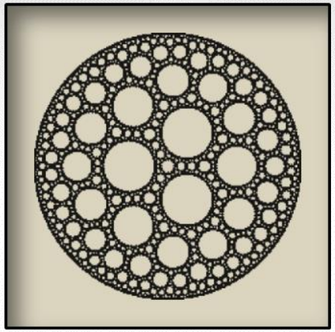
Криволинейные интегралы



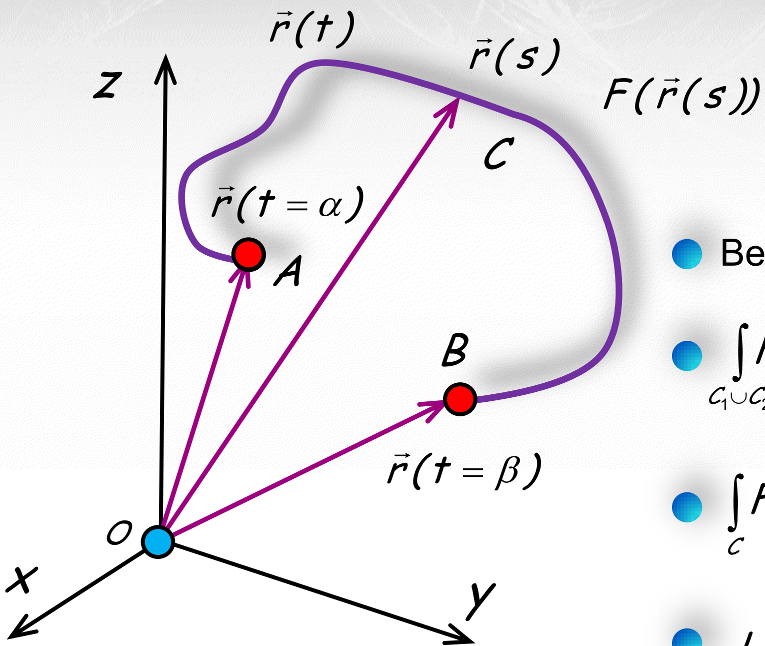
{ криволинейный интеграл 1-го рода – вычисление - пример – криволинейный интеграл 2-го рода – вычисление – пример – формула Грина - задачи из физики }

Определение и вычисление криволинейного интеграла 1-го рода

Пусть кривая C задана векторной функцией $\vec{r}(s), 0 \le s \le S$, где переменная s представляет собой *длину дуги* кривой.

Если на кривой C определена *скалярная функция* F, то ***криволинейным интегралом первого рода*** от $F(x,y,z)$ вдоль кривой C будет

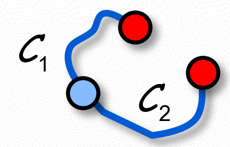
$$\int_0^S F(\vec{r}(s))ds$$



- $$\int_C F(x,y,z)ds$$

Свойства

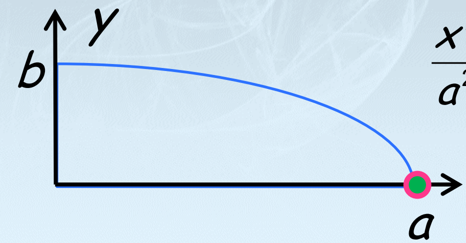
- Величина интеграла не зависит от ориентации кривой
- $$\int_{C_1 \cup C_2} Fds = \int_{C_1} Fds + \int_{C_2} Fds$$



- $$\int_C Fds = \int_\alpha^\beta F(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$
- $$L_{AB} = \int_{(AB)} ds = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}dt$$

\# Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C xyds$ где C – дуга эллипса, лежащая в первом квадранте

Решение



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Уравнение эллипса в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int\limits_C xyds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)\cdot y(t)\cdot\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

$$\int\limits_C xyds = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{(-a\sin t)^2 + (b\cos t)^2}\,dt$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\cdot b\sin t\cdot\sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,dt \quad \Rightarrow \quad u = a\sin t \quad a\cos t\,dt = du$$

$$b^2\cos^2 t = b^2\left(1 - \sin^2 t\right) = b^2\left[1 - \left(\frac{u}{a}\right)^2\right] \qquad t = 0 \to u = 0 \qquad t = \frac{\pi}{2} \to u = a \quad \Rightarrow$$

