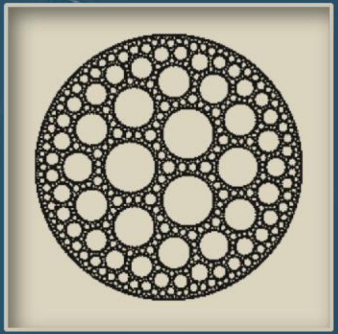
ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ



{ общее уравнение прямой на плоскости – уравнение прямой с угловым коэффициентом – векторная и параметрическая формы уравнения прямой – совместное исследование уравнений двух прямых – пучок прямых – нормальное уравнение прямой – угол между двумя прямыми – примеры }

Общее уравнение прямой на плоскости

- *Линейным уравнением* относительно неизвестных x, y называется уравнение вида

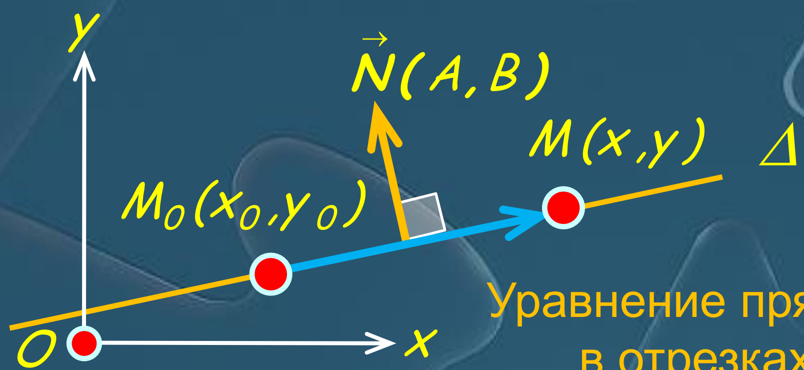
$$Ax + By + C = 0 \qquad (1)$$

где коэффициенты A, B не равны нулю одновременно.

Можно доказать, что всякое *линейное уравнение* есть уравнение некоторой прямой и всякая прямая может быть заданы в аффинной системе координат *линейным уравнением*.

Вывод общего уравнение прямой на плоскости

- $\overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{N}=0$



$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$$

$$Ax+By+(-Ax_0-By_0)=0$$

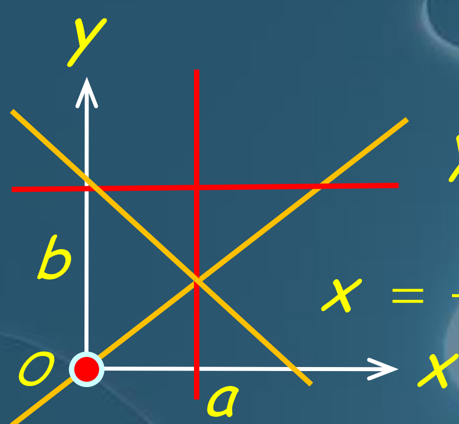
$$C=-Ax_0-By_0$$

$$Ax+By+C=0$$

Общее уравнение прямой

Уравнение прямой
в отрезках

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$



Частные случаи

$C=0 \qquad Ax+By=0$

$$y=-\frac{A}{B}x=kx$$

$B=0,\ C\neq 0 \qquad Ax+C=0$

$$x=-\frac{C}{A}$$

$$y=-\frac{C}{B}$$

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1$$

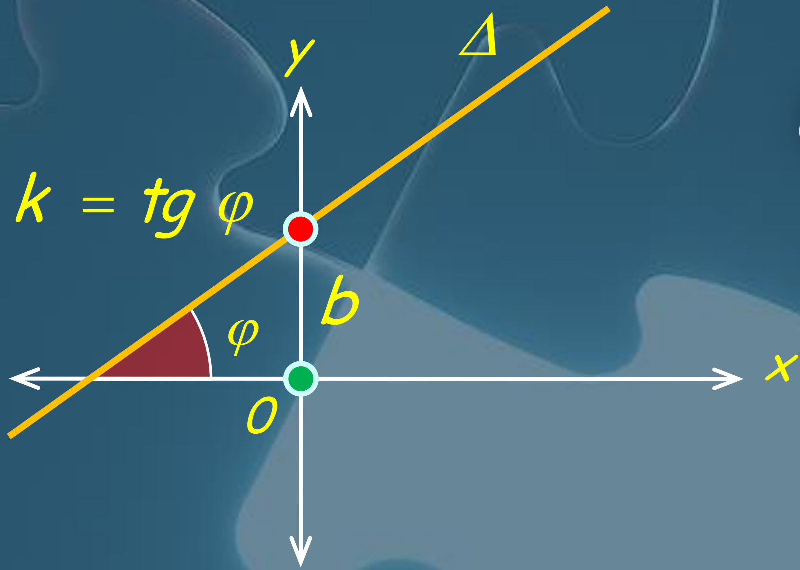
Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

