 0$.

Согласно начальному условию первый коэффициент $y(0) = 1$. Второй получим при подстановке известных величин в данное уравнение, $y'(0) = 1$. Третий коэффициент найдем путем дифференцирования данного уравнения:
$y'' = 1 + 2yy'$. Отсюда при $x = 0$ получим: $y''(0) = 3$.

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд Маклорена, получим
$y = 1 + x + 1{,}5x^2 + \ldots$

2) Применяя тот же способ, что и в решении предыдущей задачи, получим:
$y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y'' = y + xy'$, $y''(0) = 2$, $y''' = 2y' + xy''$, $y'''(0) = 0$, $y^{(IV)} = 3y'' + xy'''$, $y^{(IV)} = 6$.

Подставляя эти значения коэффициентов в ряд Маклорена, получим
$y = 2 + x^2 + 0{,}25x^4 + ..$

Примечание. Если $x_0 \neq 0$, то искомую функцию $y(x)$ ищем в виде разложения в ряд Тейлора по степеням $(x - x_0)$.

Определение 13. Функциональный ряд вида

$$\frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nx + b_n\sin nx\right), \quad (5)$$

называется тригонометрическим рядом. Постоянные числа a_0, a_n и b_n $(n = 1, 2, \ldots)$ называются коэффициентами тригонометрического ряда.

Если ряд (5) сходится, то его сумма есть периодическая функция $f(x)$ с периодом 2π, $f(x) = f(x + 2\pi)$.

Определение 14. Рядом Фурье для функции $f(x)$ в интервале от $[-\pi, \pi]$ называется тригонометрический ряд (5), если его коэффициенты a_n и b_n вычислены по формулам Фурье:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Теорема Дирихле (*достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье*). Если в интервале $[-\pi, \pi]$ функция $f(x)$ кусочно монотонная и ограниченная, то ее ряд Фурье сходится во всех точках этого интервала, т.е. имеет сумму $S(x)$. При этом: 1) в точках непрерывности функции $f(x)$ он сходится к самой функции, $S(x) = f(x)$; 2) в каждой точке разрыва x_k функции - к полусумме односторонних пределов функции слева и справа,
$S(x_k) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to x_k-0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_k+0} f(x)\right)$; 3) в обоих граничных точках интервала $[-\pi, \pi]$ – к полусумме односторонних пределов функции при стремлении x к этим точкам изнутри интервалов, $S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\left(\lim\limits_{x\to-\pi+0} f(x) + \lim\limits_{x\to\pi-0} f(x)\right)$.

Для четной функции $f(x) = f(-x)$ ряд Фурье не содержит синусов

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos nx, \qquad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx dx.$$

Для нечетной функции $f(x) = -f(-x)$ ряд Фурье содержит только синусы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin nx, \qquad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Для периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ в интервале $[-l; l]$ ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right), \text{ где} \quad (6)$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx. \qquad (7)$$

При разложении функции $f(x)$ в ряд Фурье в интервале $[0; 2l]$ пределы интегралов в формулах (7) будут 0 и $2l$, а в случае произвольного интервала $[a; b]$ длины $2l$ эти пределы будут a и $a + 2l$.

Пример 5. Разложить данную функцию $f(x) = x + 5$ в ряд Фурье в интервале $(-5; 5)$. Построить графики функции $f(x)$ и частичных сумм $S_0(x)$, $S_1(x)$ ряда Фурье в указанном интервале.

Решение. Данная функция является ни четной и ни нечетной, поэтому вычислим ее коэффициенты Фурье по общим формулам (6) и (7):

$$a_0 = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x+5)dx = \frac{x^2}{10} + x\Big|_{-5}^{5} = 10,$$

$$a_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x+5)\cos\frac{\pi nx}{5}dx = \frac{1}{\pi n}\left[(x+5)\sin\frac{\pi nx}{5}\Big|_{-5}^{5} - \int_{-5}^{5}\sin\frac{\pi nx}{5}dx\right] = \frac{5}{\pi^2 n^2}\cos\frac{\pi nx}{5}\Big|_{-5}^{5} = 0$$

$$b_n = \frac{1}{5}\int_{-5}^{5}(x+5)\sin\frac{\pi nx}{5}dx = \frac{1}{\pi n}\left[-(x+5)\cos\frac{\pi nx}{5}\Big|_{-5}^{5} + \int_{-5}^{5}\cos\frac{\pi nx}{5}dx\right] =$$

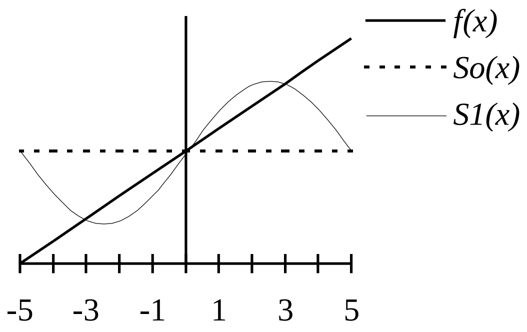
$$= \frac{-10\cos\pi n}{\pi n} + \frac{5}{\pi^2 n^2}\sin\frac{\pi nx}{5}\Big|_{-5}^{5} = \frac{-10\cos\pi n}{\pi n} = (-1)^{n+1}\frac{10}{\pi n}.$$ При вычислении интеграла применена формула интегрирования по частям. Искомое разложение данной функции в ряд Фурье в интервале $(-5; 5)$ имеет вид

$$x + 5 = 5 + 10\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\pi n}\sin\frac{n\pi x}{5} = 5 + \frac{10}{\pi}\left(\sin\frac{\pi x}{5} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{5} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{5} - \ldots\right).$$

На рис. 12 показаны графики функций $f(x) = x + 5$, $S_0(x) = 5$ и

$S_1(x) = 5 + \frac{10}{\pi}\sin\frac{\pi x}{5}$ в интервале $(-5; 5)$.

Рис. 12.



Методические указания к выполнению контрольной работы № 8:
«Теория вероятностей и математическая статистика»

I. Основные понятия теории вероятностей

Теория вероятностей есть математическая наука, изучающая закономерности в случайных явлениях.

Случайное явление – это такое явление, которое при неоднократном воспроизведении одного и того же опыта каждый раз протекает несколько по иному.

Рассмотрим примеры:

1) Одно и то же тело несколько раз взвешивается на аналитических весах; результаты повторных взвешиваний несколько отличаются друг от друга. Результат зависит от положения тела на чашечке весов, случайные вибрации аппарата, ошибки отсчета показаний прибора и т.д.

2) Самолет совершает полет на заданной высоте; теоретически он летит горизонтально, фактически полет совершается отклонениями центра массы самолета, связанным турбулентностью атмосферы.

При изучении явлений «точными науками» применяемых в физике, технике, механике, явление идеализируется, упрощается, выделяются самые главные, основные факторы; влиянием остальных, второстепенных факторов просто пренебрегают.

Практика показывает, что, наблюдая за массой однородных случайных явлений, мы обычно обнаруживаем в них вполне определенные закономерности, своего рода **устойчивости**, свойственные именно массовым случайным явлениям.

Например, если много раз подряд бросить монету, частота появления герба (отношение числа появившихся гербов к общему числу бросаний) постепенно стабилизируется, приближаясь к вполне определенному числу, равному 1/2, хотя каждое отдельное событие заранее неопределенное, случайное.

Закономерности, проявляются в этой массе, оказываются практически независимыми от индивидуальных особенностей отдельных случайных явлений, входящих в массу. Эти отдельные особенности в массе как бы взаимно погашаются, и средний результат массы случайных явлений оказывается практически уже не случайным. Именно эта устойчивость массовых случайных явлений и служит базой для применения вероятностных, статистических методов исследования.

II. Событие. Вероятность события

Каждая наука содержит ряд основных понятий, на которых она базируется. В геометрии – это понятия точки, прямой, линии. В механике - силы, массы, скорости и т.д. Основные понятия существуют и в теории вероятностей.

Это с**обытие**. Под событием в теории вероятностей понимается всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

Пример. а) появления герба при бросании монеты, б) появление трех гербов при трехкратном бросании монеты, в) появление туза при вынимании карты из колоды.

Эти события обладает той или иной степенью возможности. Чтобы количественно сравнить между собой события по степени их возможности, очевидно, нужно с каждым событием связать определенное число, которое тем больше, чем более возможно событие. Такое число мы назовем вероятностью события – это второе основное понятие теории вероятностей.

Вероятность события есть численная мера степени объективной возможности этого события.

Сравнивая между собой различные события по степени их возможности, мы должны установить единицу измерения. В качестве такой единицы примем **вероятность достоверного события**, т.е. событие, которое в результате опыта непременно должно произойти. Пример: выпадение не более 6 очков при бросании одной игральной кости.

Противоположностью по отношению к достоверному событию является **невозможное событие**, т.е. такое событие, которое в данном опыте не может произойти. Пример: появление 12 очков при бросании одной игральной кости. Вероятность невозможного события равна нулю.

Случайным событием является событие, которое в результате опыта может либо произойти, либо не произойти. Вероятность P случайного события находится в интервале [0, 1].

То или иное событие осуществляется при отдельной совокупности условий. Эту «совокупность условий» будем называть **испытанием**. Таким образом, событие будет рассматриваться как результат испытания.

Например, стрелок стреляет по мишени. Выстрел – это испытание. Попадание в мишень – это событие.

Несколько событий образуют **полную группу**, если в результате испытания появиться хотя бы одно из них, т. е. появление хотя бы одного из событий полной группы есть достоверное событие.

Если события, образующие полную группу, попарно несовместны, то в результате испытания появится одно и только одно из этих событий.

Например, стрелок произвел выстрел по цели. Обязательно произойдет одно из следующих двух событий: попадание, промах. Эти два несовместные события образуют полную группу.

События называют **равновозможными**, если есть основания считать, что ни одно из них не является более возможным, чем другое.

Например, появление герба и надписи при бросании монеты – равновозможные события; появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости – равновозможные события.

III. Классическое определение вероятности

Несколько событий называются **несовместными** в данном опыте, если никакие два из них не могут появиться вместе.

