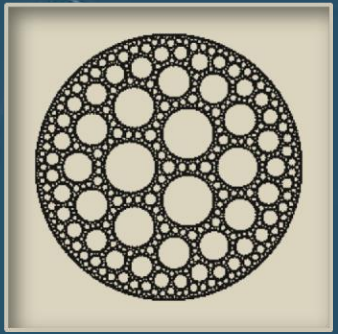
ПЛОСКОСТЬ В ПРОСТРАНСТВЕ



{ общее уравнение плоскости – уравнение плоскости в отрезках на осях –совместное исследование уравнений двух плоскостей – пучок и связка плоскостей – нормальное уравнение плоскости – примеры }

Общее уравнение плоскости

- *Линейным уравнением* относительно неизвестных x, y, z называется уравнение вида

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

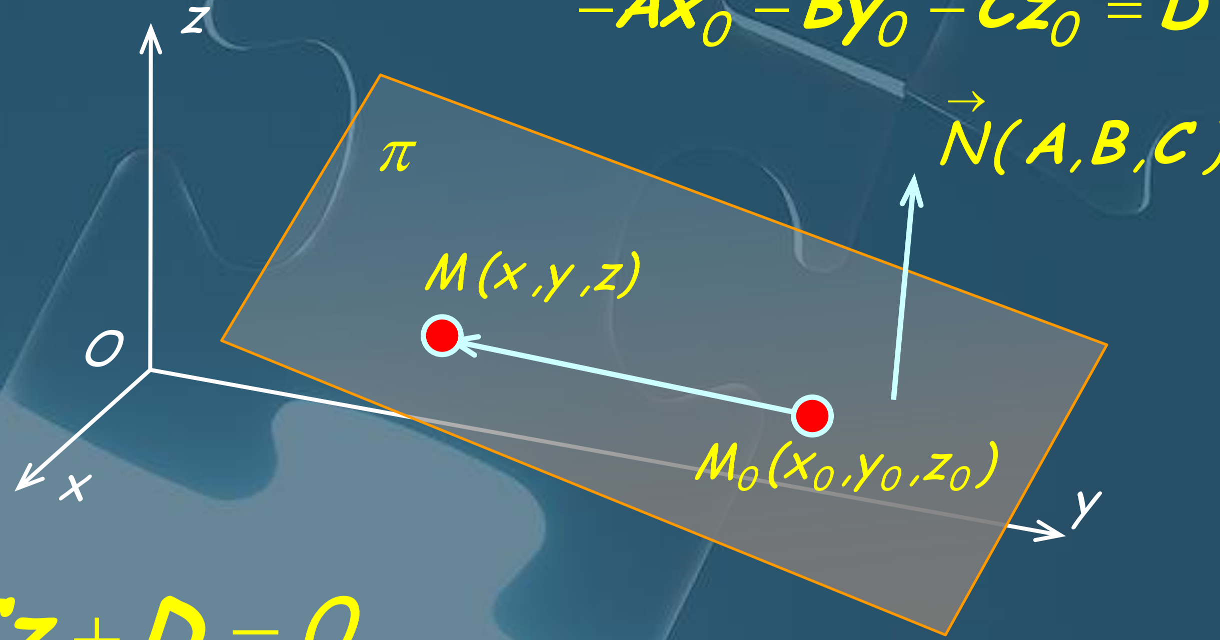
где коэффициенты A, B, C не равны нулю одновременно.

Можно доказать, что всякое *линейное уравнение* есть уравнение некоторой плоскости и всякая плоскость может быть заданы в аффинной системе координат *линейным уравнением*.

Вывод общего уравнение плоскости

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0, \qquad A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

