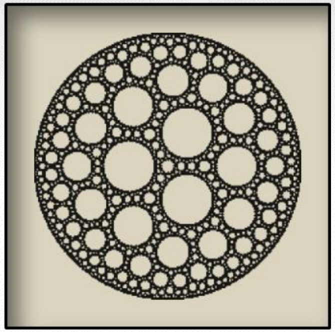
Поверхностные интегралы



{ поверхностный интеграл 1-го рода – вычисление - пример – поверхностный интеграл 2-го рода – вычисление – пример – формула Стокса – ротация – дивергенция – формула Остроградского - задачи }

Определение и вычисление поверхностного интеграла 1-го рода

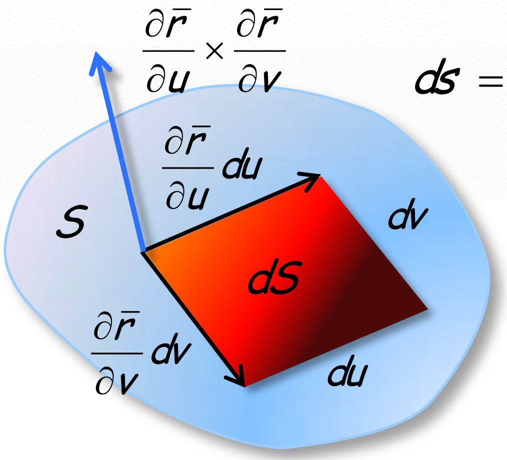
Пусть задана скалярная функция $f(x,y,z)$ и поверхность S , и последняя задана вектор-функцией $\vec{r}(u,v)=x(u,v)\bar{i}+y(u,v)\bar{j}+z(u,v)\bar{k}$,$(u,v)\Rightarrow D(u,v)$

$f[\vec{r}(u,v)]=f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]$ задана в точках на поверхности $(x,y,z)\in S$

Поверхностный интеграл первого рода от $f(x,y,z)$ по поверхности S определяется как

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D(u,v)} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right|dudv$$

$$\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}=\frac{\partial x(u,v)}{\partial u}\bar{i}+\frac{\partial y(u,v)}{\partial u}\bar{j}+\frac{\partial z(u,v)}{\partial u}\bar{k}\qquad\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}=\frac{\partial x(u,v)}{\partial v}\bar{i}+\frac{\partial y(u,v)}{\partial v}\bar{j}+\frac{\partial z(u,v)}{\partial v}\bar{k}$$



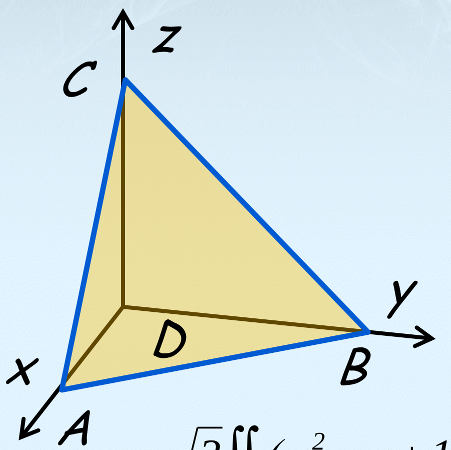
$$ds=\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right|dudv\qquad A_S=\iint\limits_S ds=\iint\limits_S\left|\frac{\partial\bar{r}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{r}}{\partial v}\right|dudv$$

Если поверхность S задана уравнением $z=z(x,y)$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D(x,y)} f(x,y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}dxdy$$

Вычислить $\iint\limits_S (x^2+y+z)ds$ где S : треугольник (*ABC*), *A(1,0,0)*, *B(0,1,0)*, *C(0,0,1)*

Решение



$$S:\ x+y+z=1 \qquad z=1-x-y \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=-1 \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-1$$

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds=\iint\limits_{D(x,y)} f(x,y,z)\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dxdy$$

$$\iint\limits_S (x^2+y+z)ds=\iint\limits_{D(x,y)}(x^2+y+1-x-y)\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}\,dxdy \ =$$

$$\sqrt{3}\iint\limits_D (x^2-x+1)dxdy \ = \ \sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}(x^2-x+1)dx \ = \ \sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg|_0^{1-y} dy \ =$$

$$\sqrt{3}\int_0^1\left(\frac{(1-y)^3}{3}-\frac{(1-y)^2}{2}+1-y\right)dy \ = \sqrt{3}\left(-\frac{(1-y)^4}{12}+\frac{(1-y)^3}{6}+y-\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{5\sqrt{3}}{12}$$