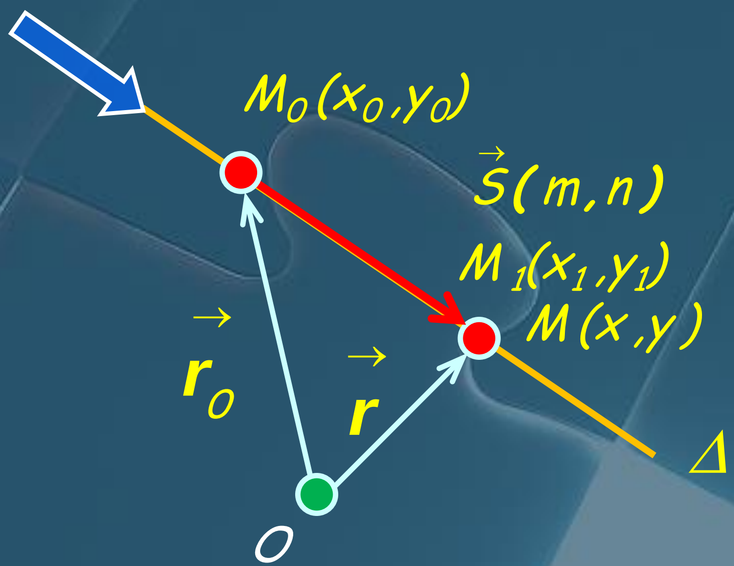
$$y = kx + b$$

$$k = tg\,\varphi$$



Векторная и параметрическая формы уравнения

- *Векторное параметрическое уравнение прямой*, проходящей через точку M_0 параллельно вектору **s**



$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}(m,n)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{s}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

Канонические уравнения

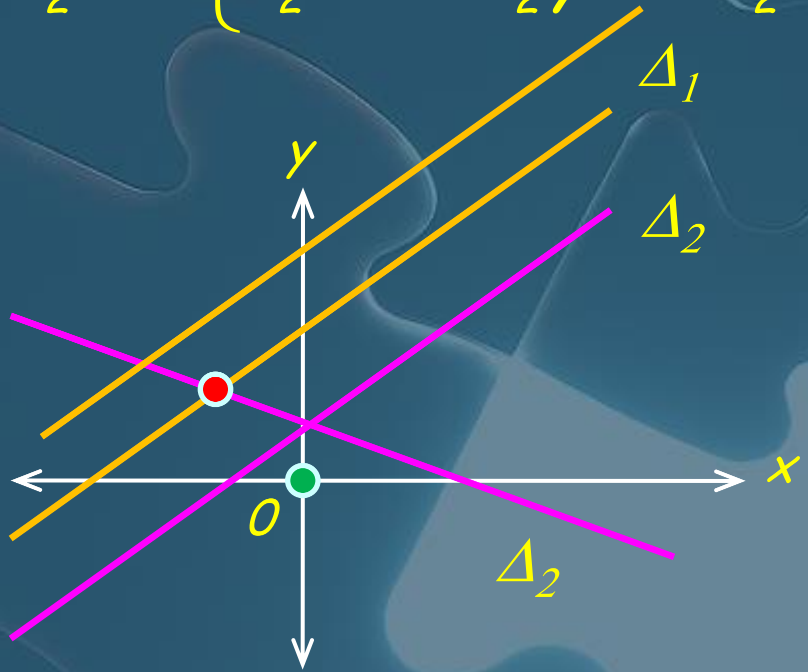
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad m \vee n \neq 0$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$

Совместное исследование уравнений двух прямых

$$\begin{aligned} \Delta_1 &: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \\ \Delta_2 &: \end{aligned}$$



Условие пересечения двух прямых

- $$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

Условие параллельности двух прямых

- $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Условие совпадения двух прямых