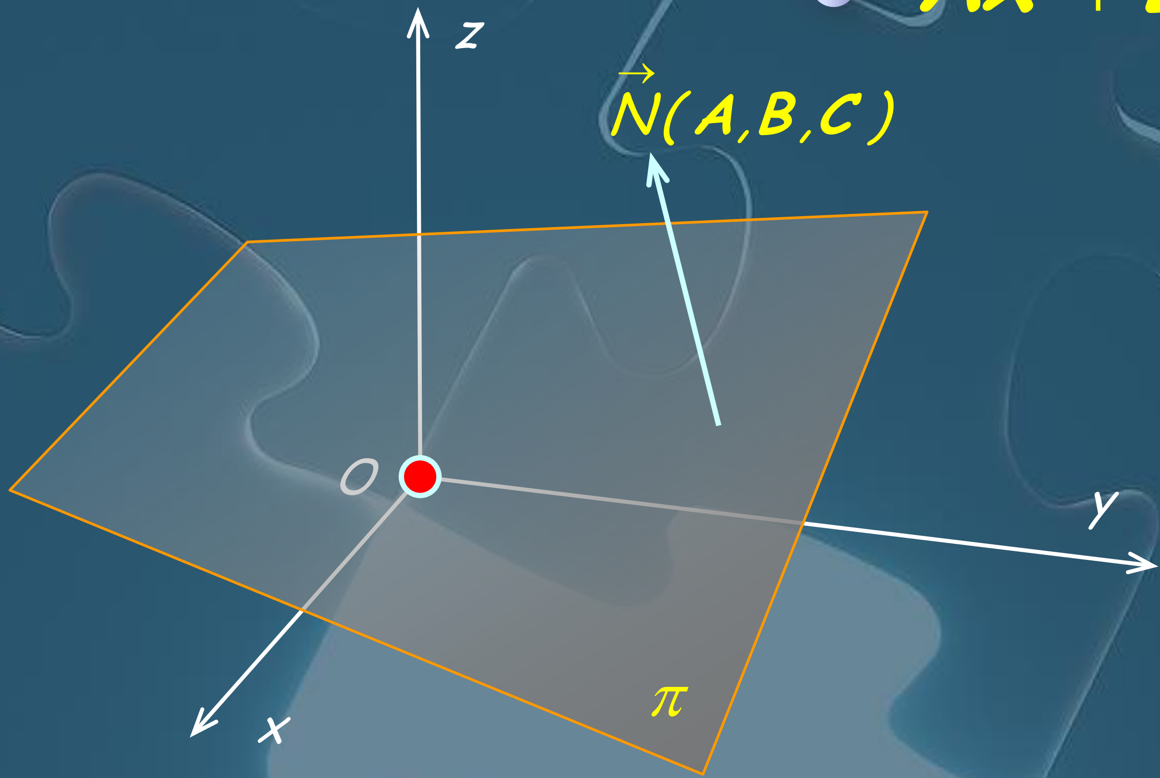
$$-Ax_0 - By_0 - Cz_0 = D$$



$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$$Ax + By + Cz = 0$$

$$D = 0$$

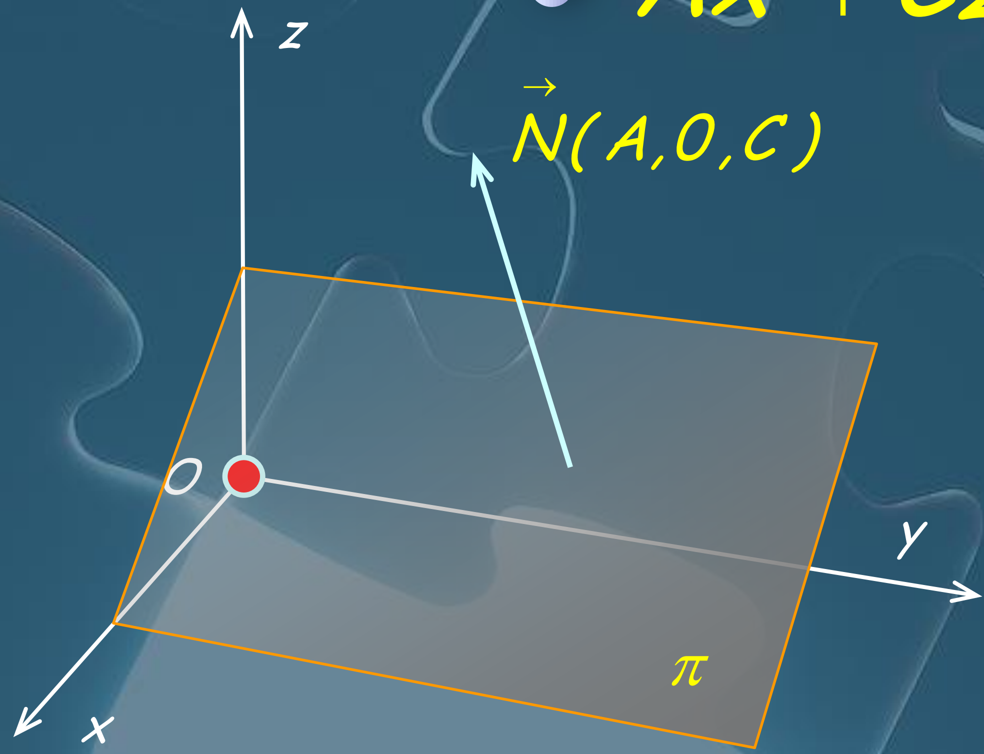


Частные случаи

- $$Ax + Cz + D = 0$$

