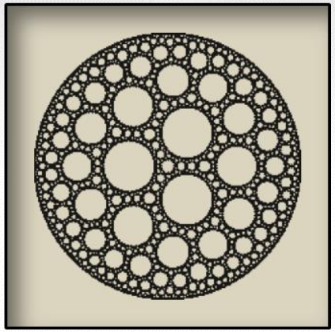
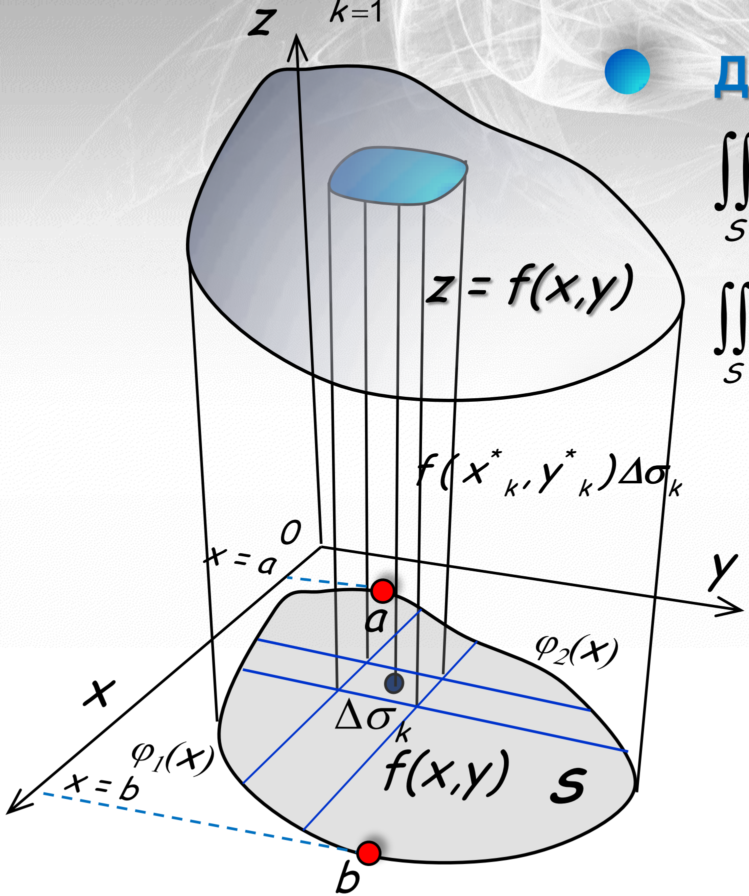
Двойной интеграл



{ двойной интеграл – двукратный интеграл - пример – замена переменной в двойном интеграле – якобиан преобразования – вычисление двойного интеграла в полярной системе координат – примеры }

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta\sigma_k = f(x_1, y_1)\Delta\sigma_1 + f(x_2, y_2)\Delta\sigma_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta\sigma_n$$



Двойной интеграл

$$\iint\limits_S f(x,y)d\sigma = \lim_{\substack{\max \Delta\sigma_k \to 0 \\ n\to\infty}} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} f(x^*_k, y^*_k)\Delta\sigma_k}_{\text{Интегральная сумма Римана}}$$

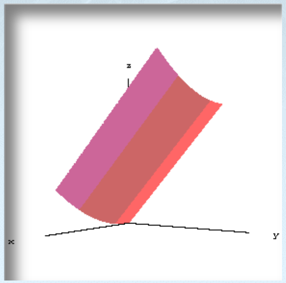
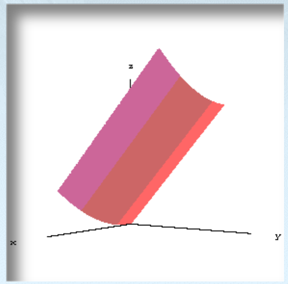
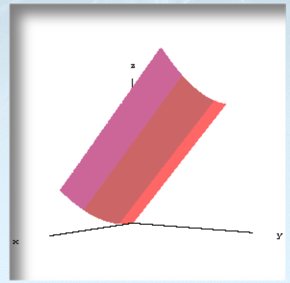
$$\iint\limits_S f(x,y)dxdy = \lim_{\substack{\max \Delta x_k, \Delta y_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=1}^{n} f(x^*_k, y^*_k)\Delta x_k \Delta y_k =$$

$$= \lim_{\substack{\max \Delta x_i, \Delta y_j \to 0 \\ m,\, n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i \sum_{j=1}^{m} f(\tilde{x}, y_j)\Delta y_j =$$