Например, выпадение герба и цифры при одном бросании монеты; попадание и промах при одном выстреле.

Существуют группы событий, обладающие тремя свойствами:
1) образуют полную группу; 2) несовместны; 3) равновозможны.

Например, появление герба и цифры при бросании монеты; появление числа очков 1, 2, … , 6 при бросании игральной кости.

События, образующие такую группу, называются **случаями** (шансами). Случай называется **благоприятным событием**, если появление этого случая влечет за собой появление данного события. Если опыт сводится к схеме случаев, то вероятность события A в данном опыте можно оценить по относительной доле благоприятных событий: $P(A) = m/n$, где $P(A)$ – вероятность события A, n – общее число случаев; m – число случаев благоприятных событию A. Так как $0 \le m \le n$, то $0 \le P(A) \le 1$. $\boldsymbol{P(A) = m/n}$ **– классическое определение вероятностей**.

Пример 1. В урне находится 2 белых и 3 черных шара. Из урны наугад вынимается один шар. Требуется найти вероятность того, что этот шар будет белый.

Решение. Пусть A событие, состоящее в появлении белого шара. Общее число случаев $n = 5$, число случаев, благоприятных событию A, $m = 2 \Rightarrow P(A) = 2/5$.

Пример 2. Набирая номер телефона. Абонент забыл одну цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Решение. Пусть A событие – набрана нужная цифра. Общее число элементарных исходов равно 10, т.е. $n = 10$. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу. Благоприятное событие лишь: $m = 1 \Rightarrow$
$P(A) = m/n = 1/10$.

IV. Основные формулы комбинаторики

Комбинаторика изучает количество комбинаций, подчиненных определенным условиям, которые можно составить из элементов заданного конечного множества. Приведем основные формулы комбинаторики:

Перестановками называются комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок: $Pn = n!$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots n$. Напомним, что $0! = 1$

Пример 1. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз.

Решение. $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Размещениями называются комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всех возможных размещений $A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \dfrac{n!}{(n-m)!}$

Пример 2. Сколько можно составить сигналов из 5 флажков различного цвета, взятых по 2.

Решение. $A_5^2 = 5(5-1) = 20$.

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний: $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$

Пример 3. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 5 деталей?

Решение. Искомое число способов $C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = \dfrac{5\cdot 4}{2} = 10$.

Числа размещений, перестановок и сочетаний связаны равенством:

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m.$$

При решении задач комбинаторики используют правила:

Правило суммы. Если некоторый объект *A* может быть выбран из совокупности объектов m способами, а другой объект *B* может быть выбран n способами, то выбрать либо *A*, либо *B*, можно $m + n$ способами.

Правило произведения. Если объект *A* можно выбрать из совокупности объектов m способами и после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать n способами, то пара объектов (*A***,** *B*) в указанном порядке может быть выбрана ($m - n$) способами.

Пример 4. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение. Пусть *B* – это событие благоприятное т.е. набраны нужные две цифры. Всего можно набрать столько различных чисел, сколько может быть составлено размещений из десяти цифр по две, т.е. $A_{10}^2 = 10\cdot 9 = 90$ Общее число исходов будет 90. Эти исходы несовместны, равновозможны и образуют полную группу => $P(B) = 1/90$.

Пример 5. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартные.

Решение. Общее число возможных элементарных исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10, т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов C_{10}^6.

Определим число исходов, благоприятствующих событию *A* (среди шести деталей 4 стандартные). Четыре стандартные детали можно взять из 7 стандартных C_7^4 способами, при этом остальные 6 – 4 = 2 детали должны быть нестандартными, 2 нестандартные детали из 10 – 7 = 3 детали можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятных событий равно произведению $C_7^4 \cdot C_3^2$.

Вероятность $P(A)$ равно отношению благоприятствующих событий, к числу всех исходов.

$$P(A)=\frac{C_7^4\cdot C_3^2}{C_{10}^6}=\frac{\frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!}}{\frac{10!}{6!\cdot 4!}}=\frac{7!\cdot 3!\cdot 6!\cdot 4!}{4!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 10!}=\frac{6!}{2!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 8\cdot 9\cdot 10}=\frac{360}{720}=\frac{1}{2}.$$

V. Статистическое и геометрическое определение вероятности

Классическое определение вероятности предполагает, что число элементарных исходов испытания конечно. На практике часто встречаются испытания, число возможных исходов которых бесконечно. В таких случаях классическое определение неприменимо. В качестве **статистической вероятности** события принимают относительную частоту или число, близкое к ней.

Относительной частотой события называют отношение числа испытаний, в которых событие появилось, к общему числу фактически произведенных испытаний. $\omega(A)=\dfrac{m}{n}$, где m – число появлений события, n – общее число испытаний.

Отличие вероятности от относительной частоты: вероятность вычисляют до опыта, а относительную частоту – после опыта.

Если опытным путем установлена относительная частота, то полученное число можно принять за приближенное значение вероятности.

Недостатком статистического определения является неоднозначность статистической вероятности.

Под **геометрической вероятностью** понимают вероятность попадания точки в область (отрезок, часть плоскости, фигуру…).

Пример 1. Партия из 20 деталей содержит одну нестандартную. Какова вероятность, что при случайной выборке 10 деталей из этой партии все они будут стандартные?

Решение. Число всех случайных способов выбора 10 деталей n = C_{20}^{10}, а число благоприятствующих событий m = C_{19}^{10}. Искомая вероятность

$$p = C_{19}^{10}/C_{20}^{10} = \frac{19!\cdot 10!\cdot(20-10)!}{10!\cdot(19-10)!\cdot 20!}=\frac{10}{20}=0.5$$

Пример 2. В партии из 200 изделий обнаружено 8 нестандартных. Определить относительную частоту появления стандартных изделий.

Решение. Относительная частоту появления стандартных изделий $\omega(A)=\dfrac{200-8}{200}=\dfrac{192}{200}=0{,}96$.

VI. Теорема сложения вероятностей несовместных событий

Суммой $\boldsymbol{A + B}$ двух событий A и B называют событие, состоящие в появлении события A, или событии B, или обоих этих событий.

Например, если из орудия произведены два выстрела и A – попадание при первом выстреле, B – попадание при втором выстреле, то $A + B$ – попадание при первом выстреле, или при втором выстреле, или в обоих выстрелах.

Суммой нескольких событий называется событие, которое состоит в появлении хотя бы одного из этих событий.

Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$\boldsymbol{P(A + B) = P(A) + P(B).}$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких парно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий.

$$\boldsymbol{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n).}$$

Пример 1. В урне 20 шаров: 8 красных, 6 синих, 6 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного, либо синего шара. Вероятность появления красного $P(A) = 8/20 = 2/5$, синего $P(B) = 6/20 = 3/10$. События A и B несовместимы, по теореме сложения

$$P(A + B) = 2/5 + 3/10 = 7/10.$$

Пример 2. В лотерее 1000 билетов: из них на один билет падает выигрыш 500 руб, на 10 билетов – выигрыш по 100 руб, на 80 билетов – 20 руб, на 100 билетов – 8 руб, остальные невыигрышные. Найти вероятность выигрыша не менее 20 руб при покупке 1 билета.

Решение. Событие A – выиграть не менее 20 руб. Событие A может осуществиться, если наступит одно из несовместных событий: A_1 – выигрыш 20 руб, A_2 – 100 руб, A_3 – 500 руб. События несовместимы, следовательно, $A = A_1 + A_2 + A_3$. По теореме сложения вероятностей несовместных событий

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 50/1000 + 10/1000 + 1/1000 = 0{,}061.$$

Теорема. Сумма вероятностей событий A_1, A_2, … , A_n образующих полную группу, равна единице: $P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1$**.**

Пример 3. Круговая мишень состоит из трех зон: I, II, III. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле – 0,15, во вторую – 0,23, в третью – 0,17. Найти вероятность промаха.

Решение. Событие A – промах, противоположное событие $\bar{A}$ – попадание. Событие $\bar{A}$ может осуществиться, если наступит одно из несовместных событий: A_1 – попадание в первую зону, A_2 – во вторую, A_3 – в третью. События несовместимы, следовательно $\bar{A} = A_1 + A_2 + A_3$. По теореме сложения:

$$P(\bar{A}) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55.$$

Событие A и $\bar{A}$ образуют полную группу, следовательно, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 0{,}45$.

Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

VII. Теорема умножения вероятностей

Произведением двух событий A и B называют событие AB, состоящее в совместном появлении этих событий. *Например*, если A – деталь годная, B – деталь стальная, то AB – деталь годная и стальная.

Произведением нескольких событий называют событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий. *Например*, если A, B и C – появление «герба» в первом, во втором и третьем бросаниях монеты, то ABC – выпадение «герба» во всех трех испытаниях.

Условной вероятностью $P_A(B)$ называют вероятность события B, вычисленную в предположении, что событие A уже наступило и выражается по формуле

$$P_A(B) = P(AB)/P(A).$$

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)\cdot P_A(B).$$

Следствие. Вероятность совместного появления нескольких событий равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятность каждого последующего события вычисляется в предположении, что все предыдущие события уже появились:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P_{A1}(A_2)\cdot P_{A1A2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A1A2\ldots An\text{-}1}(A_n).$$

Для трех событий $P(ABC) = P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)$. Порядок, в котором расположены события, может быть выбран любым

$$P(ABC) = P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C) = P(B)\cdot P_B(A)\cdot P_{BA}(C) = P(C)\cdot P_C(B)\cdot P_{CB}(A).$$

Пример. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Событие A_1 – извлечение белого шара при первом испытании, A_2 – извлечение белого шара при втором испытании. Эти события совместны, следовательно извлечение двух белых шаров $A = A_1\cdot A_2$. Всего в урне 5 шаров. Вероятность извлечение белого шара при первом испытании $P(A_1) = 2/5$, вероятность извлечение белого шара при втором испытании при условии, что при первом испытании был извлечен белый шар $P_{A1}(A_2) = 1/4$. По теореме умножения совместных событий $P(A) = P(A_1A_2) = P(A_1)P_{A1}(A_2) = (2/5)\cdot(1/4) = 0{,}1$.