$$B = 0$$

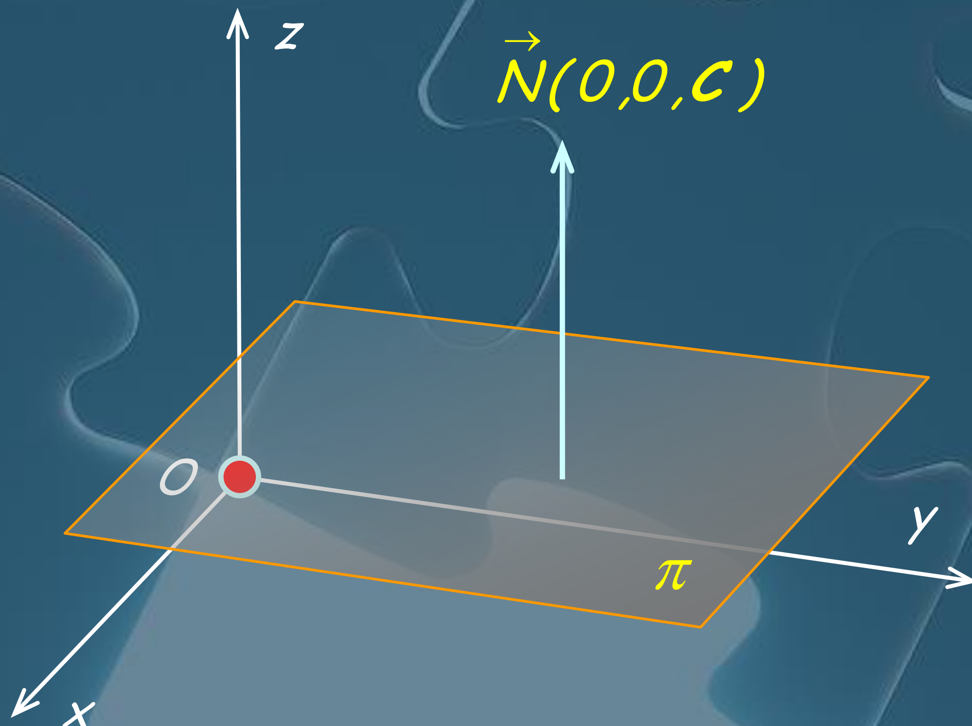
$\vec{N}(A, 0, C)$



Частные случаи

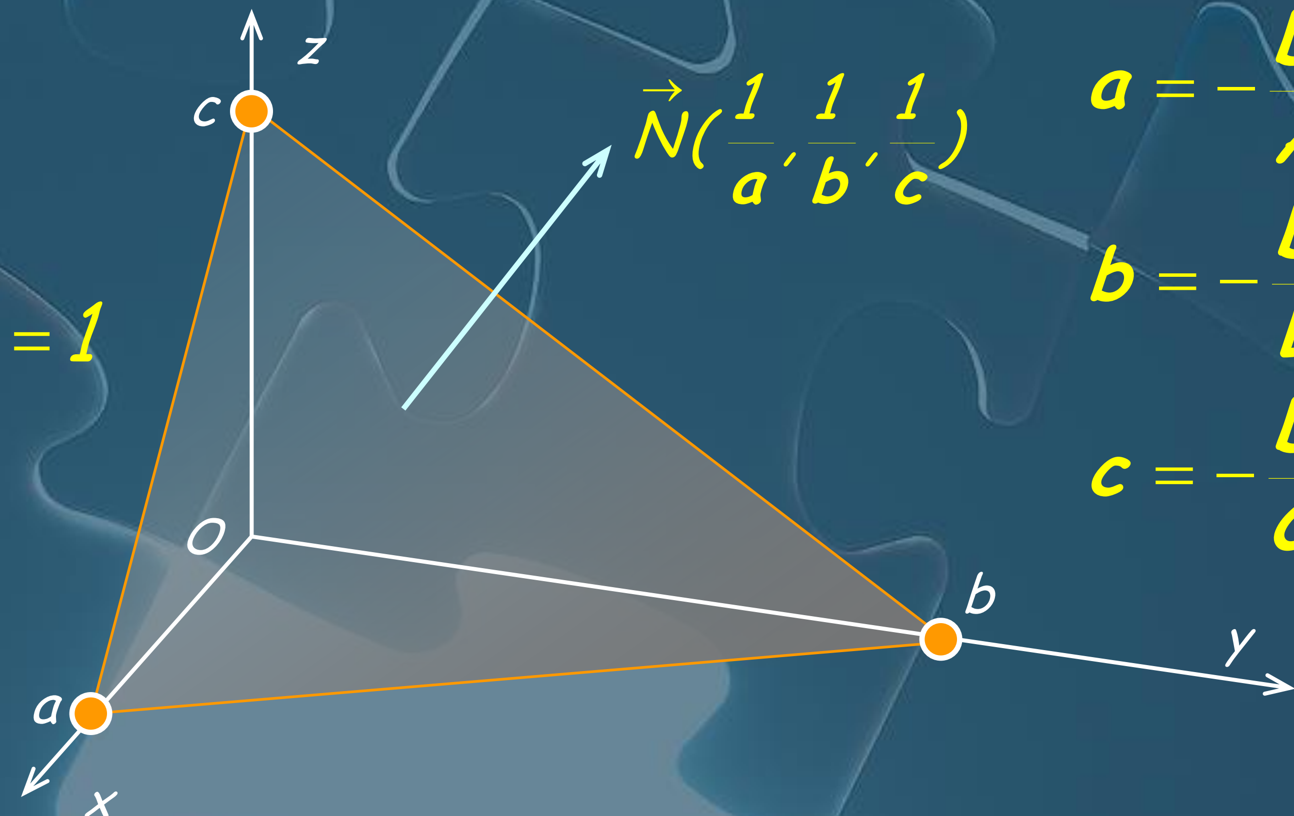
- $Cz + D = 0$

$$A = 0$$
$$B = 0$$



Уравнение плоскости в отрезках на осях