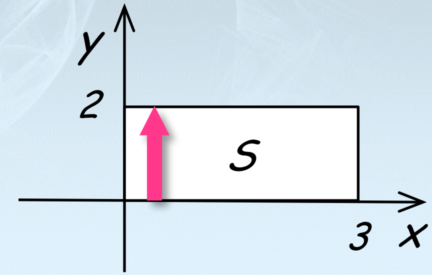
$$= \int_a^b dx \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(\tilde{x}, y)dy \right) \Rightarrow \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dxdy$$

Двухкратный интеграл

@ Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_S \left(x^2+4y\right)dxdy \quad S:[0,3]\times[0,2]$

Решение

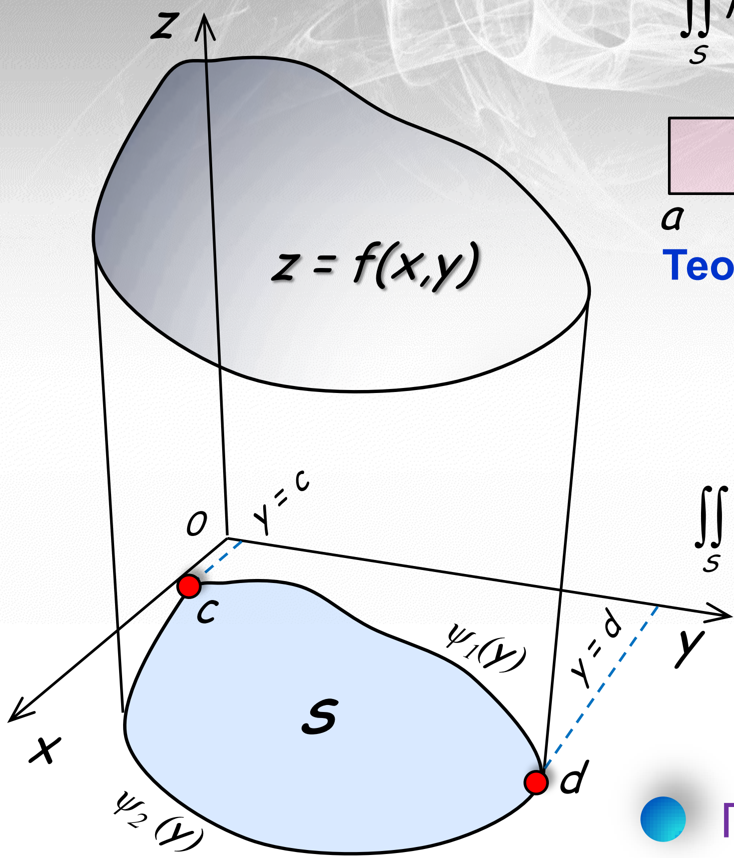


$$\iint\limits_S \left(x^2+4y\right)dxdy = \int_0^3\left(\int_0^2\left(x^2+4y\right)dy\right)dx = \int_0^3\left(x^2y+2y^2\right)\Big|_0^2 dx =$$

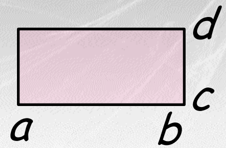
$$\int_0^3\left(2x^2+8\right)dx = \left(\frac{2x^3}{3}+8x\right)\Bigg|_0^3 = 42$$

Двойной интеграл

Объем цилиндроида (цилиндрического бруса)



$$\iint_S f(x,y)\,d\sigma = \iint_S f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$



$$\iint_S f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

Теорема Фубини

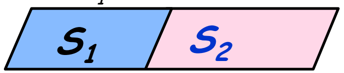
$$\iint_S f(x,y)\,d\sigma = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dxdy$$

$$S : [a,b] \times [c,d]$$

Свойства двойного интеграла

$$\iint_S \left(af(x,y) + bg(x,y) \right) d\sigma = a \iint_S f(x,y)\,d\sigma + b \iint_S g(x,y)\,d\sigma$$