Вычислить $\iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ где S - часть цилиндрической поверхности:

$$\mathbf{r}(u,v)=(a\cos u, a\sin u, v), 0\le u\le 2\pi,\ 0\le v\le H$$

Решение

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=\left(\frac{\partial x}{\partial u},\frac{\partial y}{\partial u},\frac{\partial z}{\partial u}\right)=(-a\sin u, a\cos u, 0)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\left(\frac{\partial x}{\partial v},\frac{\partial y}{\partial v},\frac{\partial z}{\partial v}\right)=(0,0,1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -a\sin u & a\cos u & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a\cos u\,\vec{i}+a\sin u\,\vec{j}$$

$$ds=\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}\right|dudv=\left|\sqrt{(a\cos u)^2+(a\sin u)^2}\right|=adudv$$

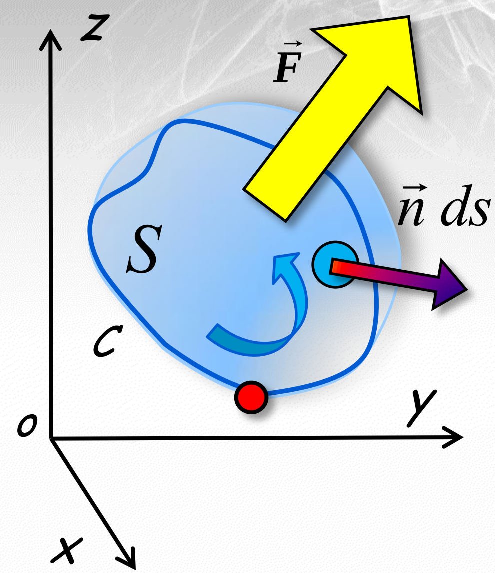
$$\iint\limits_S \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \iint\limits_{D(u,v)} \frac{adudv}{\sqrt{a^2+v^2}} = \int_0^{2\pi} adu \int_0^H \frac{dv}{\sqrt{a^2+v^2}} =$$

$$2\pi a\left[ln(v+\sqrt{a^2+v^2})\Big|_0^H\right] = 2\pi a\, ln\frac{H+\sqrt{a^2+H^2}}{a}$$

$$\vec{\mathbf{F}} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k} \qquad rot\vec{\mathbf{F}} = \nabla \times \vec{\mathbf{F}}$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

Оператор Гамильтона
Набла-оператор



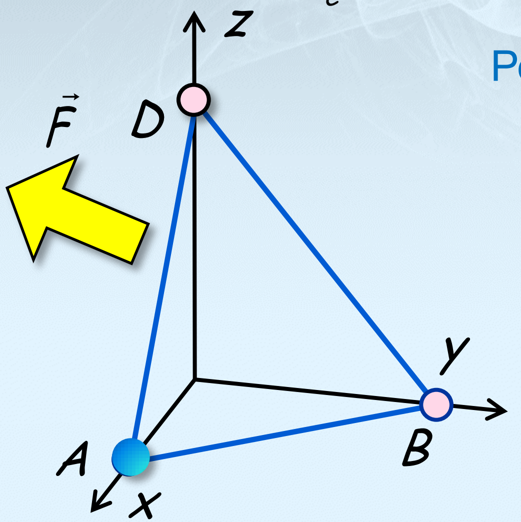
$$rot\vec{\mathbf{F}} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

Теорема Стокса

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot\overline{F} \cdot \overline{n}\, ds$$

Циркуляция векторного поля по замкнутому контуру равна потоку ротации этого поля через поверхность, границей которой является этот контур.

Вычислить $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ где $\vec{F} = z^2\vec{i} + y^2\vec{j} + x\vec{k}$ $C:\ ABDA,\ A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ D(0,0,1)$



Решение

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{(ABDA)} z^2dx + y^2dy + xdz =$$

$$\int_{(ABDA)} z^2dx + y^2dy + xdz = \int_{AB} * + \int_{BD} * + \int_{DA} * =$$

