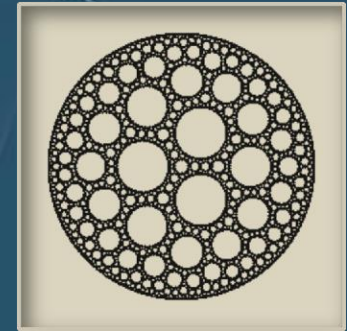


# ПРЯМАЯ НА ПЛОСКОСТИ



{ общее уравнение прямой на плоскости – уравнение прямой с угловым коэффициентом – векторная и параметрическая формы уравнения прямой – совместное исследование уравнений двух прямых – пучок прямых – нормальное уравнение прямой – угол между двумя прямыми – примеры }



# Общее уравнение прямой на плоскости

- *Линейным уравнением* относительно неизвестных  $x, y$  называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0 \quad (1)$$

где коэффициенты  $A, B$  не равны нулю одновременно.

Можно доказать, что *всякое линейное уравнение* есть уравнение некоторой прямой и *всякая прямая* может быть заданы в аффинной системе координат *линейным уравнением*.



# Вывод общего уравнение прямой на плоскости

•  $\vec{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

$$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$$

$$C = -Ax_0 - By_0$$

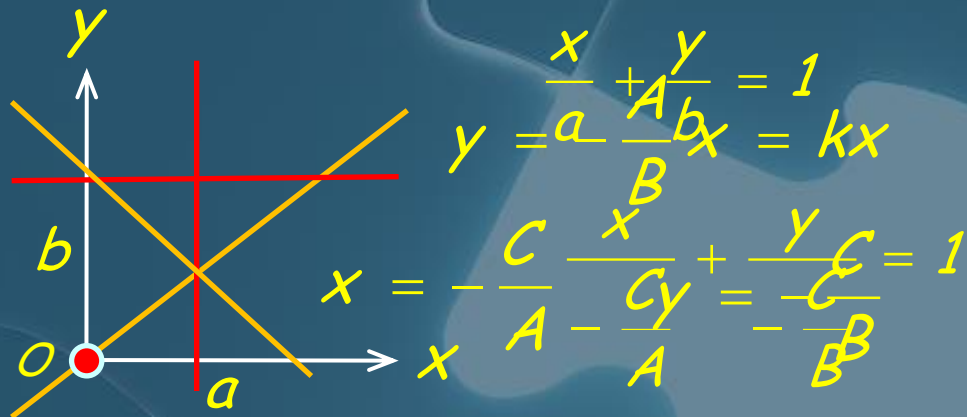
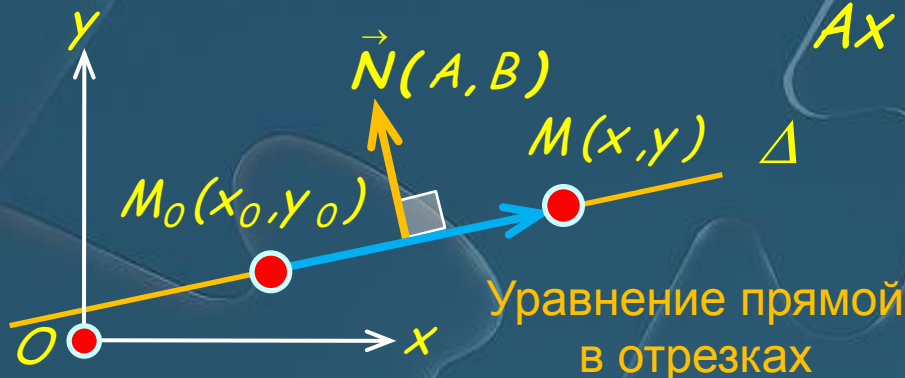
$$Ax + By + C = 0$$