#

$$\Rightarrow \int_0^a u\cdot b\cdot\frac{1}{a}\cdot\sqrt{u^2+\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-u^2\right)}du \quad = \frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{b^2+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)u^2}\,udu$$

$$\Rightarrow \quad q=b^2+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)u^2 \qquad dq=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)2udu \qquad udu=\frac{a^2dq}{2\left(a^2-b^2\right)}$$

$$u=0\to q=b^2 \qquad u=a\to q=a^2$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}\int_{b^2}^{a^2}\sqrt{q}\,\frac{a^2}{2\left(a^2-b^2\right)}dq \quad = \frac{ab}{2\left(a^2-b^2\right)}\frac{2}{3}q^{\frac{3}{2}}\Big|_{b^2}^{a^2} \quad = \frac{ab\left(a^3-b^3\right)}{3\left(a^2-b^2\right)}$$

$$= \frac{ab\left(a^2+ab+b^2\right)}{3\left(a+b\right)}$$

Определение и вычисление криволинейного интеграла 2-го рода

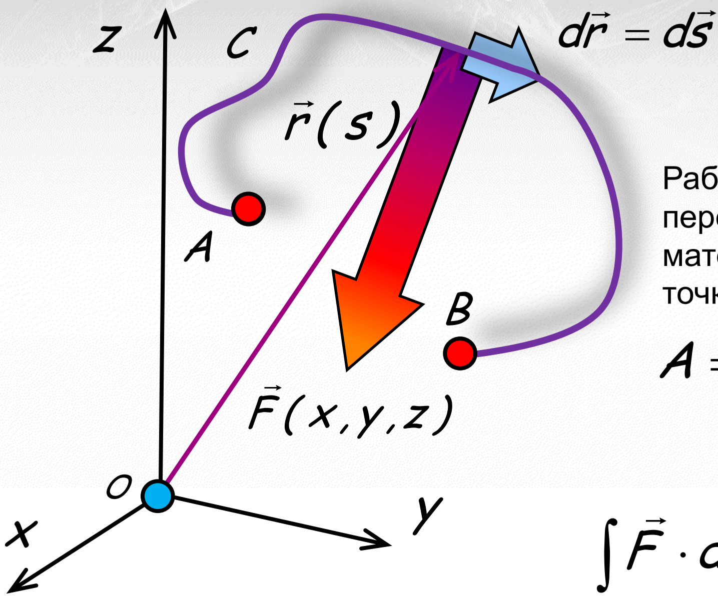
Пусть кривая C задана векторной функцией $\vec{r}(s)$, $0 \le s \le S$, где переменная s представляет собой *длину дуги* кривой.

Производная $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}$ задает единичный вектор касательной к кривой – годографу $\vec{r}(s)$.

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau} \qquad \vec{\tau} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$$

$$d\vec{r} = \vec{\tau}ds = \vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz$$

$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$



Работа по перемещению материальной точки в поле $\vec{F}$

$$A = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Циркуляция поля F вдоль заданной линии

$$\Gamma_c = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

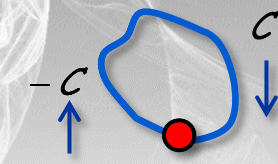
Криволинейный интеграл 2-го рода

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \vec{F} \cdot \vec{\tau}ds = \int_C (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds$$

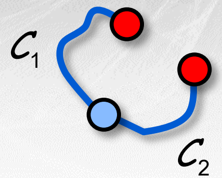
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$

Свойства криволинейного интеграла 2-го рода

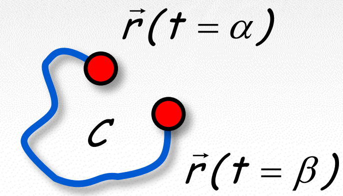
- Интеграл меняет знак при изменении ориентации кривой $\int\limits_{-C} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int\limits_{C} \vec{F}\cdot d\vec{r}$



- $$\int\limits_{C_1\cup C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int\limits_{C_1} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int\limits_{C_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

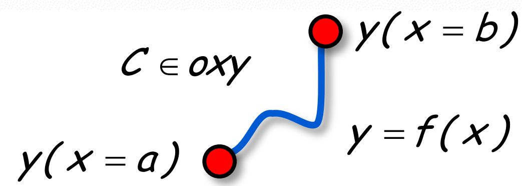


$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$



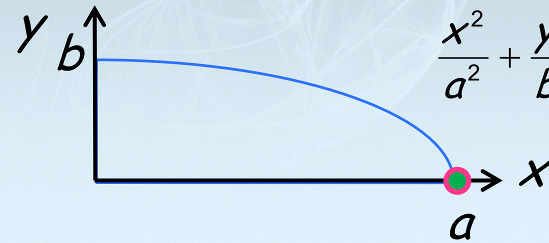
- $$\int\limits_{C} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[P(x(t),y(t),z(t))\frac{dx}{dt} + Q(x(t),y(t),z(t))\frac{dy}{dt} + R(x(t),y(t),z(t))\frac{dz}{dt}\right]dt$$