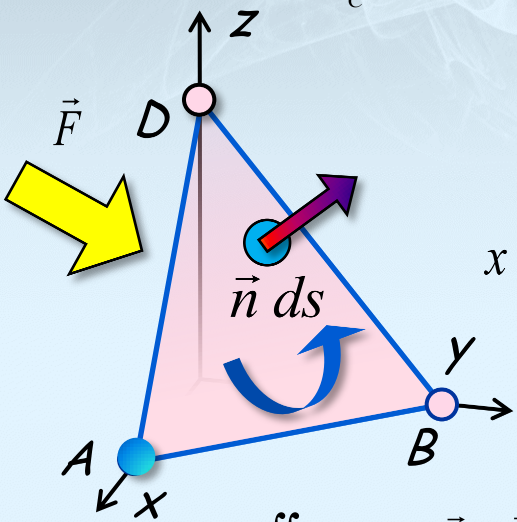
$$\int_{AB} 0dx + y^2dy + 0 = \int_0^1 y^2dy = \frac{y^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_{BD} 0 + y^2dy + 0 = \int_1^0 y^2dy = \left(\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_1^0 = -\frac{1}{3}$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$$

$$\int_{DA} (1-x)^2dx + 0 + x(-dx) = \int_0^1 (1-3x+x^2)dx = \left(x - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{6}$$

Вычислить $\oint\limits_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ где $\mathbf{F}=z^2\vec{i}+y^2\vec{j}+x\vec{k}$ $C: ABDA,\ A(1,0,0),\ B(0,1,0),\ D(0,0,1)$



Решение

$$\oint\limits_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=\iint\limits_\sigma rot\overline{F}\cdot\vec{n}\,ds \qquad rot\,\mathbf{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ z^2 & y^2 & x\end{vmatrix}=(2z-1)\vec{j} \quad =$$

$$x+y+z=1$$

$$f(x,y,z)=z-g(x,y)=z-1+x+y$$

$$\bar{\boldsymbol{n}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \qquad \nabla f=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} \qquad \nabla f=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\bar{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\iint\limits_S(2z-1)\vec{j}\cdot d\vec{S}=\iint\limits_S(2z-1)\vec{j}\cdot\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\|\nabla f\|ds \quad = \quad \iint\limits_S(2z-1)\vec{j}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k})ds \quad =$$

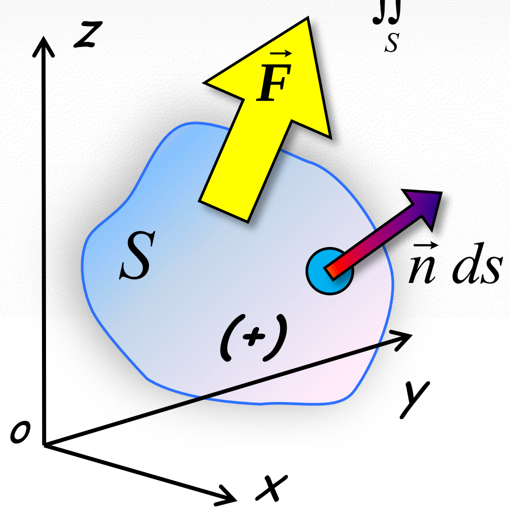
$$\iint\limits_{S_{xy}}\big(2(1-x-y)-1\big)dydx \quad = \quad \int\limits_0^1\left(\int\limits_0^{-x+1}(1-2x-2y)dy\right)dx \quad = \quad \int\limits_0^1(x^2-x)dx \quad = -\frac{1}{6}$$

Поверхностный интеграл второго рода от $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ по поверхности S (определяемой $\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$ и ориентированной внешней нормалью) определяется как

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{S}=\iint\limits_S \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,ds=\iint\limits_{D(u,v)} \boldsymbol{F}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\cdot\left|\frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial u}\times\frac{\partial\bar{\mathbf{r}}}{\partial v}\right|dudv$$

Поверхностный интеграл второго рода – это поток векторного поля $\boldsymbol{F}$ через поверхность S.

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}ds=\iint\limits_S (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)ds=\iint\limits_S Pdydz+Qdxdz+Rdxdy$$

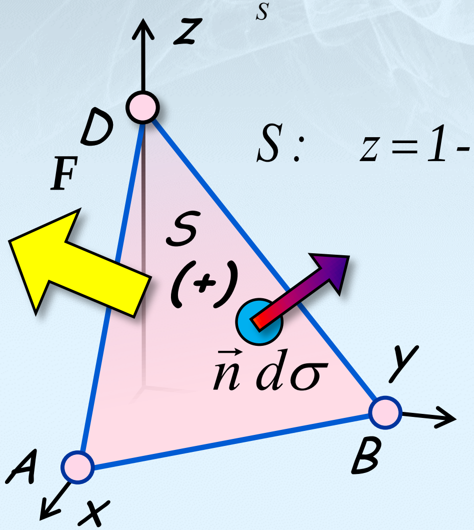


$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}ds=\iint\limits_{D(x,y)} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i}-\frac{\partial z}{\partial y}\vec{j}+\vec{k}\right)dxdy \qquad S: z=f(x,y)$$

$$\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot\vec{\boldsymbol{n}}\,ds=\iint\limits_{D(u,v)}\begin{vmatrix} P & Q & R\\ \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v}\end{vmatrix}dudv$$