Общее уравнение прямой

Частные случаи

$$C = 0 \quad Ax + By = 0$$

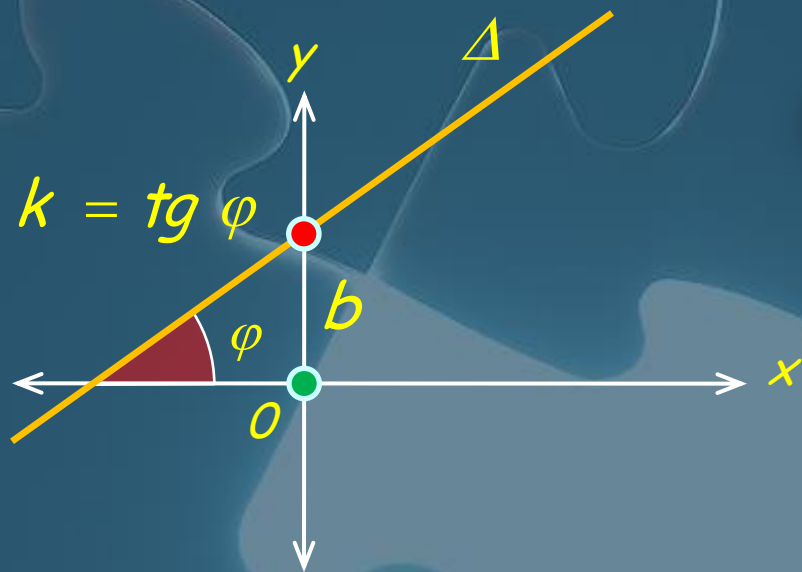
$$B = 0, C \neq 0 \quad Ax + C = 0$$



# Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

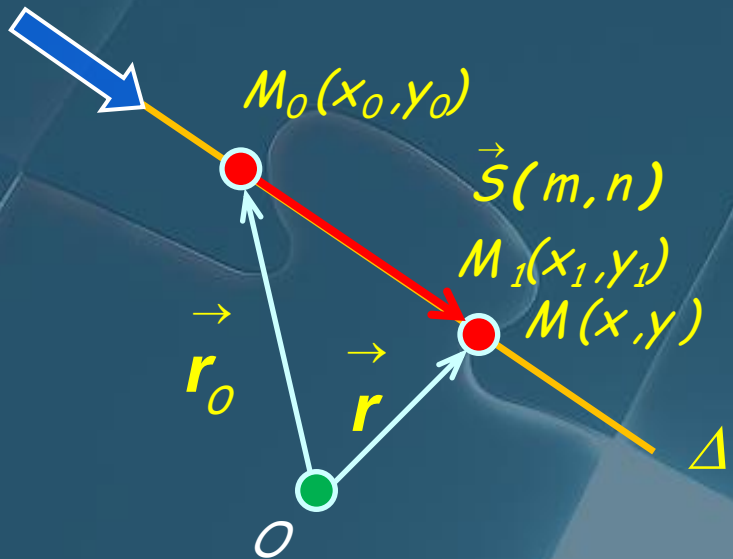


- $y = kx + b$



# Векторная и параметрическая формы уравнения

- Векторное параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0$  параллельно вектору  $\mathbf{s}$



$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{M_0M} \parallel \vec{s}(m, n)$$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t \vec{s} \quad \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t \vec{s}$$

Канонические уравнения

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}, \quad m \vee n \neq 0$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}$$



# Совместное исследование уравнений двух прямых

$$\Delta_1 : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Условие пересечения двух прямых

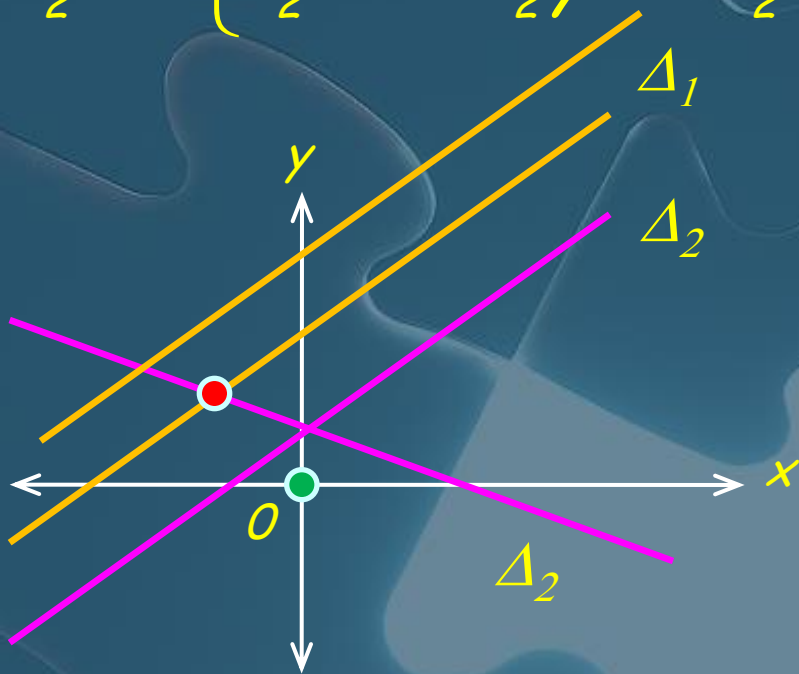
$$\bullet \quad \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$$