- $$\int\limits_{C} Pdx + Qdy = \int\limits_{a}^{b}\left[P(x,f(x)) + Q(x,f(x))\frac{df}{dx}\right]dx$$



Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C y^2dx + xydy$ где C – дуга эллипса, лежащая в первом квадранте

Решение



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Уравнение эллипса в параметрической форме:

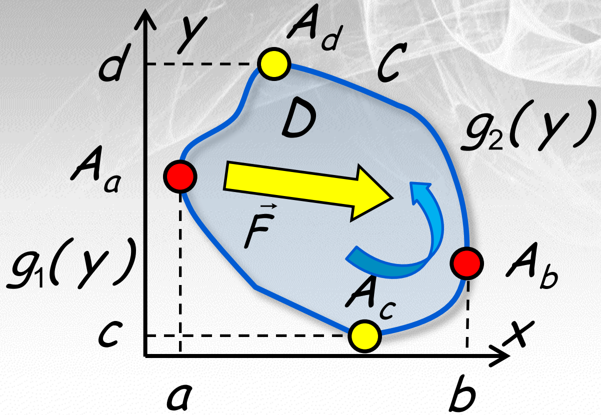
$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int\limits_C y^2dx + xydy = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[b^2 \sin^2 t(-a\sin t) + ab\cos t \sin t(b\cos t)\right]dt =$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-ab^2\sin^3 t + ab^2\cos^2 t \sin t\right]dt = ab^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sin t\left(\cos^2 t - \sin^2 t\right)\right]dt =$$

$$= ab^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(1-2\cos^2 t\right)\right]d(\cos t) = ab^2\left[\cos t - \frac{2\cos^3 t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{ab^2}{3}$$

В плоскости Oxy задана область D, ограниченная замкнутой непрерывной кривой C. В области D задана непрерывная векторная функция:



$$\vec{F} = P(x,y)\vec{i} + Q(x,y)\vec{j}$$

$\dfrac{\partial P}{\partial y}$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ - непрерывные частные производные.

Формула Грина

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_C Pdx + Qdy$$

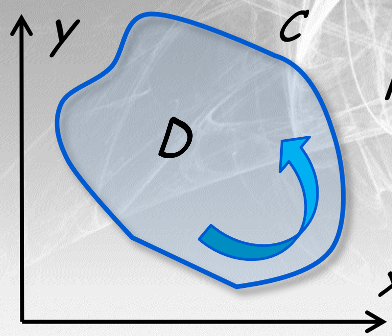
Вывод формулы

$$\iint\limits_D \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx = \int\limits_c^d Q(x,y)\Big|_{g_1(y)}^{g_2(y)} dy = \int\limits_c^d Q(g_2(y),y)) - Q(g_1(y),y))| dy$$

$$= \int\limits_{(A_cA_bA_d)} Q(x,y)dy + \int\limits_{(A_dA_aA_c)} Q(x,y)dy = \oint\limits_C Q(x,y)dy$$

Аналогично -

$$\iint\limits_D -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint\limits_C P(x,y)dx \quad \square$$



$$\vec F = P(x,y)\vec i + Q(x,y)\vec j$$

Формула Грина

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \oint_C Pdx + Qdy$$

Если $Q = x$ и $P = -y$, то формула Грина может быть использована для вычисления площади области D

$$S_D = \iint_D dxdy = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

$$rot\vec F = \nabla \times \vec F = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$\vec F = P(x,y,z)\vec i + Q(x,y,z)\vec j + R(x,y,z)\vec k$$

$$rot\vec F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec k$$

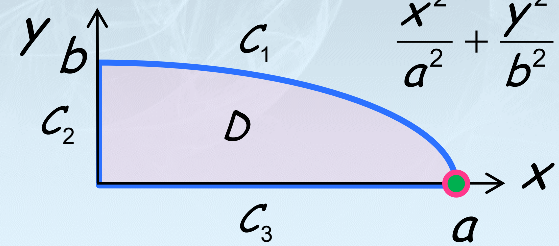
Ротор поля – вихрь поля

$$rot\vec F \Leftrightarrow curl\vec F$$

$$\iint_D rot\vec F \cdot \vec k dxdy = \oint_C \vec F \cdot d\vec r$$

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_C y^2dx + xydy$ где контур $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$: дуга эллипса (C_1), отрезок оси y (C_2) и отрезок оси x (C_3) .

