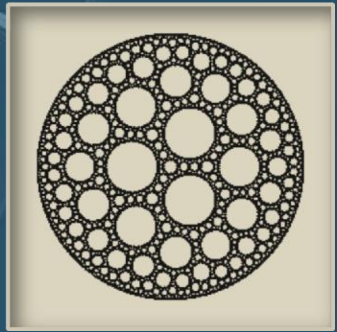
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА



{ поле комплексных чисел - алгебраическая запись - плоскость комплексного переменного - тригонометрическая форма записи комплексного числа - формула Муавра - извлечение корней – пример – формула Эйлера - пример }

Поле комплексных чисел

Натуральные числа, целые, рациональные, действительные числа $N \subset Z \subset Q \subset R$: здесь каждое последующее множество обладает увеличением “хороших” алгебраических свойств по сравнению с предыдущим. Натуральные числа можно только складывать и умножать, целые – еще и вычитать, рациональные делить, из неотрицательных вещественных можно извлекать корни.

Можно ли построить поле , где корни можно извлекать из любых чисел ?

Такое множество C называется множеством комплексных чисел.

Пусть $C = R \times R$.

Зададим на C операции сложения и умножения :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2,\ b_1 + b_2)$$

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2,\ a_1b_2 - b_1a_2)$$

для всех $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in C$

Поле комплексных чисел

- $(C, +, .)$ - поле комплексных чисел.

Числа вида $(a, 0)$, где a - вещественное число, складываются и перемножаются, также как и вещественные числа: $(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$, $(a, 0)(b, 0) = (a\,b, 0)$. Такие комплексные числа можно записывать как a .

$$R \subseteq C$$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + b(0, 1)$$

Обозначим число $(0, 1)$ через i , получим представление комплексного числа в алгебраической форме

$$z = (a, b) = a + bi$$

Алгебраическая запись комплексных чисел

- $z = (a, b) = a + bi$

Число i называют *мнимой единицей*.