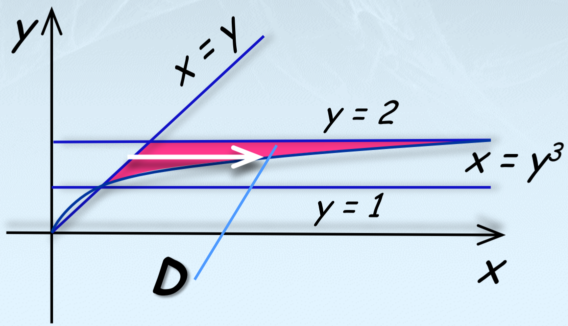
$$\iint_S f(x,y)\,d\sigma = \iint_{S_1} f(x,y)\,d\sigma + \iint_{S_2} f(x,y)\,d\sigma$$



$$S = S_1 \cup S_2$$

Площадь плоской фигуры - $S_D = \iint_D d\sigma = \iint_D dxdy$

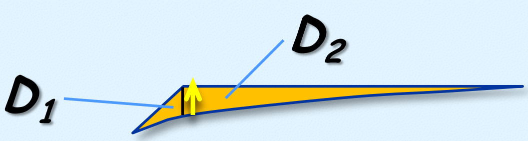
@ Вычислить двойной интеграл: $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy \quad D=\left\{(x,y)\ \middle|\ 1\le y\le 2,\ \ y\le x\le y^3\right\}$



Решение

$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy=\int_1^2\left(\int_y^{y^3} e^{\frac{x}{y}}dx\right)dy=\int_1^2 e^{\frac{x}{y}}y\,\Bigg|_y^{y^3}dy=$$

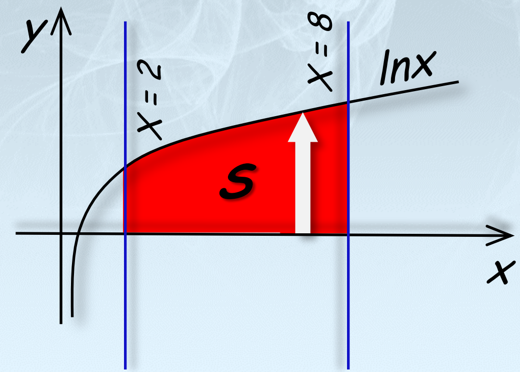
$$=\int_1^2\left(e^{y^2}y-ye^1\right)dy=\left(\frac{e^{y^2}}{2}-\frac{y^2e^1}{2}\right)\Bigg|_1^2=\frac{e^4}{2}-2e^1$$



$$\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}\,dxdy=\iint\limits_{D_1} e^{\frac{x}{y}}\,dxdy+\iint\limits_{D_2} e^{\frac{x}{y}}\,dxdy=\int_1^2\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^{x} e^{\frac{x}{y}}dy\right)dx+\int_2^8\left(\int_{\sqrt[3]{x}}^{2} e^{\frac{x}{y}}dy\right)dx$$

Второй способ вычисления интеграла неэффективен

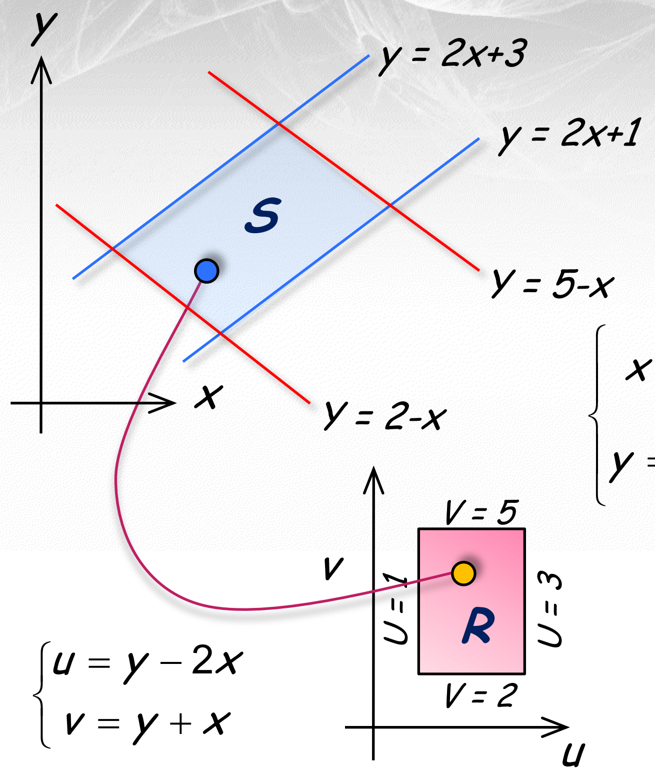
@ Вычислить $\int\limits_2^8 \int\limits_0^{\ln x} e^y dxdy$