VIII. Независимые события. Теорема умножения для независимых событий

Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е.

$$P_A(B) = P(B)$$

Если событие B не зависит от события A, то и событие A не зависит от события B.

Теорема. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Несколько событий называют попарно независимыми, если каждые два из них независимы.

События A, B, C попарно независимы, если A и B, A и C, B и C независимы.

Несколько событий называют независимыми в совокупности (или просто независимыми), если независимы каждые два из них и независимы каждое событие и все возможные произведения остальных.

Следствие 1. Вероятность совместного появления нескольких независимых событий, независимых в совокупности, равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n).$$

Следствие 2. Если события A_1, A_2, … , A_n независимы, то противоположные им события $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, …, $\bar{A}_n$ так же независимы.

Пример. Производится три выстрела по одной и той же мишени. Вероятность попадания при первом, втором и третьем выстрелах равна $P_1 = 0{,}4$; $P_2 = 0{,}5$; $P_3 = 0{,}7$. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов произойдет ровно одно попадание.

Решение. Событие A – ровно одно попадание в мишень; A_1, A_2, A_3 – попадание при первом, втором и третьем выстрелах соответственно; $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$, $\bar{A}_3$ – промах при первом, втором и третьем выстрелах соответственно. Событие A может наступить, если первый стрелок попал, а второй и третий не попали $A_1\bar{A}_2\bar{A}_3$; если второй стрелок попал, а первый и третий не попали $\bar{A}_1 A_2\bar{A}_3$; если третий стрелок попал, а первый и второй не попали $\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3$:

$$A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1 A_2\bar{A}_3 + \bar{A}_1\bar{A}_2 A_3.$$

Искомая вероятность

$P(A) = P(A_1\bar{A}_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2 A_3)$;

$P(A) = P(A_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3) + P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(A_3)$;

$P(A) = 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}06 + 0{,}09 + 0{,}21 = 0{,}36.$

IX. Вероятность появления хотя бы одного события

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из независимых событий A_1, A_2, … , A_n, равна разности между единицей и произведением вероятностей противоположных событий $\bar{A}_1$, $\bar{A}_2$,…, $\bar{A}_n$:

$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n)$.

Следствие. Если событие A_1, A_2, … , A_n имеют одинаковую вероятность, равную p, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий:

$$P(A) = 1 - q^n,$$

где q – вероятность противоположного события.

Пример. В типографии имеется 3 машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Решение. Событие A – машина работает, противоположное событие $\bar{A}$ – машина не работает. Эти события образуют полную группу.

$$p + q = 1, \quad q = 1 - p = 0{,}2, \qquad P(A) = 1 - q^n = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992.$$

X. Теорема сложения вероятностей совместных событий

Два события называют **совместными**, если появление одного из них не исключает появление другого в одном и том же опыте.

Теорема. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Замечание 1. Если два события *независимы*, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Замечание 2. Если два события *зависимы*, то:

$$P(A + B)=P(A) + P(B) - P(A)PA(B).$$

Замечание 3. Если два события *несовместимы*, то:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Пример. Вероятность попадания в цель при стрельбе первого и второго орудий соответственно равны $P1 = 0{,}8$, $P2 = 0{,}9$. Найти вероятность попадания при одновременном залпе (из обоих орудий) хотя бы одним из орудий.

Решение. Рассмотрим два способа решения.

1. По условию события A (попадание первого орудия) и B (попадание второго орудия) совместны и независимы. Вероятность того, что оба орудия попали

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B) = 0{,}8\cdot 0{,}9 = 0{,}72.$$

Вероятность попадания при одновременном залпе хотя бы одним из орудий

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0{,}8 + 0{,}9 - 0{,}72 = 1{,}7 - 0{,}72 = 0{,}98.$$

2. Так как события A и B независимы, то вероятность появления хотя бы одного из этих событий вычислим по формуле

$P = 1 - q_1q_2$,

где q_1 и q_2 вероятности событий, противоположных событиям A и B

$$q_1 = 1 - 0{,}8 = 0{,}2, \quad q_2 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1.$$

Вероятность появления хотя бы одного события:

$$P = 1 - q_1q_2 = 1 - 0{,}2\cdot 0{,}1 = 1 - 0{,}02 = 0{,}98.$$

XI. Формула полной вероятности

Теорема. Вероятность события A, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий B_1, B_2, …, B_n, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события A:

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + ... + P(B_n)P_{Bn}(A).$$

Пример. Имеется две группы людей. Вероятность того, что человек из первой группы будет партийный, равна 0,4, а второй – 0,6. Найти вероятность того, что выбранный наудачу человек является партийным.

Решение. Человек может быть выбран либо из первой группы (событие B_1), либо из второй группы (событие B_2). Вероятность того, что человек выбран из первого группы $P(B_1) = 0{,}5$, из второй – $P(B_2) = 0{,}5$.

Условная вероятность выбора из первой группы партийного $P_{B1}(A) = 0{,}4$, из второй – $P_{B1}(A) = 0{,}6$.

Вероятность выбора на удачу партийного человека вычислим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) = 0{,}5\cdot 0{,}4 + 0{,}5\cdot 0{,}6 = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5.$$

XII. Вероятность гипотез. Формулы Бейса

Пусть событие A может наступить при условии появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, ..., B_n$, образующих полную группу.

Поскольку заранее не известно, какое из этих событий наступит, их называют **гипотезами.**

Вероятность появления события A определяется по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + ... + P(B_n)P_{Bn}(A).$$

Допустим, что произведено испытание, в результате которого появилось событие A. Выясним, как изменились вероятности гипотез после того, как появилось событие A.

По теореме умножения имеем $P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{\text{B}1}(A)$. Выражая $P_A(B_1)$, получим $P_A(B_1) = P(B_1)P_{B1}(A)/P(A)$. Используя формулу полной вероятности, получим

$$P_A(B_1) = P(B_1)P_{B1}(A)/\{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + ... + P(B_n)P_{Bn}(A)\}.$$

По аналогии

$$P_A(B_i) = P(B_i)P_{Bi}(A)/\{P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + ... + P(B_n)P_{Bn}(A)\}.$$

Полученные формулы называют формулами Бейса (по имени английского математика).

Формулы Бейса позволяют переоценить вероятность гипотез после того, как становится известным результат испытания, в итоге которого появилось событие A.

Пример. Для участия в спортивных студенческих соревнованиях, выделено из первой группы – 4, из второй – 6, из третьей – 5 студентов. Вероятности того, что студент первой, второй и третьей группы попадёт в сборную института, равны соответственно 0,9, 0,7 и 0,8. Наудачу выбранный студент в итоге соревнования попал в сборную. Какой группе вероятнее всего принадлежит этот студент?

Решение. Всего 15 студентов. Вероятность выбора из первой группы $P(B_1)$ равна 4/15; из второй группы $P(B_2)$ равна 6/15; из третьей группы $P(B_3)$ равна 5/15.

Вероятность попадания в сборную $P(A)$ вычислим по формуле полной вероятности:

$P(A) = P(B_1)P_{B1}(A) + P(B_2)P_{B2}(A) + P(B_3)P_{B3}(A)$;

$P(A) = (4/15)\cdot 0,9 + (6/15)\cdot 0,7 + (5/15)\cdot 0,8 = 11,8/15 = 59/75$.

Найдём вероятность того, что выбранный студент попал в сборную из первой группы: $PA(B_1) = P(AB_1)/P(A) = P(B_1)P_{B1}(A)/P(A) = (4/15)\cdot 0,9/(59/75) = 18/59$;
из второй $PA(B_2) = (6/15)\cdot 0,7/(59/75) = (4,2/15)\cdot(75/59) = 21/59$;
из третьей $PA(B_3) = (5/15)\cdot 0,8\cdot(75/59) = 20/59$.

Ответ: вероятнее всего студент принадлежит второй группе.

XIII. Формула Бернулли

Если происходит несколько испытаний, причем вероятность события A в каждом испытании не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называют **независимыми относительно события *A*.**

Пусть производиться n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появиться либо не появиться. Вероятность события в каждом испытании одна и та же, равная p. Вероятность ненаступления события в каждом испытании $q = 1 - p$.

Вычислим вероятность $P_n(k)$ того, что при n испытаниях событие A осуществляется ровно k раз и не осуществляется $n - k$ раз по формуле Бернулли:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

где $p^k q^{n-k}$ – умножение вероятностей независимых событий; C_n^k – столько можно составить сочетаний из n элементов и k элементов.

Пример. В цехе 6 моторов. Для каждого мотора вероятность того, что он в данный момент включен, равна 0,8. Найти вероятность того, что в данный момент: а) включено 4 мотора; б) включены все моторы; в) выключены все моторы.

Решение. 1) $P_6(4) = C_6^4 p^4 q^2 = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!} 0,8^4 0,2^2 = \dfrac{4!\cdot 5\cdot 6}{4!\cdot 2!} 0,8^4 0,2^2 = 0,24576$;

2) $P_6(6) = C_6^6 p^6 q^0 = \dfrac{6!}{6!\cdot 0!} 0,8^6 0,2^0 = 0,8^6 = 0,262144$;

3) $P_6(0) = C_6^0 p^0 q^6 = \dfrac{6!}{0!\cdot 6!} 0,8^0 0,2^6 = 0,2^6 = 0,000064$.

XIV. Локальная теорема Лапласа

Пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно трудно, т.к. формула требует выполнения действий над очень большими числами.

Например, если $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 40$, $k = 20$, то вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществляется ровно k раз и не осуществляется $n - k$ раз $P_{40}(20) = C_{40}^{20} p^{20} q^{20} = \dfrac{40!}{20!\cdot 20!} 0{,}1^{20} 0{,}9^{20}$. При вычислении можно пользоваться специальными таблицами логарифмов факториалов, но из-за округлений в итоге окончательный результат может значительно отличаться от истинного.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность p появления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k)$ того, что событие A появиться в n испытаниях ровно k раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n) значению функции:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \quad \text{где } x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}.$$

Функция $\varphi(x)$ четная: $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Пример. Найти вероятность того, что при 400 испытаниях событие наступит ровно 104 раза, если вероятность его появления в каждом испытании равна 0,2.

