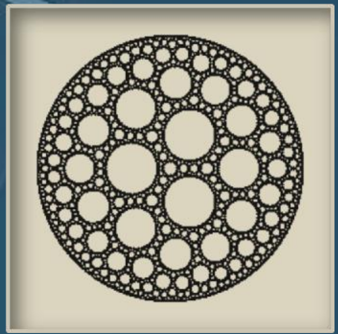
ПОНЯТИЯ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ



{ литература - предмет изучения – история - обозначения и символы - множества и операции над множествами - объединение множеств - пересечение множеств - взаимно-однозначное соответствие между множествами - счетные множества - декартово произведение - алгебраические системы - группы, кольца и поля - иерархия числовых множеств - действительные числа - абсолютная величина - свойства - примеры }

Учебники, задачники и пособия

Курош А.Г. Курс высшей алгебры. - 9-ое изд. -М.: Наука, 1968. - 431 с.

Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. Учебник для вузов, - ФИЗМАТЛИТ, 2002.

Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005.

Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика, т.1. - М.: Дрофа, 2004.

Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пособие для втузов. - М., 2003

Предмет изучения

- Математика - Mathema ($\mu\alpha\theta\eta\mu\alpha$) - познание, наука.

Алгебра - الجبر, “аль-джабр - *восполнение*” - раздел математики, где изучаются операции над элементами множеств произвольной природы, обобщающий обычные операции сложения и умножения чисел.

Абстрактная алгебра (высшая алгебра или общая алгебра) — раздел математики, изучающий алгебраические системы (алгебраические структуры), такие как группы, кольца, поля, частично упорядоченные множества, а также отображения между такими структурами.

Линейная алгебра – раздел алгебры в которой изучаются векторные пространства, включая матрицы.

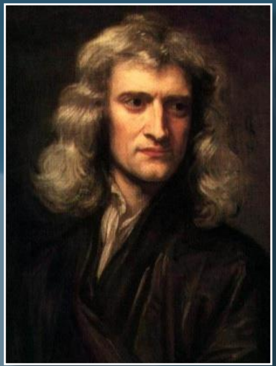
Алгебраическая система - упорядоченная пара множеств *A (R, E)*. Первое множество *(R)* - элементы какой либо природы (числа, понятия). Второе множество *(E)* - операции над первым множеством (сложение, умножение, возведение в степень).

История

Начиная с 16 века алгебра начинает быстро развиваться, благодаря работам Декарта, Валлиса и в особенности Ньютона. после разработки Декартом аналитической геометрии, алгебра входит в тесную связь с геометрией, а также с анализом бесконечно малых, изобретенным Ньютоном и Лейбницем. Труды Эйлера и Лагранжа, изложенные в "Novi Commentarii" и в "Traite de la resolution des equations", довели алгебру до высокой степени совершенства. Работы Гаусса, Абеля, Фурье, Галуа, Коши, а затем Кейли, Сильвестера, Кронекера, Эрмита и др. придали алгебре высокую степень изящества и простоты.

Descartes René
(1596 - 1650)

John Wallis
(1616 - 1703)



Sir Isaac Newton
(1643 – 1727)

Gottfried Wilhelm von Leibniz
(1646 – 1716)

Некоторые обозначения

Для сокращения записи используются следующие обозначения:

$\forall$ *“для каждого; для любого; для всех” (all)*

$\exists$ *“существует; найдется” (exists)*

$:$ *“такой, что; такие, что”*

$:=$ *“по обозначению равно”*

$\to$ *“соответствует, поставлено в соответствие”*

$\Rightarrow$ *“следует”*

$\Leftrightarrow$ *“равносильно”*

Множества и операции над множествами

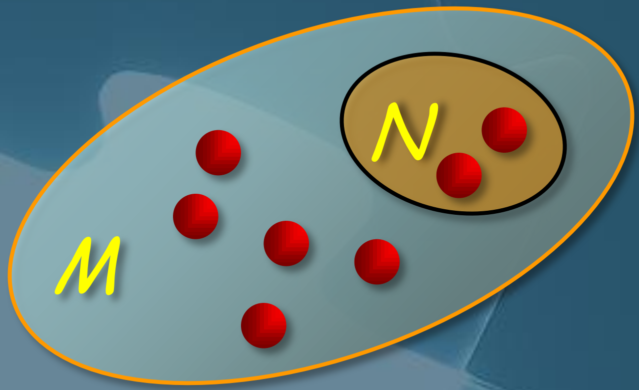
Множество - произвольно определяемая совокупность объектов.

Если объект x принадлежит множеству M, то пишут $x \in M$. При этом x называется элементом или точкой множества M.