- $$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$



$$\vec{N}\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$$

$$a=-\frac{D}{A}$$

$$b=-\frac{D}{B}$$

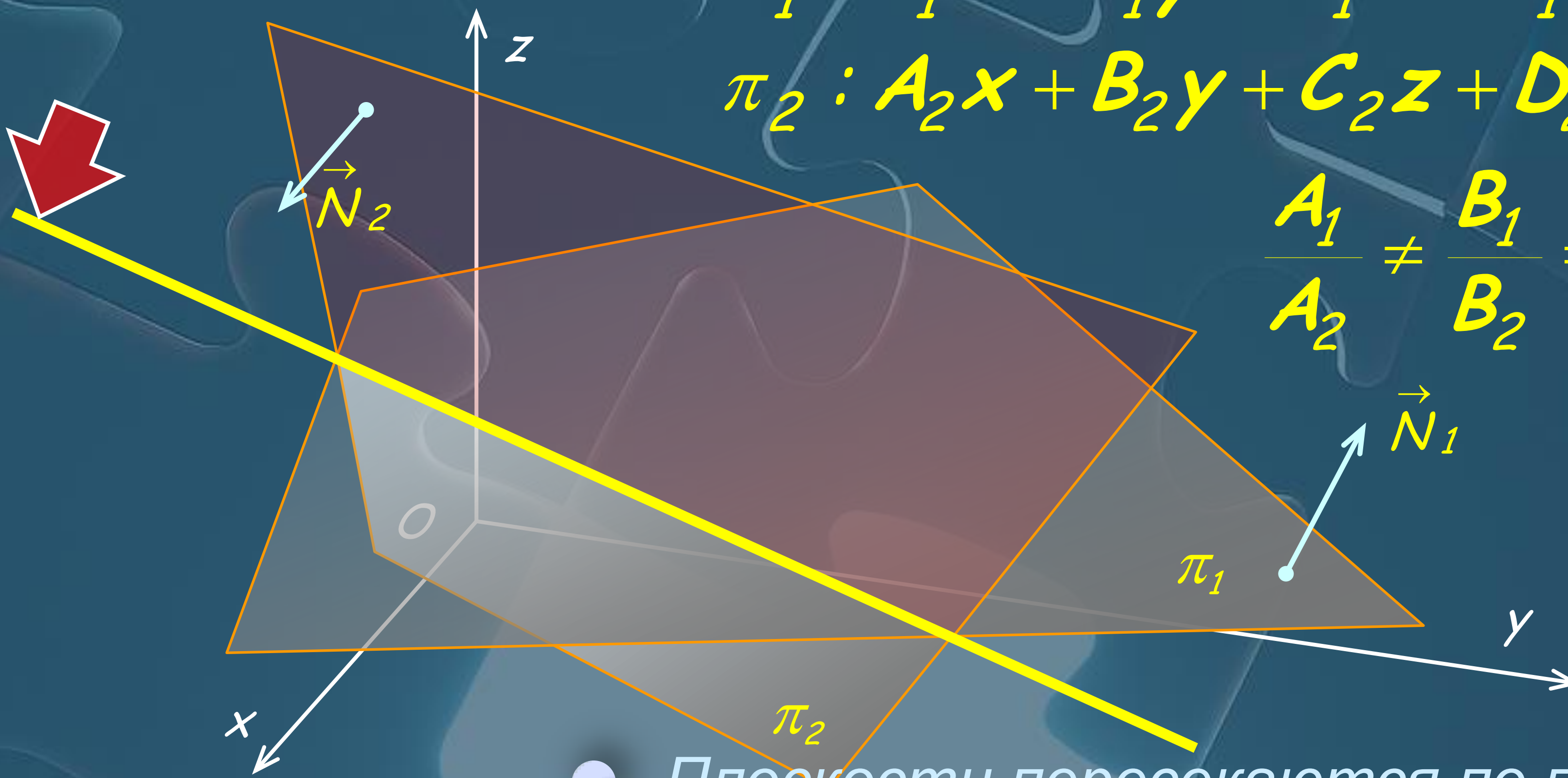
$$c=-\frac{D}{C}$$