Решение. По условию $k = 104$, $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$. Тогда

$$x = \frac{104 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 3,$$

$$P_{400}(104) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(x) = \frac{1}{8} \varphi(3) \approx \frac{1}{8} \cdot 0{,}0044 = 0{,}00055.$$

Значение функции $\varphi(3)$ нашли по таблице приложения 1.

XV. Интегральная теорема Лапласа

Теорема. Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от нуля и единицы, то вероятность $P_n(k_1, k_2)$ того, что событие A появится в n испытаниях от k_1 до k_2 раз ($k_1 \le m \le k_2$), приближенно равна определенному интегралу:

$$P_n(k_1; k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz, \quad \text{где } x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}};\ \ x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Интегральную теорему Лапласа иногда записывают в форме

$$P\left(x_1 \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le x_2 \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-z^2/2} dz.$$

При решении используют таблицу для функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-z^2/2} dz$.

$$P_n(k_1; k_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{0} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_2} e^{-z^2/2} dz = \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x_1} e^{-z^2/2} dz +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x_2} e^{-z^2/2}dz = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \quad \text{где} \quad x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}; \quad x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Функция $\Phi(x)$ нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример. Вероятность поражения мишени стрелком при одном выстреле равна 0,75. Найти вероятность того, что при 100 выстрелах мишень будет поражена:

а) не менее 70 и не более 80 раз; б) не более 70 раз.

Решение.

а) По условию $k_1 = 70$, $k_2 = 80$. Тогда

$$x_2 = \frac{80 - 100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \approx 1{,}1547, \; x_1 = \frac{70 - 100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \approx -1{,}1547,$$

$$P_{100}(70;80) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1{,}1547) - \Phi(-1{,}1547) = 2\Phi(1{,}1547).$$

Значение функции Лапласа находим по таблице приложения 2. В таблице даны значения $\Phi(1{,}15) = 0{,}3749$ и $\Phi(1{,}16) = 0{,}3770$. В качестве ответа можно взять любое из этих значений или их среднеарифметическое:

$$P_{100}(70;80) \approx 2\Phi(1{,}1547) \approx 2(\Phi(1{,}15) + \Phi(1{,}16))/2 = 0{,}7519.$$

б) По условию $k_1 = 0$, $k_2 = 70$. Тогда

$$x_1 = \frac{-100\cdot 0{,}75}{\sqrt{100\cdot 0{,}75\cdot 0{,}25}} \approx -17{,}32, \; x_2 \approx -1{,}1547,$$

$$P_{100}(0;70) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(-1{,}1547) - \Phi(-17{,}32) = \Phi(17{,}32) - \Phi(1{,}1547).$$

Значение функции Лапласа находим по таблице приложения 2:

$$P_{100}(0;70) \approx 0{,}5 - 0{,}37595 = 0{,}12405.$$

XVI. Вероятность отклонения относительной частоты от постоянной вероятности в независимых испытаниях

Найдем вероятность того, что отклонения относительной частоты m/n от постоянной вероятности p по абсолютной величине не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$, т.е. найдем вероятность того, что осуществляется неравенство:

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon.$$

Раскроем модуль $-\varepsilon \le \frac{m}{n} - p \le \varepsilon$ или $-\varepsilon \le \frac{m - np}{n} \le \varepsilon$. Умножим эти неравенства на множитель $\sqrt{\frac{n}{pq}}$: $-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} \le \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \le \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Используя теорему Лапласа, получим:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Пример 1. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний $p = 0{,}75$. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,001.

Решение. $\varepsilon = 0{,}001$, $p = 0{,}75$,

$$P(|m/n - p| \le \varepsilon) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{n/(pq)}\right) = 2\Phi\left(0{,}001\sqrt{\frac{10000}{0{,}75 \cdot 0{,}25}}\right) \approx 2\Phi(0{,}23) \approx 0{,}182 \cdot$$

Пример 2. Сколько раз надо бросить монету, чтобы с вероятностью 0,6 можно было ожидать, что отклонение относительной частоты появлений герба от вероятности $p = 0{,}5$ окажется по абсолютной величине не более 0,01?

Решение.

$2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\dfrac{n}{pq}}\right) = 0{,}6$, $2\Phi\left(\dfrac{0{,}01}{0{,}5}\sqrt{n}\right) = 0{,}6$, $\Phi\left(0{,}02\sqrt{n}\right) = 0{,}3$. По таблице находим $0{,}02\sqrt{n} \approx 0{,}84$, $\sqrt{n} \approx 42$, $n \approx 1764$ раза.

XVII. Случайная величина. Законы распределения дискретных и непрерывных случайных величин

Случайной называют величину, которая в результате испытания примет одно и только одно возможное значение, неизвестное заранее какое именно.

Будем обозначать случайные величины прописными буквами X, Y, Z, и их возможные значения – соответствующими строчным буквами – x, y, z.

Дискретной называют случайную величину, которая принимает отдельные, возможные значения с определенной вероятностью. Число возможных значений дискретной случайной величины может быть конечным или бесконечным.

Непрерывной называют случайную величину, которая может принимать все значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между возможными значениями и их вероятностями.

Способы задания: таблично, аналитически, графически.

1). С помощью таблицы.

X	x_1	x_2	…	x_n	- возможные значения
P	p_1	p_2	…	p_n	- вероятность возможных значений

События $x1$, $x2$, …, xn - образуют полную группу, т.е. $p1 + p2 + \ldots + pn = 1$.

Такую таблицу называют **рядом распределения** случайной величины X.

2). Графическое изображение.

Для наглядности точки соединяются отрезками прямых. Такая фигура называется **многоугольником распределения**.

Пример. Игральная кость брошена 3 раза. Написать закон распределения числа появлений шестерки.

Решение. Вероятность появления шестерки при одном бросании $p = 1/6$, вероятность непоявления шестерки $q = 1 - p = 5/6$.

При трех бросаниях игральной кости шестерка может появиться либо 3 раза, либо 2 раза, либо 1 раз, либо совсем не появиться. Таким образом, возможные значения X таковы: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$. Найдем вероятности этих возможных значений по формуле Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

$$P_3(0) = C_3^0\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}, \quad P_3(1) = C_3^1\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216},$$

$$P_3(2) = C_3^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}, \quad P_3(3) = C_3^3\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}.$$

Искомый закон распределения:

X	0	1	2	3
P	125/216	75/216	15/216	1/216

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие A может появится либо не появиться, причем вероятность наступления события в каждом испытании постоянна и равна p, то закон распределения вероятностей определяется формулой Бернулли: $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$, которое называют **биноминальным распределением вероятностей**.

Запишем биноминальный закон в виде таблицы:

X	n	$n-1$	…	k	…	0
P	p^n	$np^{n-1}q$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	q^n

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равно p и n велико, то закон распределения вероятностей массовых (n велико) и редких (p мало) событий определяется:

$P_n(k) = \lambda^k e^{-\lambda}/k!$, где $\lambda = pn$.

Эта формула выражает **закон распределения Пуассона**.

Пример. Прядильщица обслуживает 1000 веретен. Вероятность обрыва нити на одном веретене в течение 1 минуты равна 0,004. Найти вероятность того, что в течение 1 минуты обрыв произойдет на пяти веретенах.

Решение. По условию $n = 1000$, $p = 0{,}004$, $k = 5$. Найдем λ: $\lambda = pn = 4$.

По формуле Пуассона искомая вероятность приближенно равна

$P_{1000}(5) = 4^5 e^{-4}/5! \approx 0{,}15$.

Рассмотрим события, которые наступают в случайные моменты времени.

Потоком событий называют последовательность событий, которые наступаю в случайные моменты времени.

Интенсивность потока λ называют среднее число событий, которые появляются в единицу времени.

Если постоянная интенсивность потока известна, то вероятность появления k событий простейшего потока за время длительностью t определяется формулой Пуассона

$$P_t(k) = (\lambda t)^k e^{-\lambda t}/k!.$$

Простейшим (пуассоновским) называют поток событий, который обладает свойствами стационарности, отсутствия последействия и ординарности.

Свойство стационарности характеризуется тем, что вероятность появления k событий на любом промежутке времени зависит только от числа k и от длительности t промежутка и не зависит от начала его отсчета; при этом промежутки времени предполагаются непересекающимися.

Свойство отсутствия последствия характеризуется тем, что вероятность появления k событий за промежуток времени длительности t есть функция, зависящая только от k и t.

Свойство ординарности характеризуется тем, что появление двух и более событий за малый промежуток времени практически невозможно, т.е. за бесконечно малый промежуток времени может появиться не более одного события.

Пример. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в 1 минуту, равно 5. найти вероятность того, что за две минуты поступит:

а) три вызова; б) менее трех вызовов.

Решение. Будем предполагать, что поток вызовов является простейшим.

а) По условию $\lambda = 5$, $t = 2$, $k = 3$. Вероятность того, что за две минуты поступит два вызова найдем по формуле Пуассона:

$$P_2(3) = 10^3 e^{-10}/3! \approx 0{,}0076.$$

б) События не поступило ни одного вызова, поступил один вызов и поступило два вызова несовместны, поэтому по теореме сложения искомая вероятность того, что за две минуты поступит менее трех вызовов, равна

$$P_2(k < 3) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) = e^{-10} + 10e^{-10} + 10^2 e^{-10}/2! \approx 0{,}0028.$$

XVIII. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называют сумму произведений всех ее возможных значений на их вероятности.

Пусть случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	x_1	x_2	…	x_n
P	p_1	p_2	…	p_n

Тогда математическое ожидание $M(X)$ определяется равенством:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Математическое ожидание дискретной случайной величины есть неслучайная величина (постоянная).

Математическое ожидание приближенно равно (тем точнее, чем больше число испытаний) среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины:

$$\overline{X} \approx M(X).$$

На числовой оси возможные значения расположены слева и справа от математического ожидания. Поэтому его часто называют **центром распределения**.