Решение

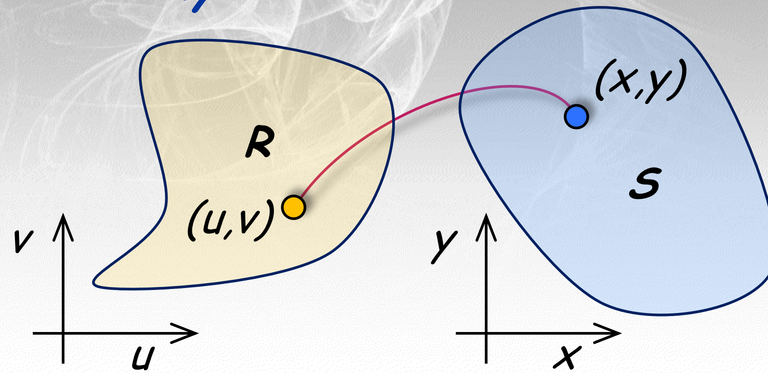
$$\int\limits_2^8 \int\limits_0^{\ln x} e^y dxdy = \int\limits_2^8 \left(\int\limits_0^{\ln x} e^y dy \right) dx = \int\limits_2^8 \left(e^y \Big|_0^{\ln x} \right) dx = \int\limits_2^8 (x-1) dx = \frac{x^2}{2} - x \Big|_2^8 = 24$$

- Замена переменных в двойном интеграле определяется отражением ***T*** области ***R*** в плоскости ***uv*** в область ***S*** плоскости ***xy***.



$$\begin{cases} x = \dfrac{u - v}{-3} \\ y = \dfrac{u + 2v}{3} \end{cases}$$

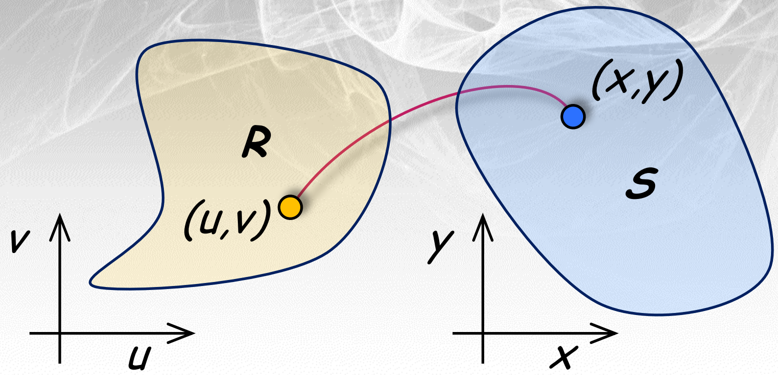
$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + x \end{cases}$$



Пример

Пусть ***S*** – область, ограниченная прямыми линиями *y = 2x + 3*, *y = 2x + 1*, *y = 5 - x* и *y = 2 - x*.
Найти преобразование ***T*** с отражением области ***R*** в плоскости ***uv*** на ***S***, где ***R*** – прямоугольная область с границами, параллельными осям ***u***, ***v***.