Совместное исследование уравнений двух плоскостей

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$$



- *Плоскости пересекаются по прямой*

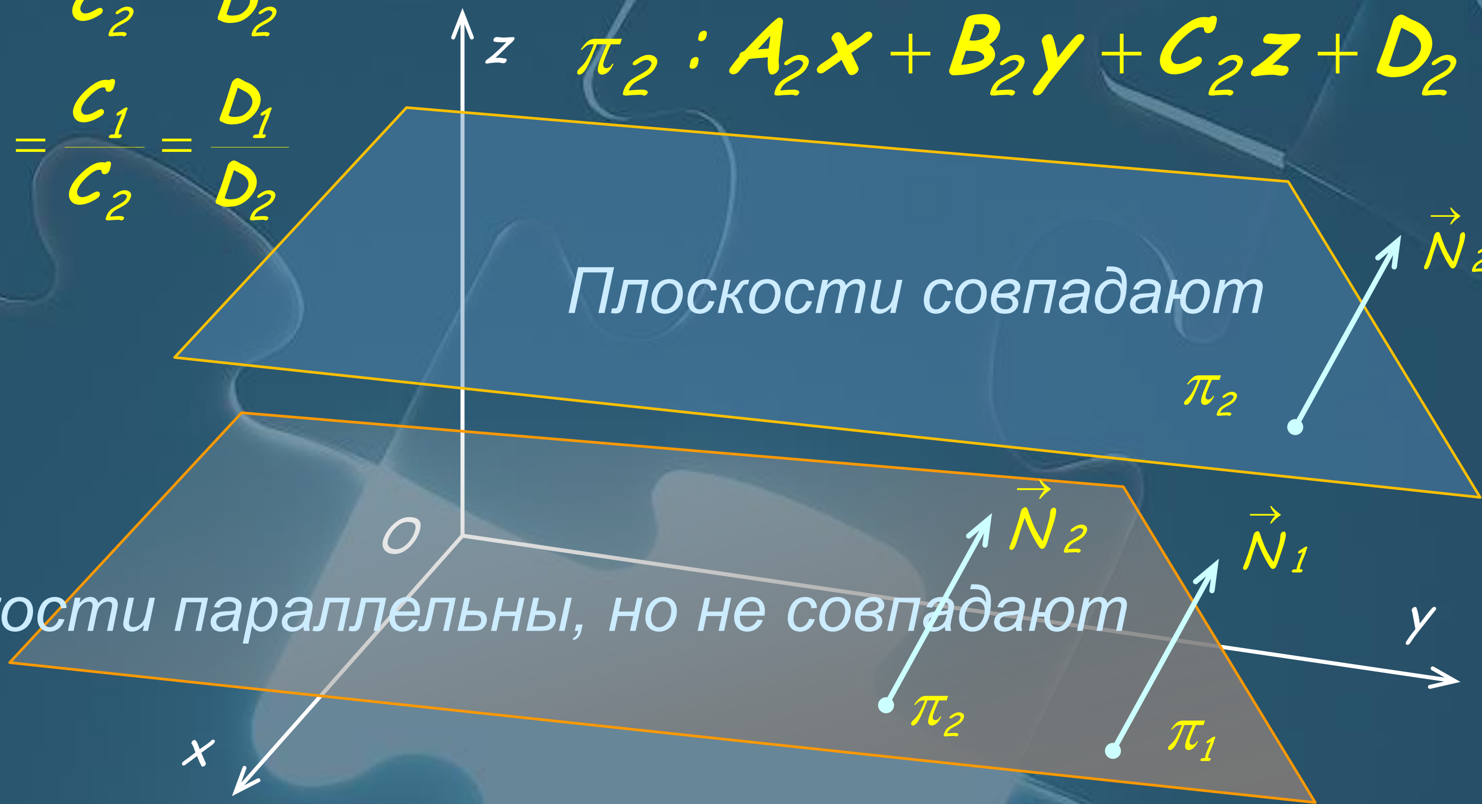
Совместное исследование уравнений двух плоскостей