Если множество N состоит из тех же элементов, что и множество M, то N называется подмножеством множества M: $N \subseteq M \iff N$ содержится в M.

$$\{a_1, a_2, a_3, \ldots a_n\}$$

$$\{\,\} \quad \varnothing$$



Множества и операции над множествами

Множества равны, если они состоят из одних и тех же элементов :

$$N = M, \text{ если } N \subseteq M \text{ и } M \subseteq N$$

Свойства равенства: $A = A$

$$A = B \to B = A$$

$$(A = B) \wedge (B = C) \to (A = C)$$

Подмножество пар $R \subseteq A \times B$ называется соответствием (отношением) элементам множества A элементов множества B.

Если $A = B$, то соответствие $R \subseteq A \times B$ называется соответствием на A.

Например: знакомство людей друг с другом.

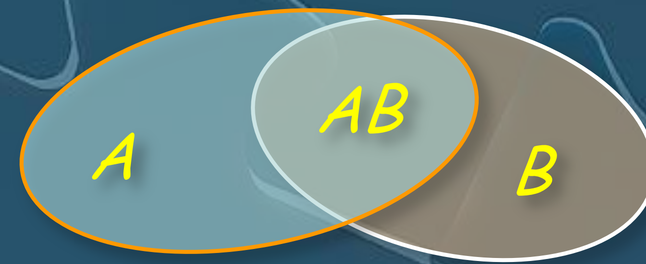
Декартовым произведением $A \times B$ называется множество упорядоченных пар, первый элемент которых принадлежит A, а второй - B

$$\{(a, b) : a \in A, b \in B\}$$

Множества и операции над множествами

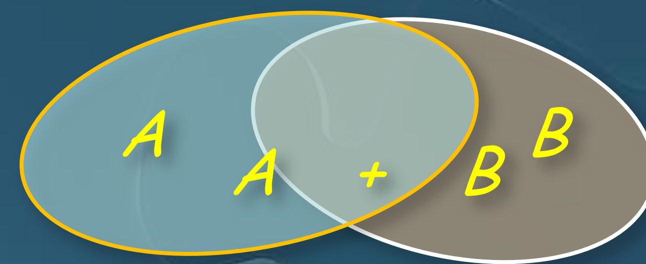
Пересечение (умножение)

$$A \cap B \qquad AB$$



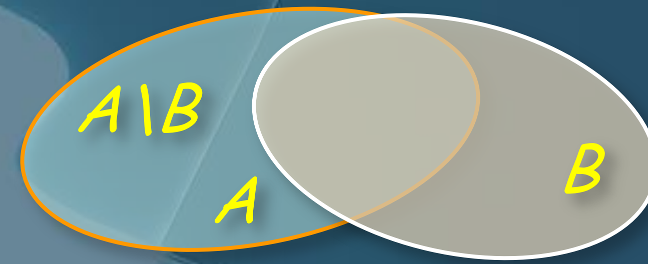
Объединение (сумма)

$$A \cup B \qquad A + B$$



Разность $A \setminus B$

Дополнение $\setminus B \qquad A \cap \setminus B = A \setminus B$



Прямое произведение $A \times B$

Пример

@ Пусть C – множество процессоров, F – числовое множество частот ядра.

Каждому процессору $c \in C$ соответствует несколько значений $f_1, f_2,$ . . . частот, на которых оно может работать: , ... $c \mapsto f_1$ $c \mapsto f_2$

Количество ядер	4	4	4
Частота (f)	3,20 ГГц	2,93 ГГц	2,66 ГГц

Это означает, что пары $(c, f_1), (c, f_2)$, ... принадлежат множеству $R \subseteq C \times F$, которое является соответствием процессоров и их частот.

Неработающему процессору не соответствует ни одна частота.

Пример

@ Найти $X \times Y$ и $Y \times X$ если $X = \{1,2,3\}$ $Y = \{0,1\}$

Решение

$$X \times Y = \{(1,0),(1,1),(2,0),(2,1),(3,0),(3,1)\}$$

$$Y \times X = \{(0,1),(0,2),(0,3),(1,1),(1,2),(1,3)\}$$

Найти 3-кратное декартово произведение $X^3 : \{0, 1, 2\}^3$.

Решение

$$X^3 = X \times X \times X$$

000	001	002	010	011	012	020	021	022
100	101	102	110	111	112	120	121	122
200	201	202	210	211	212	220	221	222

$\{0, 1, 2\}^3$, $3^3 = 27$ элементов

Пример

@ Даны множества $M_1 = \{d, e\}$, $M_2 = \{1, 3\}$, $M_3 = \{b, y\}$.

Найти прямое произведение $M_2 \times M_3 \times M_1$.