- $$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Пучок прямых

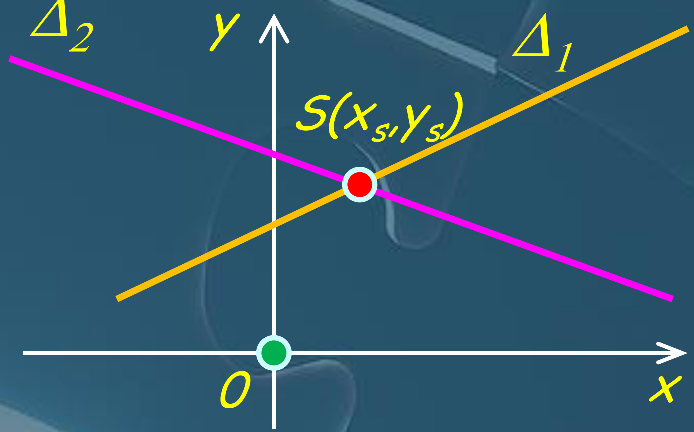
Пучком прямых называется множество всех прямых, проходящих через некоторую точку S, называемую *центром пучка*.

Пусть заданы уравнения двух пересекающихся прямых:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

$$y - y_S = \lambda(x - x_S)$$

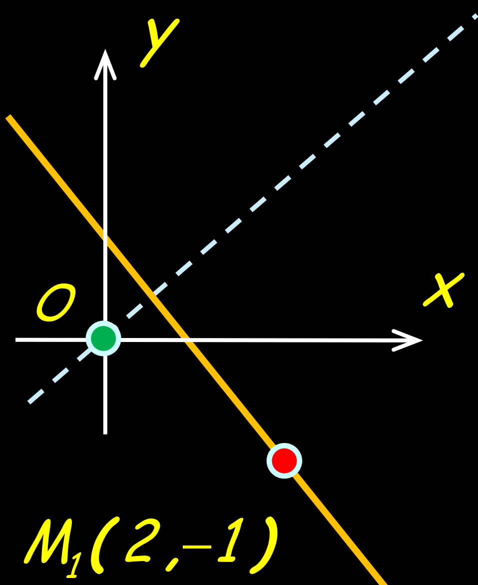


Если λ некоторое число, то уравнение

$$A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

задает некоторую прямую пучка, определяемого заданными прямыми (1) и (2). Обратно, любая прямая этого пучка может быть задана этим уравнением при некоторых λ.

Вывести уравнение прямой, перпендикулярной биссектрисе первого координатного угла и проходящей через точку $M_1(2,-1)$



Решение

$$y = kx + b$$

$$k = tg(-45^0) = -1$$

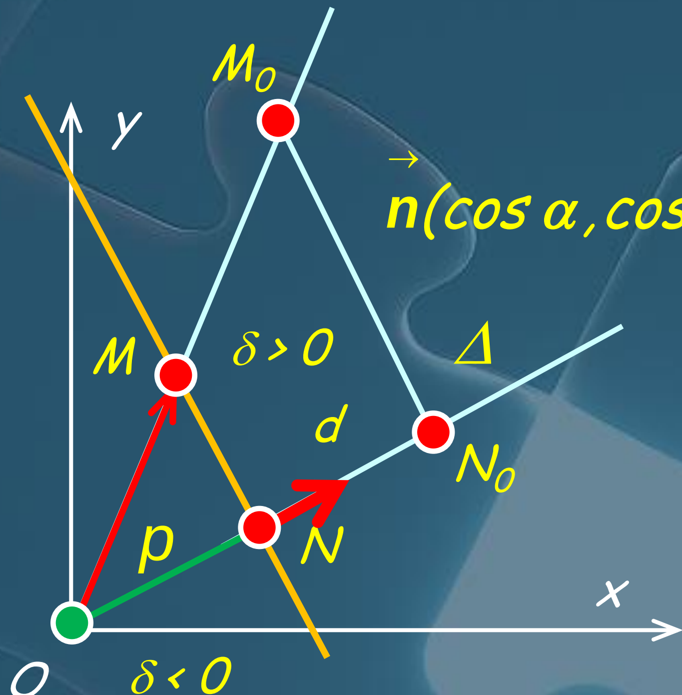
$$M_1(2,-1) \Rightarrow -1 = -1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 1$$

$$y = -x + 1$$

Нормальное уравнение прямой

$$p = \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} \qquad \overrightarrow{OM} \cdot \vec{n} - p = 0$$