- Якобианом преобразования называется определитель:



$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad |J| = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$

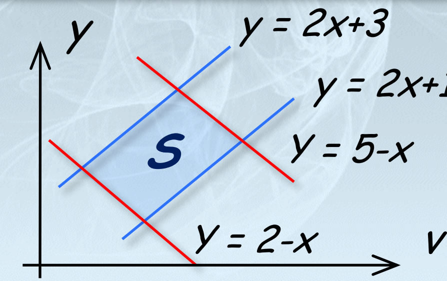
Замена переменной в двойном интеграле

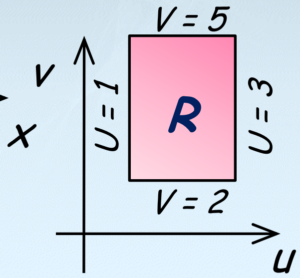
$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_R f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

$$\iint_S f(x,y)dxdy = \iint_R f(x(u,v),y(u,v))|\mathbf{J}|dudv$$

@ Вычислить $\iint\limits_S (x^2 + 2xy)\,dxdy$

$$S:\begin{cases} y \ge 2x+1 \\ y \le 2x+3 \\ y \ge 2-x \\ y \le 5-x \end{cases}$$





Решение

$$\begin{cases} u = y - 2x \\ v = y + x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u-v}{-3} \\ y = \dfrac{u+2v}{3} \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1}$$

$$|\mathbf{J}| = \left\|\begin{matrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{matrix}\right\| = \frac{1}{3}$$

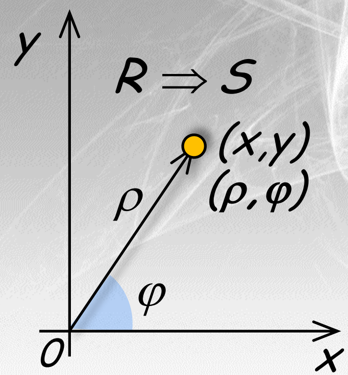
$$|\mathbf{J}| = \left\|\begin{matrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix}\right\|^{-1} = \frac{1}{3}$$

$$\iint\limits_S (x^2 + 2xy)\,dxdy = \iint\limits_R \left(\frac{(u-v)^2}{9} + 2\frac{(u-v)(u+2v)}{9}\right)\frac{1}{3}\,dudv = \frac{1}{27}\iint\limits_R (u^2 - 2uv + v^2 + 2u^2 - 2uv + 4uv - 4v^2)\,dudv =$$

$$\frac{1}{9}\iint\limits_R (u^2 - v^2)\,dudv = \frac{1}{9}\int_1^3\left(\int_2^5 (u^2 - v^2)\,dv\right)du = \frac{1}{9}\int_1^3\left(u^2 v - \frac{v^3}{3}\right)\Bigg|_2^5 du = \frac{1}{27}\int_1^3 (9u^2 - 117)\,du = \frac{1}{27}(3u^3 - 117u)\Big|_1^3 =$$

$$\frac{1}{9}(u^3 - 39u)\Big|_1^3 = \frac{1}{9}(26 - 78) = -\frac{52}{9}$$

Двойной интеграл в полярной системе координат



Преобразование ***T*** : отражение области ***R*** : ρ,φ на ***S: x,y***.

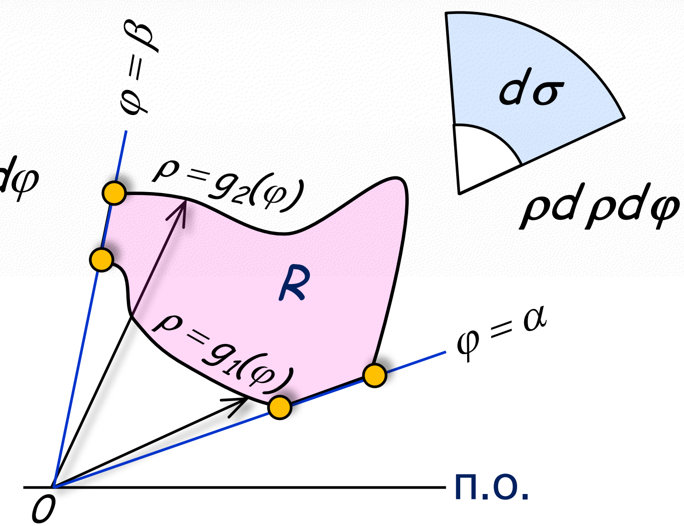
$$T:\begin{cases} x=\rho\cos\varphi \\ y=\rho\sin\varphi \end{cases}$$