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно самой постоянной:
$$M(C) = C.$$
2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания:
$$M(CX) = C \cdot M(X).$$
3. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:
$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y).$$
4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме математических ожиданий слагаемых:
$$M(X + Y) = M(X) + M(Y).$$

Теорема 1. Математическое ожидание $M(X)$ числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытания при условии, что в каждом испытании вероятность появления события A равна p:
$$M(X) = p \cdot n.$$

Пример 1. Найти математическое ожидание числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 20 билетов, причем вероятность выигрыша по одному билету равна 0,3.

Решение. Число независимых испытаний $n = 20$. В каждом испытании вероятность выигрыша $p = 0,3$. Искомая математическое ожидание:
$$M(X) = 20 \cdot 0,3 = 6.$$

Пример 2. Найти математическое ожидание произведения числа очков, которые могут выпасть при одном бросании двух игральных костей.

Решение. Обозначим число очков, которое может выпасть на первой кости, через X и на второй – через Y. Запишем закон распределения числа очков для первой игральной кости

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Найдем математическое ожидание числа очков, которые могут выпасть на первой кости:
$$M(X) = \frac{1}{6} \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{21}{6} = 3,5.$$

Очевидно, что и $M(Y) = 3,5$.

Искомое математическое ожидание
$$M(X1 \cdot X2) = M(X1) \cdot M(X2) = 3,5 \cdot 3,5 = 12,25.$$

Переход от $M(X)$ к $M(X^2)$, а тем более к $M(X^3)$ и $M(X^4)$ позволяет лучше учесть влияние на математическое ожидание того возможного значения, которое велико и имеет малую вероятность. Для этого используют начальные и центральные моменты.

Начальным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины X^k: $\nu_k = M(X^k)$.

Центральным моментом порядка k случайной величины X называют математическое ожидание величины $(X - M(X))^k$: $\mu_k = M[(X - M(X))^k]$.

В частности,

$$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,\ \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,\ \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Математическое ожидание отклонения равно нулю:

$$M\,(X - M(X)) = \mu_1 = 0.$$

Поскольку математическое ожидание отклонения равно нулю, то для определения степени рассеивания случайной величины вокруг её математического ожидания выделяют среднее значение квадрата отклонения.

Дисперсией (рассеянием) дискретной случайной величины называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания:

$$D(X) = M[(x - M(X))^2] = \mu_2\,.$$

Теорема 3. Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины X и квадратом её математического ожидания:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Свойства дисперсии

1) Дисперсия постоянной величины C равна 0: $D(C) = 0$.

2) Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат: $D(CX) = C^2D(X)$.

3) Дисперсия суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсии этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$.

4) Дисперсия разности двух независимых случайных величин равна сумме дисперсии этих величин: $D(X - Y) = D(X) + D(Y)$.

Пример 3. Найти дисперсию случайных величин, зная закон её распределения:

X	0,1	2	10	20
P	0,4	0,2	0,15	0,25

Решение. Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$M(X) = 0{,}1\cdot0{,}4 + 2\cdot0{,}2 + 10\cdot0{,}15 + 20\cdot0{,}25 = 0{,}04 + 0{,}4 + 1{,}5 + 5 = 6{,}94$.

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$M(X^2) = 0{,}1^2\cdot0{,}4 + 2^2\cdot0{,}2 + 10^2\cdot0{,}15 + 20^2\cdot0{,}25 = 0{,}004 + 0{,}8 + 15 + 100 = 115{,}804$.

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 115{,}804 - (6{,}94)^2 = 67{,}6404.$$

Пример 4. Дискретная случайная величина X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_1 < x_2$. Найти закон распределения величины X, если известно, что $M(X) = 1{,}4$, $D(X) = 0{,}24$ и вероятность p_1 того, что X примет значение x_1 равна 0,6.

Решение. Сумма вероятностей всех возможных значений X равна единице, поэтому вероятность p_2 равна 1 – 0,6 = 0,4. Итак, закон распределения случайной величины X имеет вид:

X	x_1	x_2
P	0,6	0,4

Для отыскания x_1 и x_2 составим два уравнения. Учитывая, что по условию $M(X) = 1{,}4$, запишем первое из уравнений: $0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 = 1{,}4$. ($a$)

Принимая во внимание, что по условию $D(X) = 0{,}24$, используя формулу $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$, напишем второе уравнение: $0{,}24 = 0{,}6x_1^2 + 0{,}4x_2^2 - 1{,}4^2$, или $0{,}6x_1^2 + 0{,}4\,x_2^2 = 2{,}2$. ($b$)

Решив систему уравнений (a) и (b), найдем два решения: 1) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ и 2) $x_1 = 1{,}8$, $x_2 = 0{,}8$. По условию $x_1 < x_2$, поэтому задаче удовлетворяет только первое решение. Таким образом, искомый закон распределения:

X	1	2
P	0,6	0,4

Теорема 4. Дисперсия числа появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность p появления события постоянна, равна

$$D(X) = n \cdot q \cdot p.$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называют квадратный корень из дисперсии: $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$. Размерность $\sigma(X)$ совпадает с размерностью X.

Теорема 5. Среднее квадратическое отклонение суммы конечного числа взаимно независимых случайных величин равно:

$$\sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sqrt{\sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)}.$$

Пример 5. Испытывается устройство, состоящее из трёх независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов таковы: $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}6$. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение числа отказавших приборов.

Решение. Вероятность того, что ни один прибор не откажет:

$$P(0) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

Вероятность того, что один прибор откажет:

$$P(1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3;$$

$$P(1) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}6 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}38.$$

Вероятность того, что два прибора откажут:

$$P(2) = p_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + p_1 \cdot q_2 \cdot p_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot p_3;$$

$$P(2) = 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 + 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}6 = 0{,}08 + 0{,}12 + 0{,}18 = 0{,}38$$

Вероятность того, что три прибора откажут:

$$P(3) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0{,}5 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4 = 0{,}12.$$

Проверка: $P = 0{,}12 + 0{,}38 + 0{,}38 + 0{,}12 = 1$.

Запишем закон распределения числа отказавших приборов:

X	0	1	2	3
P	0,12	0,38	0,38	0,12

Найдем математическое ожидание случайной величины X:

$$M(X) = 0 + 0{,}38 + 0{,}76 + 0{,}36 = 1{,}5.$$

Найдем математическое ожидание случайной величины X^2:

$$M(X^2) = 0 + 0{,}38 + 1{,}52 + 1{,}08 = 2{,}98.$$

Найдем дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 2{,}98 – 2{,}25 = 0{,}73.$$

Найдем среднее квадратичное отклонение числа отказавших приборов:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}73} \approx 0{,}85.$$

XIX. Функция распределения случайной величины

Функцией распределения случайной величины называют функцию $F(x)$, определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньше x, т.е.

$$F(x) = P(X < x).$$

Геометрически $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина "Функция распределения" используют термин "Интегральная функция".

Случайную величину называют непрерывной, если её функция распределения есть непрерывная, кусочно - дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства функции распределения

1) Значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1]:

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2) $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 > x_1$.

3) Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключённое в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

4) Вероятность того, что непрерывная, случайная величина X примет одно определённое значение, равна нулю. Тем самым имеет смысл рассматривать вероятность попадания непрерывной случайной величины в интервал, пусть даже сколько угодно малый.

5) Если возможное значение случайной величины X принадлежит интервалу (a, b) ,то: $F(x) = 0$, при $x \le a$; $F(x) = 1$, при $x \ge b$.

6) Если возможное значение непрерывной случайной величины расположены на всей оси, то $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

График функции распределения

График функции распределения непрерывной случайной величины, возможные значения которой принадлежат интервалу (a, b)изображен на рис. 13.

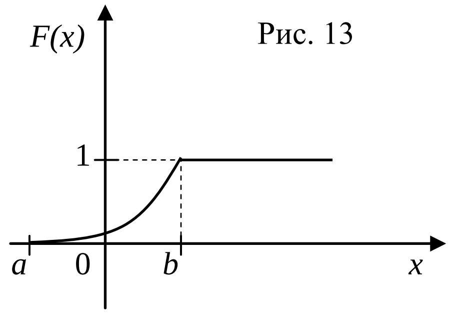


Рис. 13

График функции распределения дискретной случайной величины имеет ступенчатый вид. На рис. 14 изображен график функции распределения дискретной случайной величины X заданной таблицей распределения

X	x_1	x_2	x_3
p	p_1	p_2	p_3

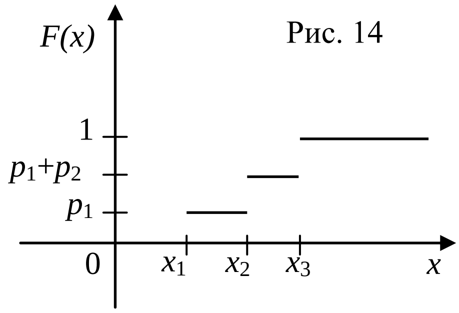


Рис. 14

Пример 1. Построить график функции

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad x\le 2, \\ x/2-1 & \text{при} \quad 2<x\le 4, \\ 1 & \text{при} \quad x>4. \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале (2; 3).

Решение. График функции изображен на рис. 15. Вероятность того, что случайная величина X примет значение, заключённое в интервале (2, 3), равна приращению функции распределения на этом интервале: $P(2 \le X < 3) = F(3) - F(2) = 1/2$.

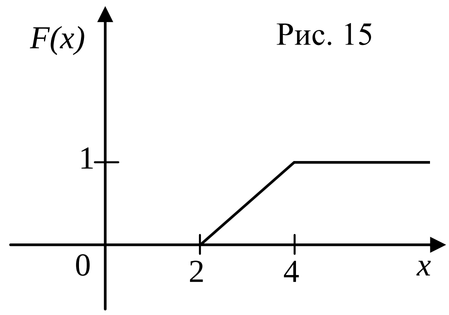


Рис. 15

XX. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины

Плотностью распределения вероятностей непрерывной, случайной величины X называют функцию $f(x)$ - первую производную от функции распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x),$$

т.е. функция распределения является первообразной для плотности распределения.