Решение

Декартовым произведением $M_2 \times M_3 \times M_1$ является множество упорядоченных троек (x,y,z), где $x \in M_2,\ y \in M_3,\ z \in M_1$

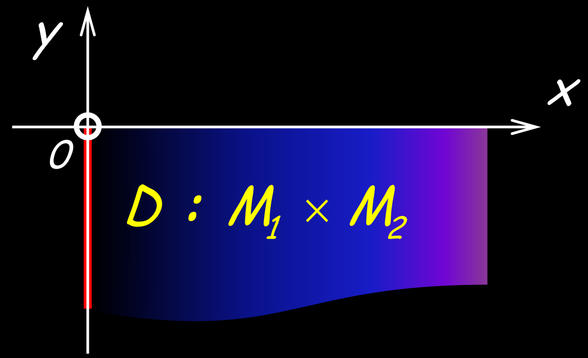
$$M_2 \times M_3 \times M_1 =$$
$$= \{(1, b,d),(1, b,e),(1, y,d),(1, y,e),(3, b,d),(3, b,e),(3, y,d),(3, y,e)\}$$

Даны множества

$M_1 = \{a \in R, a \geq 0\}$,

$M_2 = \{b \in R, b < 0\}$

Найти произведение $M_1 \times M_2$.



Отображением из множества A в B называется соответствие φ, которое каждому элементу $a \in A$ сопоставляет элемент $\varphi(a) \in B$

Отображение $*$ множества $A \times A$ в A называют *бинарной алгебраической операцией* на множестве A.

Образ пары $(a, b) \in A \times A$ записывают как $a * b$.

Естественными примерами алгебраических операций являются сложение “ + ” и умножение “ · “ чисел.

Пример: проверить, что вычитание “ - ” является алгебраической операцией на множествах Z, Q, R, но не является таковой на множестве N.

Пример

@ *Дано множество чисел вида* $a+\sqrt{7}b$, *где* $a,b \in R$. *Найти обратное число для числа* $1-2\sqrt{7}$ *относительно операции умножения.*

Решение

По определению элемент a является обратным элементу $b \in M$, если : $a \in M$, $a \cdot b = b \cdot a = 1$.

$$1-2\sqrt{7} \Rightarrow \frac{1}{1-2\sqrt{7}}$$ - обратный элемент

$$\frac{1}{1-2\sqrt{7}} = \frac{1}{(1-2\sqrt{7})}\frac{(1+2\sqrt{7})}{(1+2\sqrt{7})} = \frac{1+2\sqrt{7}}{-27} = -\frac{1}{27} - \frac{2\sqrt{7}}{27}$$

$$a+\sqrt{7}b \Leftarrow -\frac{1}{27} - \sqrt{7}\frac{2}{27}$$

Группы, кольца, поля

Основными объектами изучения в алгебре являются *алгебраические системы* – множества с заданными на них операциями.

Главное значение имеют свойства заданных на множествах алгебраических операций.

Система $(G,*)$ называется группой, если выполняются следующие условия:

- $\forall a,b,c \in G : (a*b)*c = a*(b*c)$ - асоциативность
- $\exists \mathring{a} \in G : \forall \mathring{a} \in G : \mathring{a}*a = a*e$ - существование нейтрального элемента
- $\forall a \in G\ \exists a' \in G : a*a' = a'*a = e$ - существование обратного элемента

Если дополнительно выполняется условие:

- $\forall a,b \in G : a*b = b*a$ - коммутативность

то группа называется *абелевой*.

Пример

@ *Относительно каких операций множество вырожденных матриц порядка 2 образует абелеву (коммутативную) группу ?*

Относительно сложения " + "? *Относительно умножения " * "?*

Относительно деления " / "? *При транспонировании матриц " A^{-1} "?*

Решение

Группа – множество G с одной операцией, ассоциативной, причем для этой операции должна существовать обратная операция. Если операция, определенная в группе G коммутативная, то G – абелева группа.

Только для операции сложения группа G – абелева. $A + B = B + A$.

Для операции умножения не выполняется условие $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Операция транспонирования не является бинарной.

Для операции деления нужно умножать на обратную матрицу, а ее нет.

Группы, кольца, поля

Знак операции определяет *аддитивную* и *мультипликативную* терминологии.

$* \Rightarrow \quad \bullet, \quad e = 1, \quad a' = a^{-1}$ мультипликативность

$* \Rightarrow \quad +, \quad e = 0, \quad a' = -a$ аддитивность

Множества Z, Q, R абелевы группы относительно сложения,

$Q^* = Q \setminus \{0\}$ $\quad R^* = R \setminus \{0\}$ - относительно умножения.

Система $(R, +, \bullet)$ называется *кольцом*, если выполняются условия:

- $(R, +)$ - абелева группа
- $\forall a, b, c \in R : (a + b)c = ac + bc \wedge a(b + c) = ab + ac$

- дистрибутивность

Если $(R \setminus \{0\}, \bullet)$ - абелева группа, то кольцо R называется *полем*.