$$\pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$\pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$



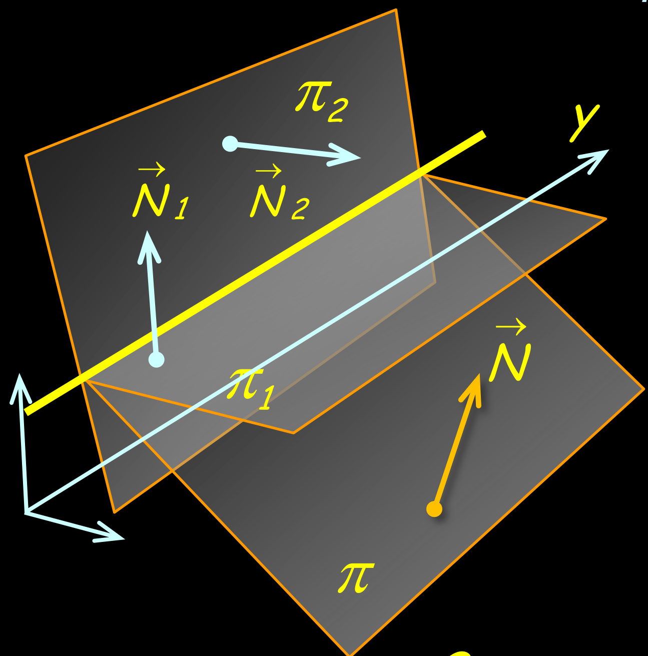
Плоскости совпадают

Плоскости параллельны, но не совпадают

@

Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через прямую пересечения плоскостей

$$2x-y+z-3=0,\; x+y+z+1=0$$



Решение

$$\vec N_1(2,-1,1),\; \vec N_2(1,1,1) \;\text{ и }\; \vec N(A,0,C)\cdot\vec j=0$$

$$(\vec N,\vec N_1,\vec N_2)=\begin{vmatrix} A & 0 & C \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2A+3C=0 \Rightarrow A=\frac{3C}{2} \Rightarrow \vec N(3,0,2)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -z+3 \\ -z-1 \end{pmatrix} \Rightarrow z_0=0,\; x_0=\frac{2}{3},\; y_0=-\frac{5}{3}$$

$$3\left(x-\frac{2}{3}\right)+0\left(y+\frac{5}{3}\right)+2(z-0)=0 \qquad 3x+2z-2=0$$

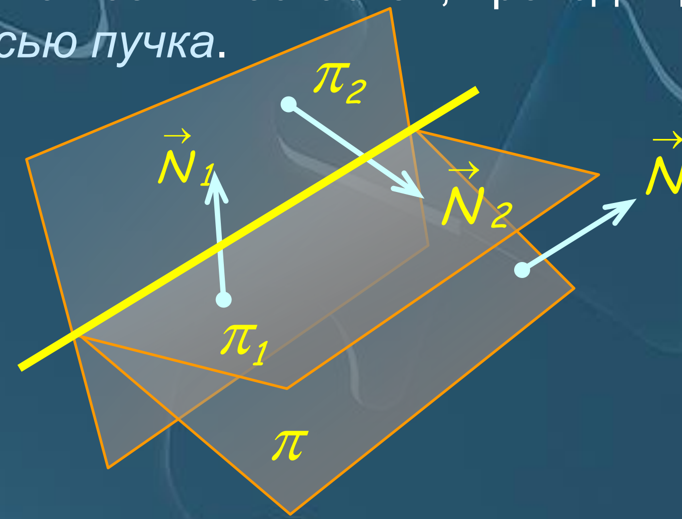
Пучок плоскостей

- *Пучком плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через некоторую прямую, называемую *осью пучка*.