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Решение

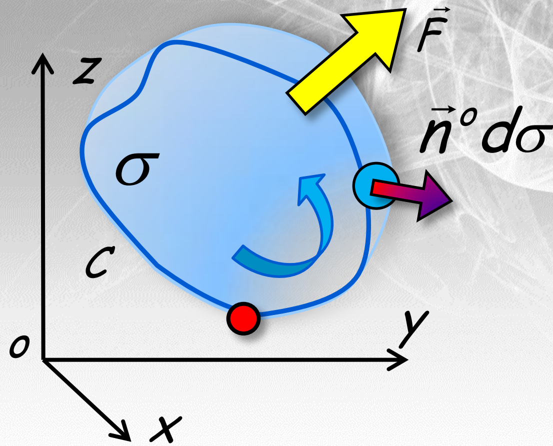
$$\int\limits_C y^2dx + xydy = \iint\limits_D (y - 2y)dxdy = -\iint\limits_D ydxdy =$$

$$= -\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}} ydy = -\int\limits_0^a \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}} dx = -\frac{1}{2}\int\limits_0^a \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)dx = -\frac{b^2}{2a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = -\frac{ab^2}{3}$$

$$\int\limits_C y^2dx + xydy = \int\limits_{C_1} y^2dx + xydy + \int\limits_{C_2} y^2dx + xydy + \int\limits_{C_3} y^2dx + xydy =$$

$$= -\frac{ab^2}{3} + \int\limits_{C_2} y^2 \cdot 0 + 0 \cdot dy + \int\limits_{C_3} 0dx + 0ydy = -\frac{ab^2}{3}$$

Потенциальное векторное поле



$$\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$$

$$rot\vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

$$rot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} \qquad \vec{F} = \nabla\Phi \qquad rot(\,grad\,\Phi\,) = \nabla \times \nabla\Phi = 0$$

$$rot\vec{F} = \nabla \times \nabla\Phi = \vec{i}\left(\frac{\partial \frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial \frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\partial z} - \frac{\partial \frac{\partial\Phi}{\partial z}}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial \frac{\partial\Phi}{\partial y}}{\partial x} - \frac{\partial \frac{\partial\Phi}{\partial x}}{\partial y}\right) = 0$$

Векторное поле ***F*** – называется **потенциальным векторным полем,** если $rot\vec{F} = 0$

Φ(x,y,z) – **потенциальное поле**

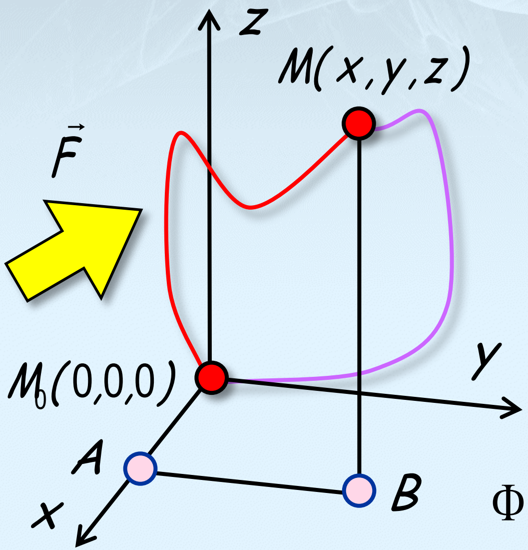
$rot\vec{F} = 0$ если $\vec{F} = \nabla\Phi$

Теорема Стокса

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\sigma \overline{rotF} \cdot \bar{n}^o d\sigma$$

\# Найти потенциал векторного поля $\vec{F} = (2xy+z)\vec{i} + (x^2-2y)\vec{j} + x\vec{k}$

Решение



$$rot\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ (2xy+z) & x^2-2y & x \end{vmatrix} = 0$$

Поле потенциальное

$$\nabla(x^2y - y^2 + xz + C) = (2xy+z)\vec{i} + (x^2-2y)\vec{j} + x\vec{k}$$

$$\Phi = \int\limits_{(M_0M)} (2xy+z)dx + (x^2-2y)dy + xdz = \int\limits_{(M_0A)} * + \int\limits_{(AB)} * + \int\limits_{(BM)} * =$$

$$\int_0^x 0dx + \int_0^y (x^2 - 2\cdot y)dy + \int_0^z xdz = x^2y - y^2 + xz + C$$