Условие параллельности двух прямых

$$\bullet \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$

Условие совпадения двух прямых

$$\bullet \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



# Пучок прямых

**Пучком прямых** называется множество всех прямых, проходящих через некоторую точку  $S$ , называемую *центром пучка*.

Пусть заданы уравнения двух пересекающихся прямых:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

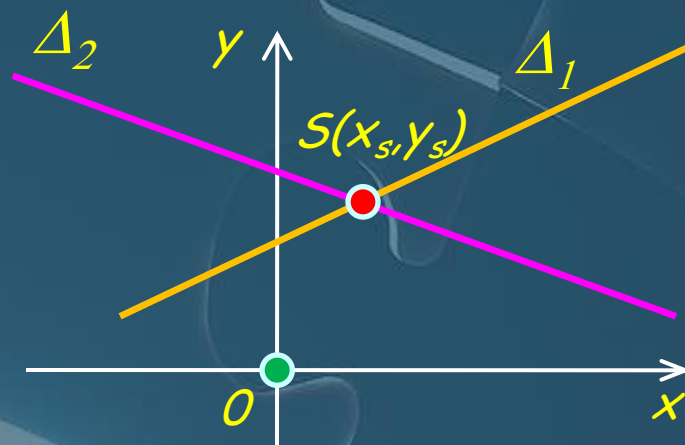
$$A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

$$y - y_s = \lambda(x - x_s)$$

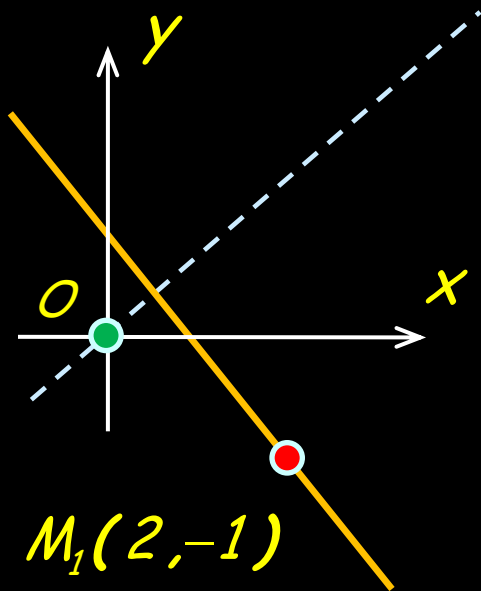
Если  $\lambda$  некоторое число, то уравнение

- $A_1x + B_1y + C_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2) = 0$

задает некоторую прямую пучка, определяемого заданными прямыми (1) и (2). Обратно, любая прямая этого пучка может быть задана этим уравнением при некоторых  $\lambda$ .