$$i^2 = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

$$i^2 = -1 \qquad i = \sqrt{-1}$$

"…изумительный полет Духа Божьего ! " – Готфрид Вильгельм фон Лейбниц

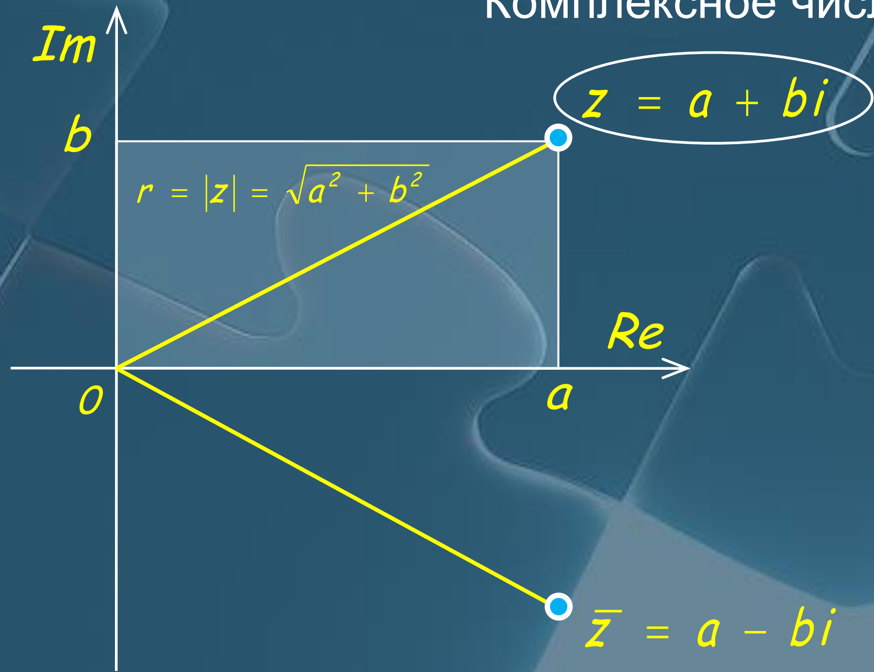
$$z = a + bi$$

a - вещественная часть числа z: $\operatorname{Re} z$

b - мнимая часть числа z: $\operatorname{Im} z$

Плоскость комплексного переменного

Комплексное число



Комплексно – сопряженное число

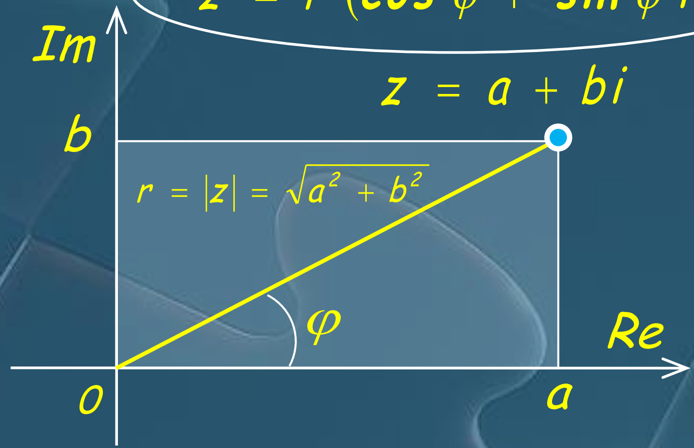
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow \mathbf{Im}\, z = 0$
- $\bar{z} = -z \Leftrightarrow \mathbf{Re}\, z = 0$
- $z + \bar{z} \Leftrightarrow 2\, \mathbf{Re}\, z \in R$
- $\bar{z} = z \Leftrightarrow \mathbf{Im}\, z = 0$
- $z\bar{z} = (\mathbf{Re}\, z)^2 + (\mathbf{Im}\, z)^2 \geq 0$
- $z^{-1} = \dfrac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \dfrac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} =$

$$= \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2} i$$

- $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Тригонометрическая форма записи

$$z = r(\cos\varphi + \sin\varphi\, i)$$



- $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| = |-z|$
- $|z| = |\bar{z}|$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r}$$

$$z = a + bi = r\left(\frac{a}{r} + \frac{b}{r}i\right) = r(\cos\varphi + \sin\varphi i)$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{r},\ \sin\varphi = \frac{b}{r} \quad \Rightarrow \varphi + 2\pi$$

$$z_k = r_k(\cos\varphi_k + \sin\varphi_k i),\ k = 1,2$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos\varphi_1 + \sin\varphi_1 i)(\cos\varphi_2 + \sin\varphi_2 i) =$$

$$= r_1 r_2\begin{pmatrix}\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \\ + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)\end{pmatrix} =$$

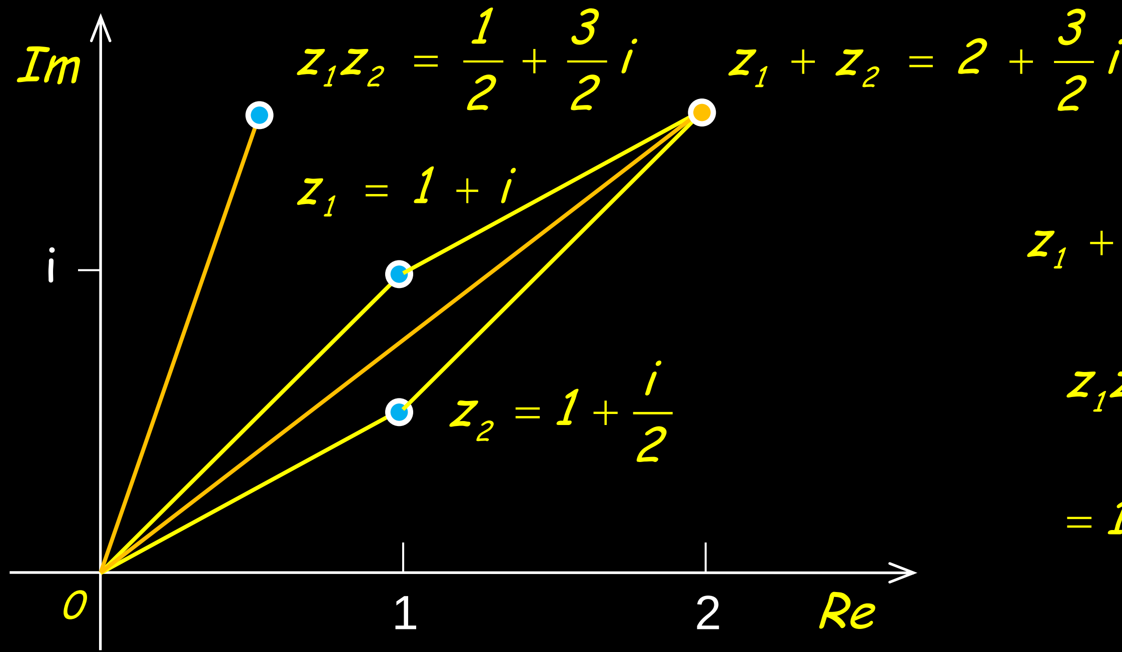
$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 + \varphi_2)))$$

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

Пример

@ Сложить $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = 1 + \frac{i}{2}$, затем перемножить эти числа.