Вычислить $\iint_S \mathbf{F}\cdot ds$ где $\mathbf{F} = x\vec{i} - \vec{j} + z\vec{k}$ S : (+) поверхность ΔABD, $A(1,0,0)$, $B(0,1,0)$, $D(0,0,1)$

Решение



$$S:\quad z = 1 - x - y \qquad \iint_S \mathbf{F}\cdot\vec{\mathbf{n}}\,ds = \iint_{D(x,y)} \mathbf{F}(x,y,z)\cdot\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}\right)dxdy$$

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\vec{\mathbf{n}}ds = \iint_{D(x,y)} \left(x\vec{i} - \vec{j} + z\vec{k}\right)\cdot\left(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}\right)dxdy = \iint_{D(x,y)} (x - 1 + z)dxdy =$$

$$\iint_{D(x,y)} (x - 1 + 1 - x - y)dxdy = -\iint_{D(x,y)} ydxdy = -\int_0^1\left(\int_0^{1-x} ydy\right)dx =$$

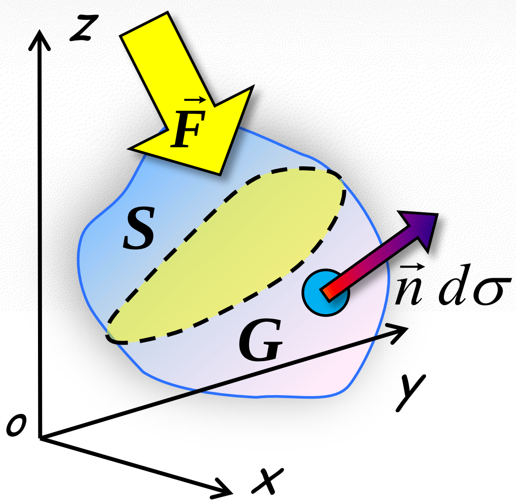
$$-\int_0^1\left(\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right)dx = \frac{1}{2}\int_1^0 (1-x)^2 dx = -\frac{(1-x)^3}{6}\Big|_1^0 = -\frac{1}{6}$$

Поток векторного поля через замкнутую поверхность *S* может быть выражен через тройной интеграл от дивергенции поля ***F****(x,y,z)*

$$\iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iiint\limits_G \nabla\cdot\mathbf{F}dv \quad \iint\limits_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dv \quad \nabla\cdot\mathbf{F} = div\mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

Формула Остроградского-Гаусса в координатной форме

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdxdz + Rdxdy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz$$



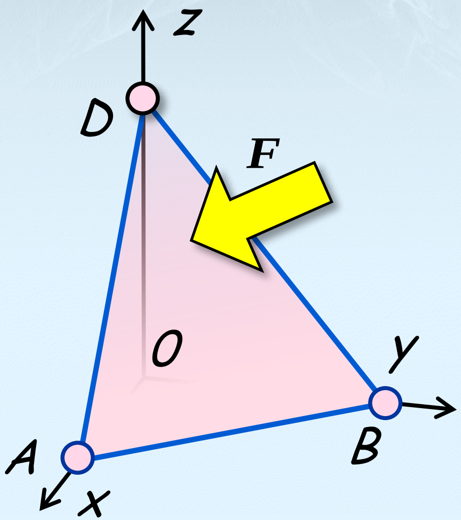
Div*ergence* – расходимость.

Если $div\mathbf{F} = 0$, то векторное поле называется *соленоидальным*.

Формула для вычисления объема тела G

$$V_G = \frac{1}{3}\iint\limits_S xdydz + ydxdz + zdxdy$$

\# Вычислить $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s}$ где $\boldsymbol{F} = x\vec{i} - \vec{j} + z\vec{k}$ через поверхность тетраэдра с вершинами O(0,0,0), A(1,0,0), B(0,1,0), D(0,0,1)



Решение

Используем формулу Остроградского-Гаусса $\iint\limits_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{s} = \iiint\limits_G \nabla\cdot\boldsymbol{F}dv$

$$\iint\limits_S xdydz - dxdz + zdxdy = \iiint\limits_G \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial(-1)}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dxdydz =$$

$$\iiint\limits_G 2\,dxdydz = 2\iiint\limits_G dxdydz = 2\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} dz\right) dy\right) dx =$$

$$2\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} (1-x-y)dy\right) dx = \int_0^1 (1-x)^2\,dx = -\frac{(1-x)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$2V_G = 2\frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$