Для дискретной, случайной величины плотность распределения неприменима.

Т**еорема**. Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b) равна:

$$P(a < x < b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $f(x)$ - чётная функция, то $P(-a < x < a) = P(|x| < a) = 2\int_0^a f(x)dx.$

Зная плотность распределения $f(x)$, можно найти функцию распределения:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Свойства плотности распределения

1) Плотность распределения неотрицательная функция: $f(x) \geq 0$.

2) Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ равен единице: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

3) Если все возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (a, b), то $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Функция $f(x)$ определяет плотность распределения вероятности для каждой точки X, аналогично плотности массы в точки.

XXI. Числовые характеристики непрерывных случайных величин

Математическим ожиданием непрерывной, случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку $[a, b]$, называют:

$$M(X) = \int_{a}^{b} xf(x)dx.$$

Если возможные значения принадлежат всей оси Ox, то $M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$.

Дисперсией непрерывной случайной величины называют математическое ожидание квадрата её отклонения:

$$D(X) = \int_{a}^{b} (x - M(X))^2 f(x)dx; \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx.$$

Пример 1. Случайная величина X распределена на отрезке [2; 4] с плотностью вероятности $f(x) = kx^3$. Найти коэффициент k.

Решение. Все возможные значения случайной величины X принадлежат отрезку [2; 4]. Следовательно, $\int_{2}^{4} f(x)dx = 1$. Найдя определенный интеграл, $\int_{2}^{4} kx^3 dx = k\left.\frac{x^4}{4}\right|_{2}^{4} = 60k$, из уравнения $60k = 1$ получаем $k = \frac{1}{60}$.

Пример 2. Случайная величина задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0,\\ x/2 & \text{при} \quad 0<x\le 2,\\ 1 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей, математическое ожидание, дисперсию и вероятность попадания случайной величины в интервал (1/4; 1).

Решение. Найдем плотность распределения вероятностей $f(x)$. Для этого продифференцируем по x интегральную функцию распределения $F(x)$:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases}0 & \text{при} \quad x\le 0;\\ 1/2 & \text{при} \quad 0<x\le 2;\\ 0 & \text{при} \quad x>2.\end{cases}$$

Математическое ожидание $M(X)$ для непрерывной случайной величины находится по формуле $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx$, а так как $f(x)$ вне интервала (0; 2] принимает значение ноль, то $M(X) = \int\limits_0^2 x\cdot\frac{1}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_0^2 = 1.$

Дисперсию удобно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - M^2(X)$, то есть

$$D(X) = \int\limits_0^2 x^2\cdot\frac{1}{2}dx-\left(\int\limits_0^2 x\cdot\frac{1}{2}dx\right)^2=\left.\frac{x^3}{6}\right|_0^2-1=\frac{4}{3}-1=\frac{1}{3}.$$

Вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (1/4; 1] равна определенному интегралу в пределах от 1/4 до 1 от функции плотности распределения вероятностей:

$$P(1/4 < X < 1) = \int\limits_{1/4}^{1}\frac{1}{2}dx=\left.\frac{1}{2}x\right|_{1/4}^{1}=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}.$$

XXII. Закон равномерного распределения вероятностей

Распределение вероятностей называют **равномерным**, если на интервале $(a; b)$, которому принадлежат все возможные значения случайной величины X, плотность распределения сохраняет постоянное значение, а именно

$f(x)=\frac{1}{b-a}$; вне этого интервала $f(x) = 0$.

Математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной в интервале $(a; b)$, равно полусумме концов этого интервала $M(X) = (a + b)/2$.

График функции равномерного распределения $F(x)$ изображен на рис. 16(a), а график плотности распределения $f(x)$ – на рис. 16(b).

Рис. 16(a)

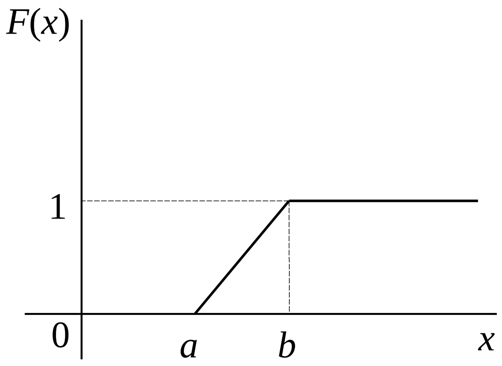
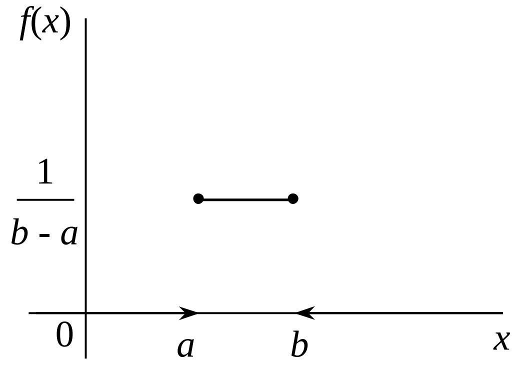


Рис. 16(b)



Пример. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины X, равномерно распределенной в интервале (1; 6).

Решение. Плотность вероятности равномерного распределения $f(x)=\dfrac{1}{b-a}=$ $=\dfrac{1}{6-1}=0{,}2$. Используем формулу $M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx$. Подставив $f(x)$ = 0,2, a = 1, b = 6, получим $M(X)=0{,}2\int\limits_1^6 xdx=0{,}1x^2\Big|_1^6=3{,}5$. Этот же результат можно получить, используя свойство равномерно распределенной случайной величины $M(X) = (a + b)/2 = (1 + 6)/2 = 3{,}5$.

Найдем дисперсию по формуле $D(X)=\int\limits_a^b x^2 f(x)dx-[M(X)]^2$,

$$D(X)=0{,}2\int\limits_1^6 x^2dx-[3{,}5]^2=0{,}2\frac{x^3}{3}\Bigg|_1^6-12{,}25=2\frac{1}{12}.$$

XXIII. Закон нормального распределения вероятностей

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение определяется двумя параметрами: a – математическим ожиданием, σ – средне квадратическим отклонением нормального распределения. График плотности нормального распределения (кривая Гаусса) для значений σ = 1, σ = 2, σ = 4 показан на рис. 17. Рассматривая эти кривые, видим, что чем меньше σ, тем максимум функции $f(x)$ больше, а рассеивание значений случайной величины относительно математического ожидания a меньше.

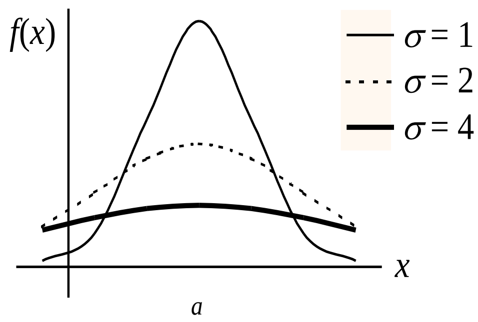
Вероятность того, что случайная величина, распределенная по нормальному закону, примет значение, принадлежащее интервалу (α; β), определяется формулой

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа.

Правило трех сигм. Если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения, а именно: $|X - a| < 3\sigma$.

Рис.17



Теорема Ляпунова (центральная предельная теорема). Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю суму ничтожно мало, то X имеет распределение близкое к нормальному.

Из этой теоремы следует, что нормально распределенные случайные величины широко распространены на практике.

При изучении распределений, отличных от нормального, возникает необходимость количественно оценить это различие. С этой целью вводят специальные характеристики, в частности асимметрию и эксцесс.

Асимметрией теоретического распределения называют отношение центрального момента третьего порядка к кубу среднеквадратического отклонения:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Если длинная часть кривой расположена правее моды $M_0(X)$ (точки максимума функции), то асимметрия положительна (рис. 18(а)), если слева – отрицательна (рис. 18(б)).

Рис.18(а)

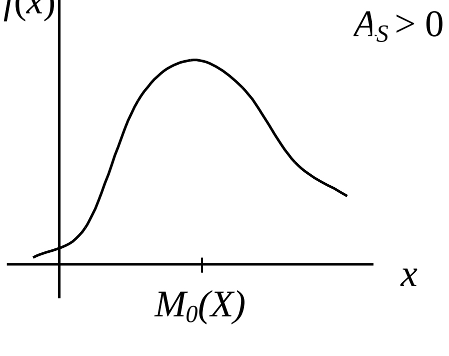
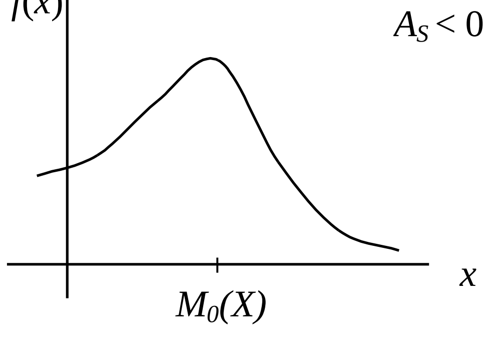


Рис.18(б)



Эксцессом теоретического распределения называют характеристику, которая определяется равенством $E_k = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$

Эксцесс нормального распределения равен нулю.

Если эксцесс некоторого распределения отличен от нуля, то кривая этого распределения отличается от нормальной кривой: если $E_k > 0$, то кривая имеет более высокую и острую вершину, чем нормальная кривая (рис.19(а)); если $E_k < 0$, то кривая имеет более низкую и плоскую вершину, чем нормальная кривая (рис.19(б)). При этом предполагается, что нормальное и теоретическое распределения имеют одинаковые математические ожидания и дисперсии.