Решение

$$z_1 + z_2 = 1 + i + 1 + \frac{1}{2} i = 2 + \frac{3}{2} i$$

$$z_1 z_2 = \left(1 + i\right)\left(1 + \frac{1}{2} i\right) =$$

$$= 1 + i + \frac{1}{2} i - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} i$$

Формула Муавра

Применим правило умножения для нахождения квадрата комплексного числа:

$$z^2 = zz = r\,r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$

$$= r^2(\cos\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\sin\varphi + i(\cos\varphi\sin\varphi + \sin\varphi\cos\varphi)) =$$

$$= r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$ Формула Муавра

Найдем частное от деления двух комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2) = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i(\sin(\varphi_1 - \varphi_2)))$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{r_1}{r_2} \qquad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2$$

Извлечение корней

Пусть $n \in N, z \in C$

Множество корней степени n из комплексных чисел: $\{\omega \in C : \omega^n = z\} \to \sqrt[n]{z}$

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad \omega = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$$

$$z = \omega^n = \rho^n(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)) \quad \Rightarrow r = \rho^n, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k,\ k \in Z$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$$

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z$$

Заметим $\omega_{n+k} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi(k+n)}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi(k+n)}{n}\right) =$

$$= \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \omega_k$$

ω_k циклически повторяются через каждые n шагов !

Извлечение корней

$$\sqrt[n]{z} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}\}$$

В частности: $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$ $\quad \varepsilon_k = \left(\cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}\right),\ k \in N$

$$\sqrt[n]{1} \Rightarrow U_n\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{n-1}\}$$

$$U_1 = \{1\}$$

$(U_n, \cdot)$ - абелева группа

$$U_2 = \{-1, 1\}$$

$$U_3 = \left\{1, \varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \varepsilon_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

$$U_4 = \{1, \varepsilon_1 = i, \varepsilon_2 = -1, \varepsilon_3 = -i\}$$

Пример

@ Найти все значения $\left(\sqrt{3}+i\right)^3$.

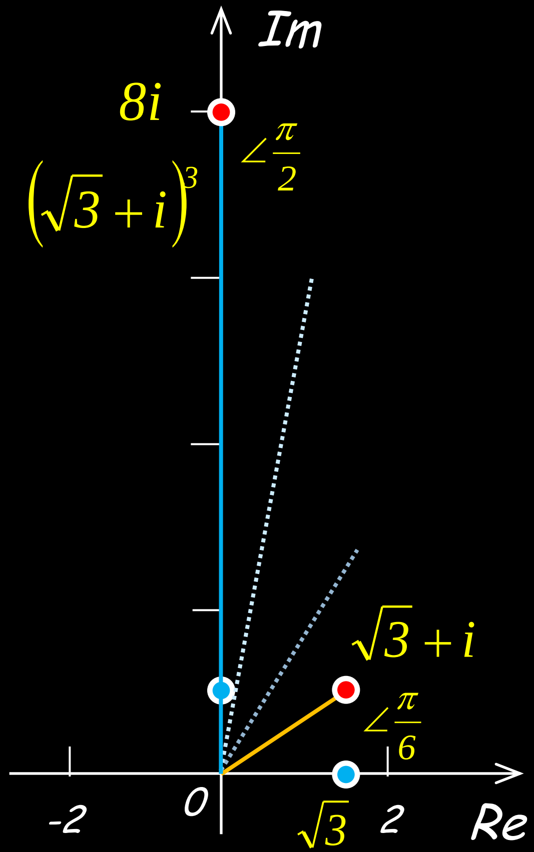
Решение

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^3=\left(\sqrt{3}\right)^3+3\left(\sqrt{3}\right)^2 i+3\left(\sqrt{3}\right)i^2+i^3$$

$$=3\sqrt{3}+9i-3\sqrt{3}-i\ =8i$$

$$\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^3=2^3\left(\cos\frac{3\pi}{6}+i\sin\frac{3\pi}{6}\right)=8\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=8i$$



Пример

@ Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$.