$$x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0$$



$\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta)$

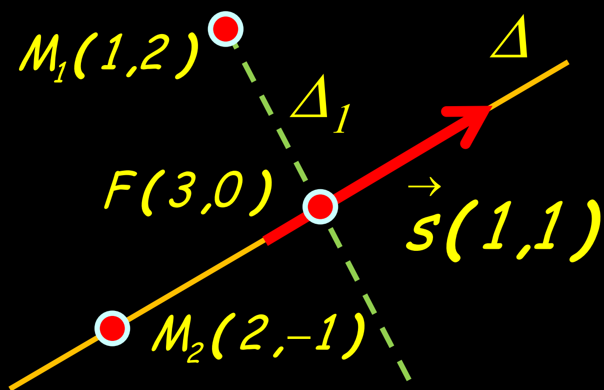
Пусть $M_0(x_0, y_0)$ – произвольная точка пространства, d – расстояние от точки M_0 до прямой Δ, δ – отклонение точки от плоскости (имеет знак плюс, если точка лежит в положительном полупространстве, и знак минус, если лежит в отрицательной его части). Имеют место формулы:

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta - p$$

$$d = \left| x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta - p \right|$$

Пример

@ Найти проекцию точки $M_1(1,2)$ на прямую Δ, проходящую через точку $M_2(2,-1)$ в направлении вектора **s** $(1,1)$. Найти расстояние M_1F.



Решение

$$\Delta: \ \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1}$$

$$\Delta: \ x - y - 3 = 0$$

$$\Delta_1: \ (x-1)\cdot 1 + (y-2)\cdot 1 = 0$$

$$\Delta_1: \ x + y - 3 = 0$$

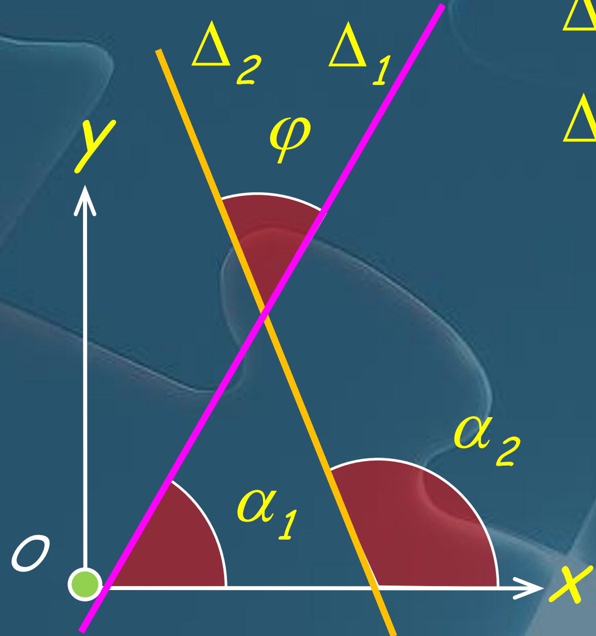
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1F = \frac{\sqrt{2}}{2}\left|x_1 - y_1 - 3\right| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left|1 - 2 - 3\right| = 2\sqrt{2}$$

$$M_1F = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

Определение угла между прямыми



$$\Delta_1 : \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$\Delta_2 : \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\begin{cases} A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \\ k_2 = -(1/k_1) \end{cases} \qquad \Delta_1 \perp \Delta_2$$

$$\Delta_1 : \quad y = k_1x + b_1$$

$$\Delta_2 : \quad y = k_2x + b_2$$

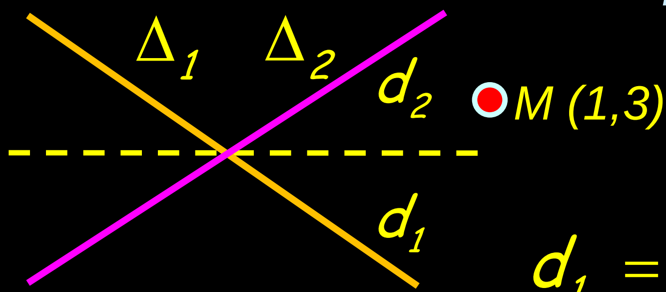
$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$$

@ *Найти биссектрису острого угла, образованного двумя прямыми Δ_1, Δ_2 и содержащего точку M (1,3)*

Решение

$$\Delta_1 : \; x - 2y + 1 = 0$$

$$\Delta_2 : \; 4x + 2y - 7 = 0$$



$$d_1 = d_2 \qquad \frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x + 2y - 7|}{\sqrt{20}}$$

$$-\frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}} = \frac{4x + 2y - 7}{\sqrt{20}}$$

$$6x - 2y - 5 = 0$$