Рис.19(а)

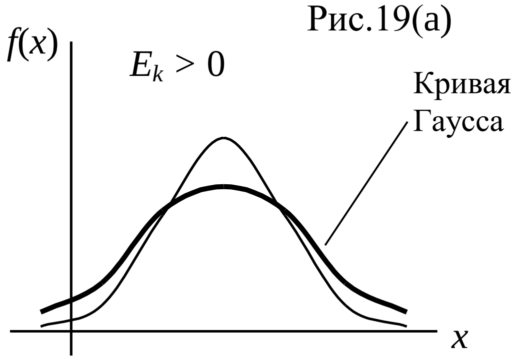
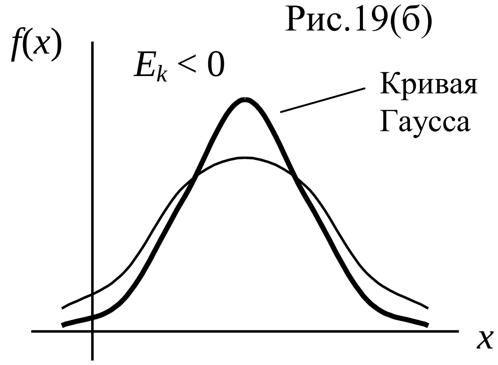


Рис.19(б)



Пример. Математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ нормально распределенной величины X соответственно равны 5 и 2. Найти вероятность попадания этой величины в заданный интервал (3; 8).

Решение. Воспользуемся формулой $P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\dfrac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\dfrac{\alpha - a}{\sigma}\right)$, где $\Phi(x)$ – функция Лапласа. Подставив $\alpha = 3$, $\beta = 8$, $a = 5$, $\sigma = 2$, получим $P(3 < X < 8) = \Phi(1{,}5) - \Phi(-1) = \Phi(1{,}5) + \Phi(1)$ с учетом того, что функция Лапласа $\Phi(x)$ нечетна: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. По таблице приложения находим: $\Phi(1{,}5) = 0{,}4332$, $\Phi(1) = 0{,}3413$. Искомая вероятность $P(3 < X < 8) = 0{,}7745$.

XXIV. Цепи Маркова

Цепью Маркова называют последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из n несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ полной группы. Причем условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s – м испытании наступит событие A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$), при условии, что в ($s - 1$) – м испытании наступило событие A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Однородной называют цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ (перехода из состояния i в состояние j) не зависит от номера испытания. Поэтому вместо $p_{ij}(s)$ пишут p_{ij}. Условную вероятность p_{ij} называют переходной вероятностью.

Матрицей перехода системы называют матрицу, которая содержит все переходные вероятности этой системы:

$$P_1 = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ . & . & . & . \\ p_{n1} & p_{n2} & . & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Сумма переходных вероятностей каждой строки матрицы перехода равна единице:

$$p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{in} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, \ (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Зная матрицу P_1, перехода из состояния в состояние за один шаг, можно найти вероятности перехода P_n из состояния в состояние за n шагов: $P_n = P^n$. В частности, при $n = 2$, имеем: $P_2 = P \cdot P = P^2$.

Пример. Задана матрица $P_1 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}$ вероятностей перехода цепи Маркова из состояния i ($i = 1, 2$) в состояние j ($j = 1, 2$) за один шаг. Найти матрицу P_2 перехода из состояния i в состояние j за два шага.

Решение. Матрица перехода за два шага P_2 находится по формуле $P_2 = P_1 \cdot P_1$: $P_2 = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}34 & 0{,}66 \\ 0{,}33 & 0{,}67 \end{pmatrix}$. Умножение матриц осуществляется по правилу: если $A \cdot B = C$, то $c_{ij} = (\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_j)$, где c_{ij} – элемент матрицы C, стоящий в i – й строке и j – м столбце, $(\boldsymbol{a}_i \boldsymbol{b}_j)$ – скалярное произведение i – й строки $\boldsymbol{a}_i$ первой матрицы на j – й столбец $\boldsymbol{b}_j$ второй матрицы.

XXV. Элементы математической статистики

Современная математическая статистика разрабатывает способы определения числа необходимых испытаний до начала исследования, то есть планирование эксперимента в ходе исследования, то есть последовательный анализ и решает многие другие задачи.

Задача математической статистики состоит в создании методов сбора и обработки статистических данных для получения научных и практических выводов.

Если требуется изучить совокупность большого числа однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака, характеризующего эти объекты, то в таких случаях случайно отбирают из всей совокупности ограниченное число объектов и подвергают их изучению. Например, если имеется партия деталей, то качественным признаком может служить стандартность деталей, а количественным – размер деталей.

Выборочной совокупностью или просто **выборкой** называют совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральной совокупностью называют совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объемом совокупности называют число объектов этой совокупности.

Например, из 100 деталей отобрано 10 деталей, то объем генеральной совокупности $N = 100$, а объем выборки $n = 10$.

Повторной называют выборку, при которой отобранный объект перед отбором следующего возвращается в генеральную совокупность.

Бесповторной называют выборку, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается.

Выборка должна правильно представлять пропорции генеральной совокупности. Это требование коротко формулируют так: выборка должна быть **репрезентативной**, то есть представительной.

Если объем генеральной совокупности достаточно велик, а выборка составляет лишь незначительную часть этой совокупности, то различие между повторной и бесповторной выборками стирается.

На практике применяют **различные способы отбора**, принципиально которые можно разделить на два вида:

1) Отбор, не требующий расчленения генеральной совокупности на части. Это простой случайный бесповторный отбор и простой случайный повторный отбор.

2) Отбор, при котором генеральная совокупность разбивается на части. Это типичный отбор, механический отбор и серийный отбор.

Простым случайным называют такой отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.

Типичным называют отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой её ”типической” части.

Типическим отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак заметно колеблется в различных типических частях генеральной совокупности.

Например, детали от разных станков.

Механическим называют отбор, при котором генеральную совокупность ”механически” делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект.

Например, если требуется отобрать 25% изготовленных деталей, то отбирают каждую 4-ую деталь.

Серийным называют отбор, при котором объекты отбирают из генеральной совокупности не по одному, а ”сериями”, которые подвергаются сплошному обследованию.

Серийным отбором пользуются тогда, когда обследуемый признак колеблется в различных сериях незначительно. На практике часто используется комбинированный отбор, при котором сочетаются указанные выше способы.

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка, причем x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 - n_2 раз, x_k - n_k и $\sum\limits_i n_i = n$ - объем выборки. Наблюдаемые значения x_i называют **вариантами**, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, - **вариационным рядом**.

Число наблюдений называют **частотами**, а их отношения к объему выборки $\frac{n_i}{n} = \omega_i$ - **относительными частотами**.

Статическим распределением выборки называют перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот.

В теории вероятностей под распределением понимают соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, а в математической статистике – соответствия между наблюдаемыми вариантами и их частотами или относительными частотами.

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называют функцию $F(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$: $F(x) = \frac{n_x}{n}$; где n_x - число вариант, меньших x; n - объем выборки.

Функцию распределения генеральной совокупности называют **теоретической функцией распределения.**

Различие между эмпирической и теоретическими функциями состоит в том, что теоретическая функция $F(x)$ определяет вероятность $X < x$, а эмпирическая функция $F^*(x)$ определяет относительную частоту этого же события.

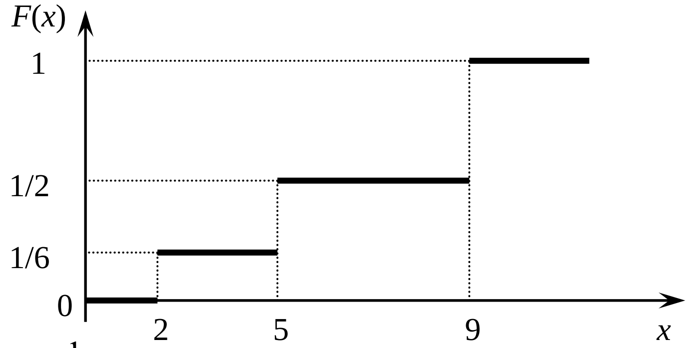
Пример 1. Построить эмпирическую функцию по данным распределения выборки:

Варианты x_i	2	5	9
Частоты n_i	10	20	30

Решение. Объем выборки $\sum n_i = 10 + 20 + 30 = 60$. При $x \le 2$ $F^*(x) = 0$;

при $2 < x \le 5$ $F^*(x) = \frac{10}{60} = \frac{1}{6}$; при $5 < x \le 9$ $F^*(x) = \frac{1}{2}$; при $x > 9$ $F^*(x) = 1$.

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{6}, & 2 < x \le 5 \\ \frac{1}{2}, & 5 < x \le 9 \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$



Для наглядности строят различные графики.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, …, $(x_к; n_к)$.

Полигоном относительных частот называют ломанную, отрезки которой соединяют точки $(x_1; \omega_1)$, $(x_2; \omega_2)$, …, $(x_к; \omega_к)$.

В случае непрерывного признака целесообразно строить гистограмму.

Гистограммой частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из пря моугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ (плотность частот). Площадь i – го частичного прямоугольника равна $\frac{h \times n_i}{h} = n_i$ - сумме частот вариант i –го интервала, а площадь гистограммы частот равна объему выборки.

Гистограммой относительных частот называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению $\frac{\omega_i}{h}$.

Статистической оценкой неизвестного параметра теоретического распределения называют функцию от наблюдаемых случайных величин.

Для того чтобы статистические оценки давали “хорошие” приближения оцениваемых параметров, они должны удовлетворять определенным требованиям. Если математическое ожидание статистических оценок равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки, то есть $M(\theta^*) = \theta$, то статистическую оценку θ^* называют **несмещенной.**

Смещенной называют оценку, математическое ожидание которой неравно ожидаемому параметру.

Статистическая оценка должна быть эффективной.

Эффективной называют статистическую оценку, которая при заданном объеме выборки имеет наименьшую возможную дисперсию.

При рассмотрении выборок большого объема к статистическим оценкам предъявляют требование состоятельности.

Состоятельное называют статистическую оценку, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру.

Если изучается дискретная генеральная совокупность относительно количественного признака X, то **генеральной средней** $\overline{x_r}$ называют среднее арифметическое значений признака генеральной совокупности.