Решение

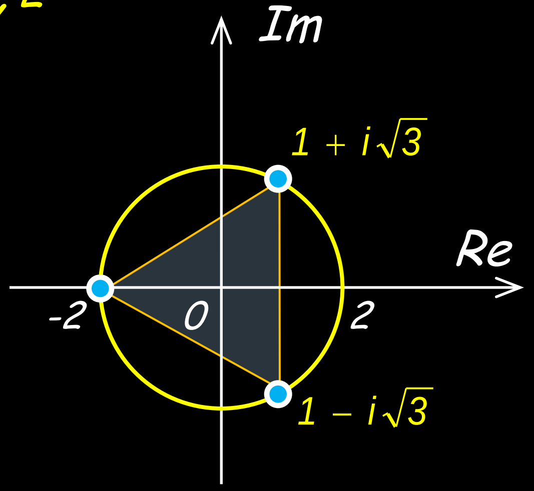
$$-8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow$$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$\Rightarrow \quad \omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\omega_1 = 2(\cos\pi + i\sin\pi) = -2$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - i\sqrt{3}$$



Уравнением второй степени называют уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0 \qquad a, b, c \in C$$

Приведенная форма: $x^2 + px + q = 0$

$$x^2 + 2\frac{p}{2}x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Пример

@ Решить уравнение $x^2-(2+i)x+\frac{3}{4}=0$

Решение

$$x_{1,2}=\frac{2+i}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{2+i}{2}\right)^2-\frac{3}{4}}=\frac{2+i}{2}\pm\sqrt{\frac{4+4i-1}{4}-\frac{3}{4}}=1+\frac{i}{2}\pm\sqrt{i}$$

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\qquad \sqrt{i}=\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{2}\right),\ k=0,1$$

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\qquad \omega_1=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x_1=\frac{2+\sqrt{2}}{2}+\frac{1+\sqrt{2}}{2}i\qquad x_2=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+\frac{1-\sqrt{2}}{2}i$$

Пример

@ Вывести формулу: $\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$

Решение

$$z = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad z^3 = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^3$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos^3\varphi + 3i\cos^2\varphi\sin\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi - i\sin^3\varphi$$

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3 = \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi$$

$$\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos^3\varphi(1 + \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi})$$

$$\cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$$

Пример

@ *Найти действительную и мнимую часть* $f(z) = (\bar{z})^2 + 2i - 1.$

Решение

$$f(z) = (\overline{x + iy})^2 + 2i - 1 =$$

$$= (x - iy)^2 + 2i - 1 =$$

$$z = x + iy$$

$$= x^2 - i2xy - y^2 + 2i - 1 =$$

$$= (x^2 - y^2 - 1) + i(2 - 2xy)$$

$$\mathrm{Re}(f(z)) = x^2 - y^2 - 1$$

$$\mathrm{Im}(f(z)) = -2xy + 2$$

Формула Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение: $\dfrac{df(z)}{dz} = f(z)\ ,\ f(o) = 1$

Полагая: $f(z) = \sum a_n z^n \qquad \dfrac{df(z)}{dz} = \sum n a_n z^{n-1}\ ,$

Приходим к соотношениям: $a_{n-1} = n a_n\ ,\ a_0 = 1 \qquad \Rightarrow \quad a_n = \dfrac{1}{n!}\ ,\ n = 1,2,\ldots$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \Rightarrow e^{i\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\varphi)^n}{n!} = 1 + i\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + \ldots =$$

$$= \left[1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \ldots\ldots\right] + i\left[\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \ldots\ldots\right] = \cos\varphi + i\sin\varphi \Rightarrow$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

Формула Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

$$\boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Экспонента и тригонометрические функции