Пусть заданы уравнения двух пересекающихся плоскостей:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (2)$$



Теорема

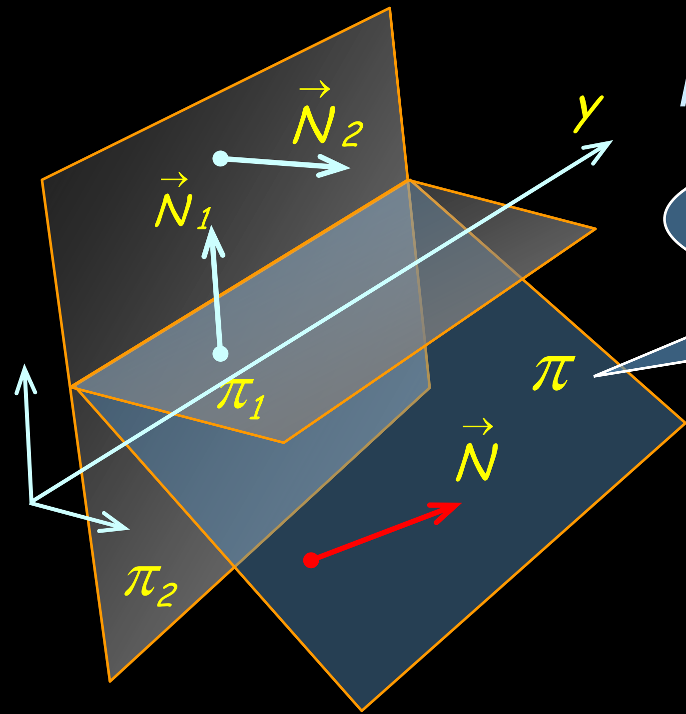
Если α и β – два числа, не равные одновременно нулю, то уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

задает некоторую плоскость пучка, определяемого заданными плоскостями (1) и (2). Обратно, любая плоскость этого пучка может быть задана этим уравнением при некоторых α и β.

@ *Составить уравнение плоскости, параллельной оси Oy и проходящей через прямую пересечения плоскостей*

$$2x-y+z-3=0,\ x+y+z+1=0$$



Решение

$$\alpha(2x-y+z-3)+\beta(x+y+z+1)=0$$

$$\vec{N}\cdot\vec{j}=0 \;\Rightarrow\; -\alpha+\beta=0 \;\Rightarrow\; \alpha=\beta$$

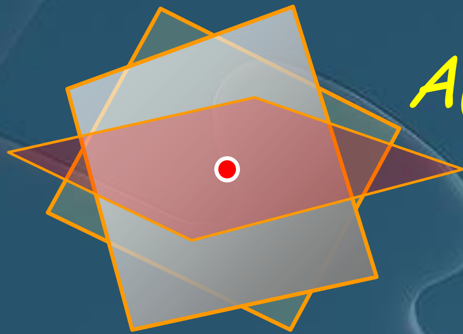
$$2x-y+z-3+x+y+z+1=0$$

$$3x+2z-2=0$$

Связка плоскостей

- *Связкой плоскостей* называется множество всех плоскостей, проходящих через некоторую точку, называемую *центром связки*.

Любая плоскость связки с центром $S(x_s, y_s, z_s)$ может быть задана уравнением:



$$A(x - x_s) + B(y - y_s) + C(z - z_s) = 0,$$

где A, B, C – числа не равные нулю.