Если все значения признака генеральной совокупности объема N различны, то $\overline{x_r} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{N}$

Если значения признака $x_1, x_2, \ldots, x_к$ имеют соответственно частоты N_1, $N_2, \ldots, N_к$, причем $N_1 + N_2 + \ldots + N_к = N$, $\overline{x_r} = \frac{(x_1 \times N_1 + x_2 \times N_2 + \ldots + x_k \times N_k)}{N}$

Выборочной средней $\overline{x_B}$ называют среднее арифметическое значение признака выборочной совокупности. Если n – объем выборки, то

$$\overline{x_B} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$ - если значения x_i - различны

Если значение признака $x_1, x_2, \ldots, x_к$ имеют соответственно частоты n_1, $n_2, \ldots, n_к$, то

$$\overline{x_B} = \frac{\sum n_i \times x_i}{n}$$

Если по нескольким выборкам достаточно большого объема из одной и той же генеральной совокупности будут найдены выборочные средние, то они будут приближенно равны между собой. В этом состоит **свойство устойчивости выборочных средних**.

Если все значения количественного признака X совокупности разбиты на несколько групп, то **групповой средней** называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих группе.

Общей средней $\overline{x}$ называют среднее арифметическое значений признака, принадлежащих всей совокупности.

Общая средняя равна средней арифметической групповых средних, взвешенной по объемам групп.

Пример 2. Найти общую среднюю совокупности, состоящую из двух групп:

Значение	1		2	
признаки	1	4	1	6
Частота	5	15	10	20
объем	5+15=20		10+20=30	

Решение. Найдем групповое среднее

$$\overline{x_1} = \frac{(1\times 5 + 4\times 15)}{20} = \frac{65}{20} = 3{,}25 \qquad \overline{x_2} = \frac{(1\times 10 + 6\times 20)}{30} = \frac{13}{3}.$$

1 *способ*. Найдем общую среднюю по групповым средним:

$$\overline{x} = \frac{\left(20\times 3{,}25 + 30\times \frac{13}{3}\right)}{50} = \frac{65+130}{50} = 3{,}9.$$

2 *способ*. Найдем общую среднюю по групповым признакам:

$$\overline{x} = \frac{(1\times 15 + 4\times 15 + 6\times 20)}{50} = \frac{15+60+120}{50} = 3{,}9.$$

Рассмотрим отклонение между значением признака и общей средней: $x_i - \overline{x}$

Теорема. Сумма произведений отклонений на соответствующие частоты равна нулю: $\sum_{i=1}^{n} n_i\left(x_i - \overline{x}\right) = 0$, где $\sum_{i=1}^{n} n_i = n$- объем выборки из генеральной совокупности

Следствие. Среднее значение отклонения равно нулю

$$\frac{\sum n_i\left(x_i - \overline{x}\right)}{\sum n_i} = 0.$$

Пример 3. Дано распределение количественного признака $\bar{x}$

x_i	2	6	8
n_i	5	12	10

Найти среднее значение отклонения

Решение. $\bar{x} = \dfrac{(2\times5+6\times12+8\times10)}{27} = \dfrac{10+72+80}{27} = 6$,

$$\sum n_i\left(x_i-\bar{x}\right) = 5(2-6)+12(6-6)+10(8-6) = -20+0+20 = 0,$$

$$\sum n_i = 27 \Rightarrow \frac{\sum n_i\left(x_i-\bar{x}\right)}{\sum n_i} = 0.$$

Для того чтобы охарактеризовать рассеяние значений количественного признака X генеральной совокупности вокруг своего среднего значения, вводят генеральную дисперсию.

Генеральной дисперсией $D_г$ называют средне арифметическое квадратов отклонений значений признака генеральной совокупности от их среднего значения $\overline{x_г}$. Если объем равен N, то

$$D_г = \frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i-\overline{x_г}\right)^2}{N}.$$

Значения x_i различны и если значения признака $x_1, x_2,\ldots, x_к$ имеют соответственно частоты $N_1, N_2,\ldots, N_K$ $\left(\sum_{i=1}^{K} N_i = N\right)$, то

$$D_г = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_i\left(x_i-\overline{x_г}\right)^2}{N}.$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называют

$$\sigma_г = \sqrt{D_г}.$$

Выборочной дисперсией D_B называют среднее арифметическое квадратов отклонения наблюдаемых значений признака от их среднего значения $\overline{x_B}$.

Если значения x_i различны, то $D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x_B}\right)^2}{n}$, где n – объем выборки.

Если значения признака $x_1, x_2,\ldots, x_к$ имеют соответственно частоты

$n_1, n_2,\ldots, n_K$ $\left(\sum_{i=1}^{K} n_i = n\right)$, то $D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i-\overline{x_B}\right)^2}{n}$.

Теорема (вычисление дисперсии выборочной или генеральной). Дисперсия равна среднему квадратов значений признака минус квадрат общей средней: $D = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2$.

Пример 4. Найти дисперсию по данному распределению

x_i	1	2	3
n_i	10	5	10

Решение. Найдем общую среднюю:

$$\overline{x} = \frac{\left(1\times 10 + 2\times 5 + 3\times 10\right)}{25} = \frac{10+10+30}{25} = 2.$$

Найдем среднюю квадратов:

$$\overline{x^2} = \frac{\left(10\times 1 + 5\times 4 + 10\times 9\right)}{25} = \frac{10+20+90}{25} = 4{,}8,$$

$$D = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = 4{,}8 - 2^2 = 0{,}8,\ \sigma = \sqrt{D} \approx 0{,}.8944.$$

Точечной называют оценку, которая определяется одним числом. При выборе малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра, т.е. приводить к грубым ошибкам. По этой причине при небольшом объеме выборки следует пользоваться интервальными оценками.

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами-концами интервала. Интервальные оценки позволяют установить точность и надежность оценок.

Пусть найденная по данным выборки статическая характеристика θ^* служит оценкой неизвестного параметра θ.

Надежность (доверительной вероятностью) оценки θ по θ^* называют вероятность γ с которой осуществляется неравенство $\left|\theta - \theta^*\right| < \delta$.

Обычно надежность оценки задается наперед, причем в качестве γ берут число, близкое к единице. Это 0.95, 0.99, 0.999.

Доверительным называют интервал (θ^*- δ; θ^*+ δ) который покрывает неизвестный параметр с заданной надежностью γ.

Доверительный интервал, покрывающий параметр a, с надежностью γ нормального распределения при известном σ можно определить из уравнения:

$$P(\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}) = 2\Phi(t) = \gamma,\text{ где } \Phi(t) \text{ - функция Лапласа, } t = \frac{\delta\sqrt{n}}{\sigma}$$

Следовательно, с надежностью γ можно утверждать, что доверительный интервал $\left(\overline{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ покрывает неизвестный параметр a; точность оценки $\delta = \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$.

Пример 5. Найти доверительный интервал для оценки математического ожидания a нормального распределения с надежностью $\gamma = 0{,}95$, зная выборочную среднюю $\bar{x} = 10{,}43$ (статистическую среднюю m_x), объем выборки (число наблюдений) $n = 100$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 5$.

Решение. Воспользуемся формулой $P\left(\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t) = \gamma$.

Найдем t. Из соотношения $2\Phi(t) = 0{,}95$ получим $\Phi(t) = 0{,}475$. По таблице приложения находим $t = 1{,}96$. Подставляя данные в доверительный интервал $\bar{x} - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, получаем $10{,}43 - 1{,}96 \cdot (5/10) < a < 10{,}43 + 1{,}96 \cdot (5/10)$, или окончательно $9{,}45 < a < 11{,}41$.

Приложение 1

Таблица значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	б	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	074	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Приложение 2

Таблица значений функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849	1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,80	0,4974
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869	1,61	0,4463	2,02	0,4783	2,82	0,4976
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883	1,62	0,4474	2,04	0,4793	2,84	0,4977
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907	1,63	0,4484	2,06	0,4803	2,86	0,4979
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925	1,64	0,4495	2,08	0,4812	2,88	0,4980
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944	1,65	0,4505	2,10	0,4821	2,90	0,4981
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962	1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,92	0,4982
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980	1,67	0,4525	2,14	0,4838	2,94	0,4984
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997	1,68	0,4535	2,16	0,4846	2,96	0,4985
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015	1,69	0,4545	2,18	0,4854	2,98	0,4986
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032	1,70	0,4554	2,20	0,4861	3,00	0,49865
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049	1,71	0,4564	2,22	0,4868	3,20	0,49931
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066	1,72	0,4573	2,24	0,4875	3,40	0,49966
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082	1,73	0,4582	2,26	0,4881	3,60	0,49984
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099	1,74	0,4591	2,28	0,4887	3,80	0,49993
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115	1,75	0,4599	2,30	0,4893	4,00	0,49997
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131	1,76	0,4608	2,32	0,4898	4,50	0,49999
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147	1,77	0,4616	2,34	0,4904	5,00	0,49999
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162	1,78	0,4625	2,36	0,4909	если $x > 0,5$,	
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177	1,79	0,4633	2,38	0,4913	то $\Phi(x) \cong 0,5$	
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192	1,80	0,4641	2,40	0,4918		
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207	1,81	0,4649	2,42	0,4922		
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222	1,82	0,4656	2,44	0,4927		
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236	1,83	0,4664	2,46	0,4931		
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251	1,84	0,4671	2,48	0,4934		
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265	1,85	0,4678	2,50	0,4938		
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279	1,86	0,4686	2,52	0,4941		
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292	1,87	0,4693	2,54	0,4945		
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306	1,88	0,4699	2,56	0,4948		
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319	1,89	0,4706	2,58	0,4951		
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332	1,90	0,4713	2,60	0,4953		
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345	1,91	0,4719	2,62	0,4956		
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357	1,92	0,4726	2,64	0,4959		
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370	1,93	0,4732	2,66	0,4961		
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382	1,94	0,4738	2,68	0,4963		
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394	1,95	0,4744	2,70	0,4965		
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406	1,96	0,4750	2,72	0,4967		
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418	1,97	0,4756	2,74	0,4969		
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429	1,98	0,4761	2,76	0,4971		
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441	1,99	0,4767	2,78	0,4973		