$$z = re^{i\varphi} = r[\cos\varphi + i\sin\varphi]$$

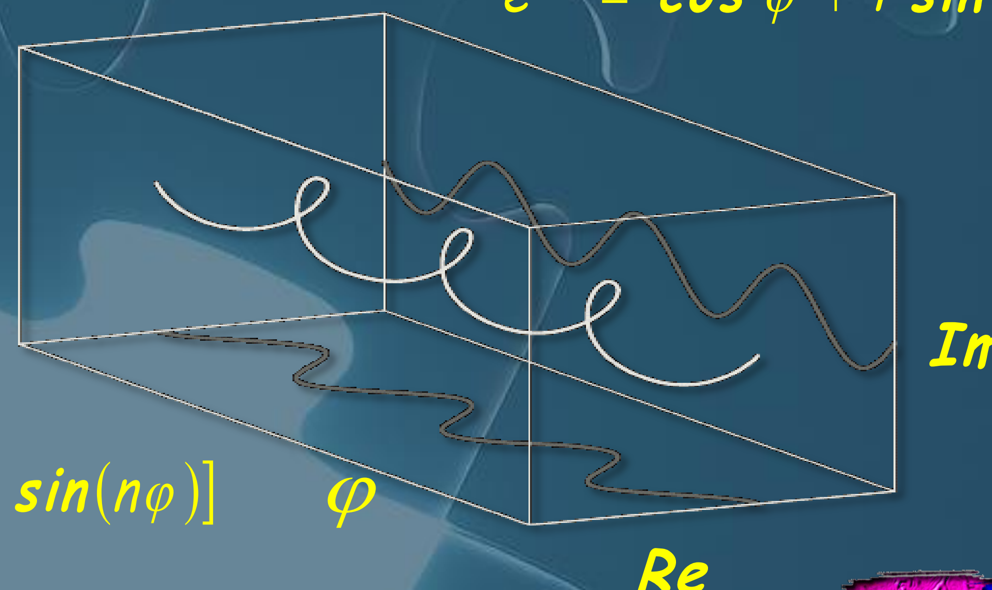
$$g(t) = a_0 e^{i(\varphi-\omega t)} = a_0[\cos(\omega t-\varphi) - i\sin(\omega t-\varphi)]$$

$$f(t) = a_0\cos(\omega t-\varphi) \qquad Re(g(t)) = f(t)$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

$$\sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$$



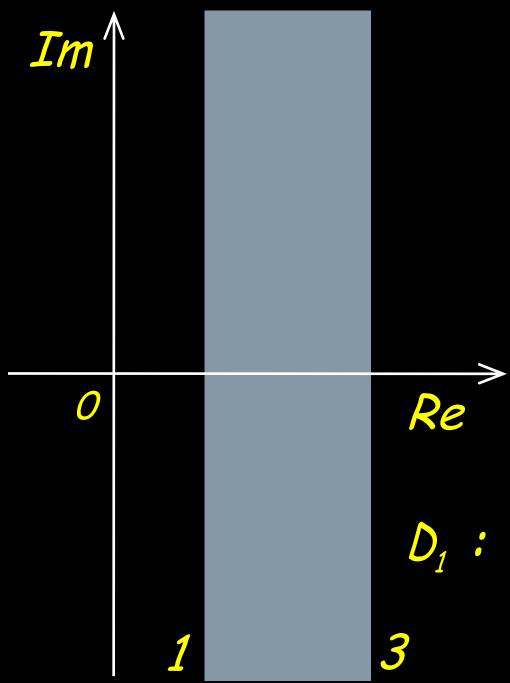
Формула Муавра

$$z^n = r^n e^{in\varphi} = r^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)]$$

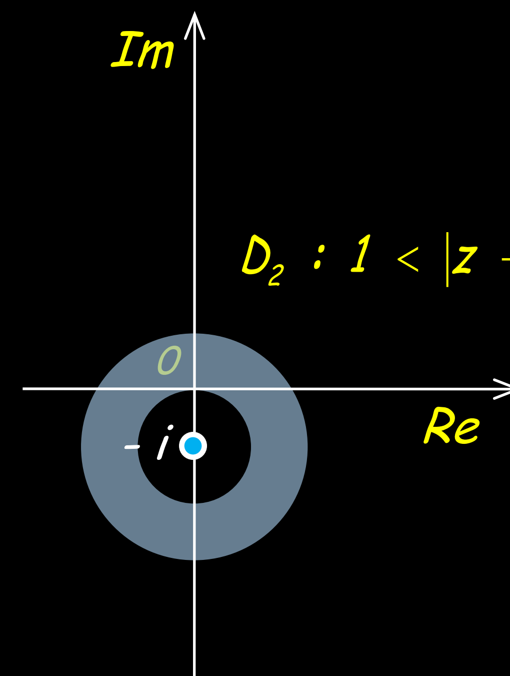
Пример

@ *Какая из областей на комплексной плоскости является не односвязной ?*

Решение



$D_1 : 1 < \mathrm{Re}(z + 5i) < 3$



$D_2 : 1 < |z + i| < 2$