Якобиан преобразования: $|J|=\rho$

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\varphi)}\right|=\left\|\begin{matrix}\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi\end{matrix}\right\|=\rho$$

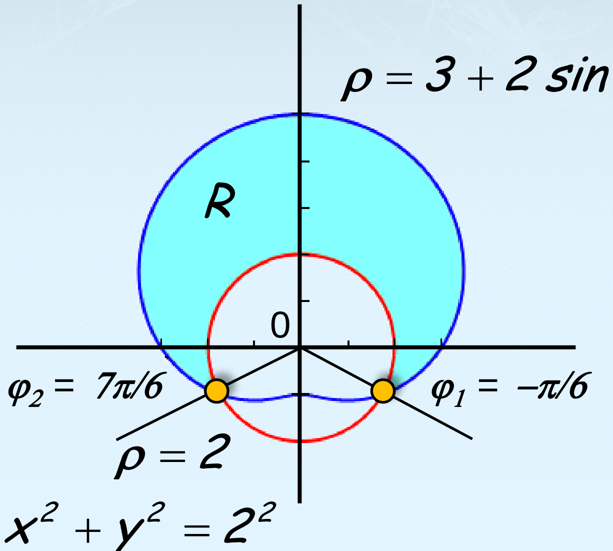
- $$\iint\limits_S f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_R f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

$$\iint\limits_R f(\rho,\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\int\limits_{g_1(\varphi)}^{g_2(\varphi)} f(\rho,\varphi)\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$



@ Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $\rho = 3 + 2\sin\varphi$ и лежащей вне круга $x^2 + y^2 \le 4$

Решение



$$2 = 3 + 2\sin\varphi \;\Rightarrow\; \sin\varphi = -\frac{1}{2}$$

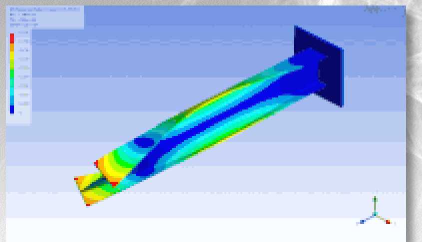
$$\Rightarrow -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{7\pi}{6} \qquad 2 \le \rho \le 3 + 2\sin\varphi$$

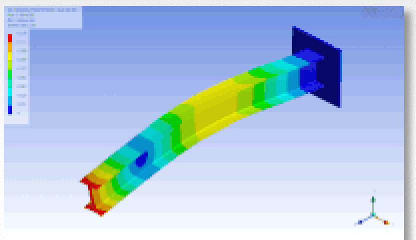
$$S = \iint_R d\sigma \qquad S = \iint_R \rho\, d\rho\, d\varphi = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \int_2^{3+2\sin\varphi} \rho\, d\rho\, d\varphi$$

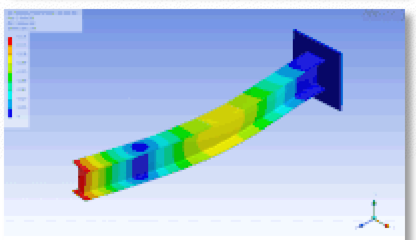
$$= \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \frac{\rho^2}{2}\Bigg|_2^{3+2\sin\varphi} d\varphi = \int_{-\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{7}{2} + 6\sin\varphi - \cos 2\varphi\right) d\varphi$$

$$= \frac{7}{2}\varphi - 6\cos\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi \Bigg|_{-\pi/6}^{7\pi/6} = \frac{11\sqrt{3}}{2} + \frac{14\pi}{3} = 24.187$$

Изгибные колебания балок







Уравнение Эйлера-Бернулли

Отклонение от нейтральной линии

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x,t)$$

Поперечное нагружение балки

Модуль упругости (Young's modulus)

Момент инерции поперечного сечения балки

Свободные колебания: $EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$

$$y(x,t) = Re\left[u(x)e^{-i\omega t}\right] \Rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 u$$

$$\Rightarrow EI\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - m\omega^2 u = 0 \qquad \beta = \left(\frac{m}{EI}\omega^2\right)^{1/4}$$

$$u = A_1 ch(\beta x) + A_2 sh(\beta x) + A_3 cos(\beta x) + A_4 sin(\beta x)$$