@ Вывести уравнение прямой, перпендикулярной биссектрисе первого координатного угла и проходящей через точку  $M_1(2, -1)$



Решение

$$y = kx + b$$

$$k = \operatorname{tg}(-45^\circ) = -1$$

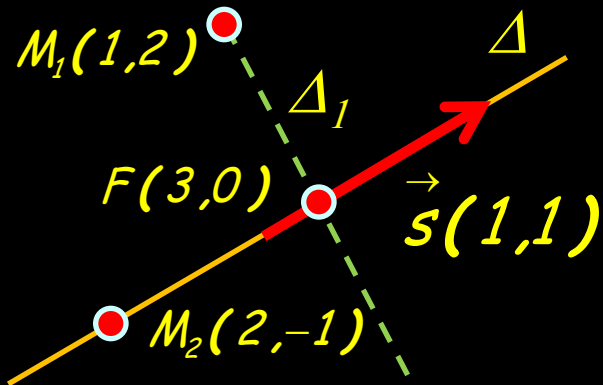
$$M_1(2, -1) \Rightarrow -1 = -1 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 1$$

$$y = -x + 1$$





@ Найти проекцию точки  $M_1(1,2)$  на прямую  $\Delta$ , проходящую через точку  $M_2(2,-1)$  в направлении вектора  $\mathbf{S}(1,1)$ . Найти расстояние  $M_1F$ .



Решение

$$\Delta : \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1}$$

$$\Delta : x - y - 3 = 0$$

$$\Delta_1 : (x-1) \cdot 1 + (y-2) \cdot 1 = 0$$

$$\Delta_1 : x + y - 3 = 0$$

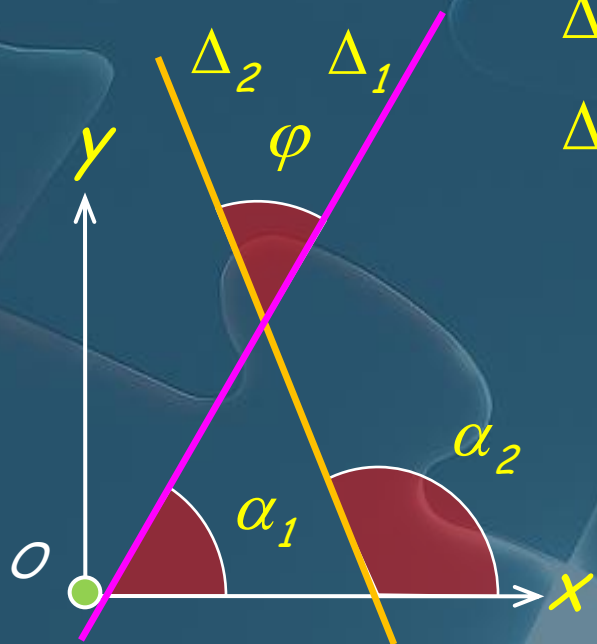
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M_1F = \frac{\sqrt{2}}{2} |x_1 - y_1 - 3| =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} |1 - 2 - 3| = 2\sqrt{2}$$

$$M_1F = \sqrt{(1-3)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{2}$$

# Определение угла между прямыми



$$\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

$$\begin{cases} A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \\ k_2 = -(1/k_1) \end{cases} \quad \Delta_1 \perp \Delta_2$$

$$\Delta_1 : y = k_1x + b_1$$

$$\Delta_2 : y = k_2x + b_2$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$$

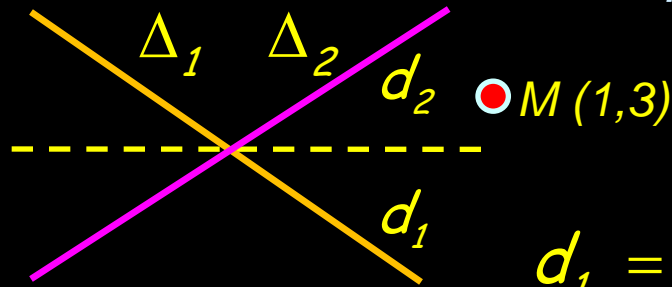


@ Найти биссектрису острого угла, образованного двумя прямыми  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  и содержащего точку  $M(1,3)$

Решение

$$\Delta_1 : x - 2y + 1 = 0$$

$$\Delta_2 : 4x + 2y - 7 = 0$$



$$d_1 = d_2$$

$$\frac{|x - 2y + 1|}{\sqrt{5}} = \frac{|4x + 2y - 7|}{\sqrt{20}}$$

$$-\frac{x - 2y + 1}{\sqrt{5}} = \frac{4x + 2y - 7}{\sqrt{20}}$$

$$6x - 2y - 5 = 0$$