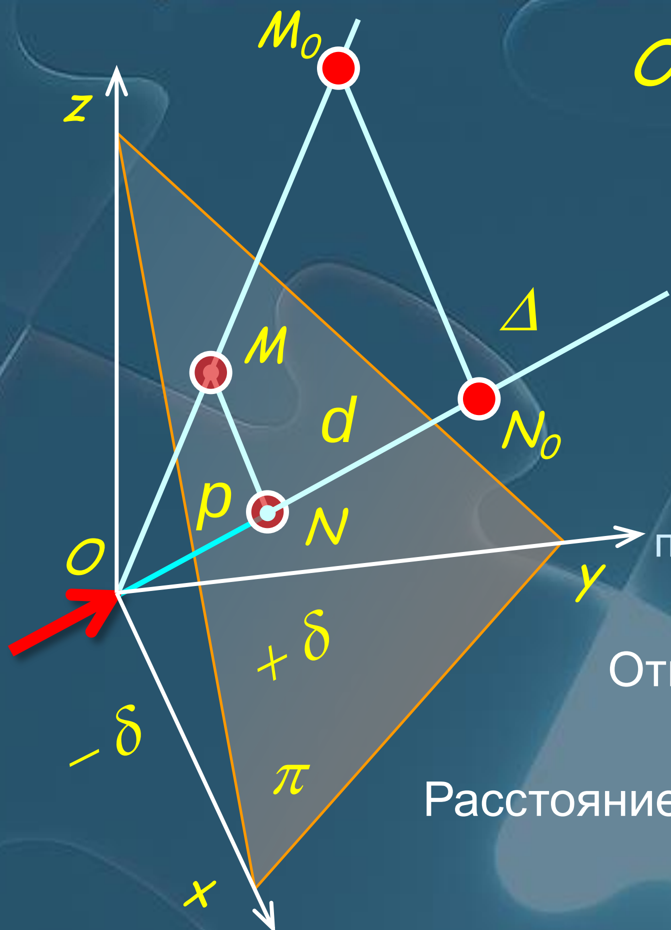
Теорема

Для любых чисел α, β, γ, не равных одновременно нулю, уравнение

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) +$$
$$+ \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0$$

задает некоторую плоскость связки с центром в точке S. Обратно, любая плоскость этой связки может быть задана этим уравнением при некоторых α, β, γ.

Нормальное уравнение плоскости



$$ON = p = \vec{OM}\cdot\vec{n} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma$$

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$$

$$\vec{n}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – произвольная точка пространства, d – расстояние от точки M_0 до плоскости π, δ – отклонение точки от плоскости (имеет знак плюс, если точка лежит в положительном полупространстве, и знак минус, если лежит в отрицательной его части). Имеют место формулы:

Отклонение точки M_0 от заданной плоскости π

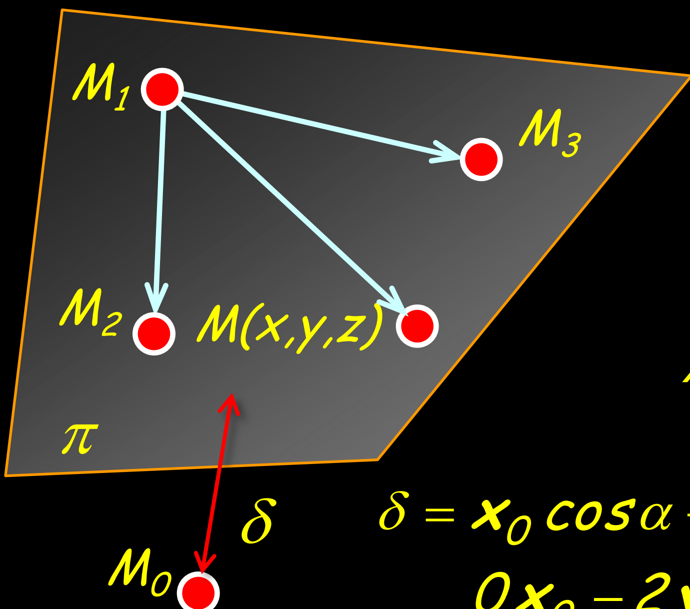
$$\delta = x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p$$

Расстояние точки M_0 от заданной плоскости π

$$d = \left| x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p \right|$$

Пример

@ *Найти отклонение точки* $M_0\ (2,-1,0)$ *от плоскости, проходящей через точки* $M_1\ (0,0,-1)$, $M_2\ (1,0,-1)$, $M_3\ (0,1,1)$.



Решение

$$\begin{vmatrix} x & y & z+1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2y + z + 1 = 0$$

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{4+1}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \cos\beta + z_0 \cos\gamma - p \Rightarrow$$

$$\delta = \frac{0x_0 - 2y_0 + 1z_0 + 1}{-\sqrt{5}} = \frac{0\cdot 2 - 2\cdot(-1) + 1\cdot 0 + 1}{-\sqrt{5}} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$