Пример

@ *Какую алгебраическую структуру образует множество Z ?*

Решение

Множество Z - множество целых чисел, получаемое из множества натуральных числе N добавкой нейтрального и обратного элемента относительного сложения и нейтрального элемента относительно умножения.

$$* \Rightarrow +, \quad e = 0, \quad a' = -a \quad * \Rightarrow \bullet, \quad e = 1$$

Z - абелева группа и выполняется дистрибутивный закон.

Таким образом множество Z является коммутативным ассоциативным кольцом с единицей

Иерархия числовых множеств

Натуральные числа строятся из пустого множества рекурсивно: $1 = \{0\}$, $2 = \{1,0\}$, $3 = \{2,1,0\}$, $4 =\{3,2,1,0\}$, ...

Структура $(N, <, +, \cdot)$ - натуральные числа с заданными ней стандартными бинарными операциями сложения и умножения и отношением $<$, которое упорядочивает натуральные числа по величине. Добавка нейтрального и обратного элемента позволяет пополнить множество N до Z - *целых чисел*.

Множество Z дополняется операцией умножения до множества рациональных чисел $Q = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N\right\}$

Множество Q можно пополнить до множества R *действительных чисел* с операциями $+$ и $\cdot$, отношением $<$.

$$N \subset Z \subset Q \subset R$$

Множество U комплексных чисел – будет введено позже.

Пример

@ *Определена ли операция деления для всех ненулевых элементов множества многочленов P_n ? Для множества рациональных чисел Z ?*

Решение

На множестве M задана бинарная операция, если указано правило сопоставления некоторым парам элементов из M , взятым в определенном порядке, элемент из того же множества M .

Для многочленов это не выполняется. При их делении частное может не быть многочленом.

На множестве рациональных чисел операция деления возможна.

$$\frac{p_1}{q_1} \in Q, \ \frac{p_2}{q_2} \in Q \quad p_1, p_2, q_1, q_2 \in Z$$

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2}{p_2 \cdot q_1} \qquad p_1 \cdot q_2, \ p_2 \cdot q_1 \in Z$$

Действительные числа

Пусть $(M, <)$ – линейно упорядоченное множество. Если M можно представить в виде объединения множеств A и B таких, что для $a \in A,\ b \in B$ имеет место $a < b$ то пара (A,B) называется сечением множества $M : A|B$.

Множество R - совокупность всех таких сечений.

Свойства действительных чисел

$\forall x, y \in R : x + y = y + x$ - коммутативность сложения

$\forall x, y, z \in R : (x + y) + z = x + (y + z)$ - ассоциативность сложения

$\exists 0 \in R : \forall x \in R : x + 0 = x$ - нейтральный элемент : ноль

$\forall x \in R : \exists -x \in R : x + (-x) = 0$ - обратный элемент

$\forall x, y \in R : x \cdot y = y \cdot x$ - коммутативность умножения

$\forall x, y, z \in R : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ - ассоциативность умножения

Действительные числа

$\exists 1 \in R : \forall x \in R : x \cdot 1 = x$ - нейтральный элемент : единица

$\forall x \in R \setminus \{0\} : \exists x^{-1} \in R : x \cdot x^{-1} = 1$ - обратный элемент

$\forall x, y, z \in R : x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ - дистрибутивность

$\forall x \in R : x \not< x$ - антирефлексивность

$\forall x, y, z \in R : (x < y) \wedge (y < z) \rightarrow (x < z)$ - транзитивность

$\forall x, y \in R : (x < y) \vee (x = y) \vee (x > y)$ - связность

$\forall x, y, z \in R : (x < y) \rightarrow (x + z < y + z)$ - связь $+$ и $<$

$\forall x, y, z \in R : (x < y) \wedge (z > 0) \rightarrow (x \cdot z < y \cdot z)$ - связь $\cdot$ и $<$

Действительные числа

Если $A|B$ – сечение R, то $\exists x \in R : \forall a \in A, b \in B : a \le x \le b$ - непрерывность, полнота

Структура $(R, <, +, \cdot)$ называется *полем действительных чисел*

Если $X \subseteq R$ ограничено сверху, то существует $\sup X \in R$; если $X \subseteq R$ ограничено снизу, то существует $\inf X \in R$.

Эта теорема эквивалентна *аксиоме непрерывности*

Определение функции $|x|$:

$|x| = x, x \ge 0$, $|x| = -x, x < 0$

$|x| : |x| \ge 0;\ |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ |xy| = |x||y|;$

$|x + y| \le |x| + |y|;\ \ |x - y| \ge \big||x| - |y|\big|$