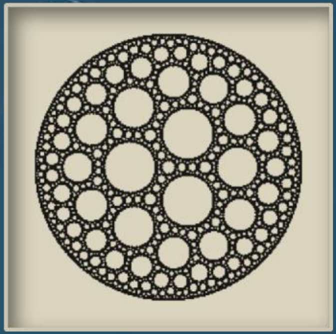
ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ



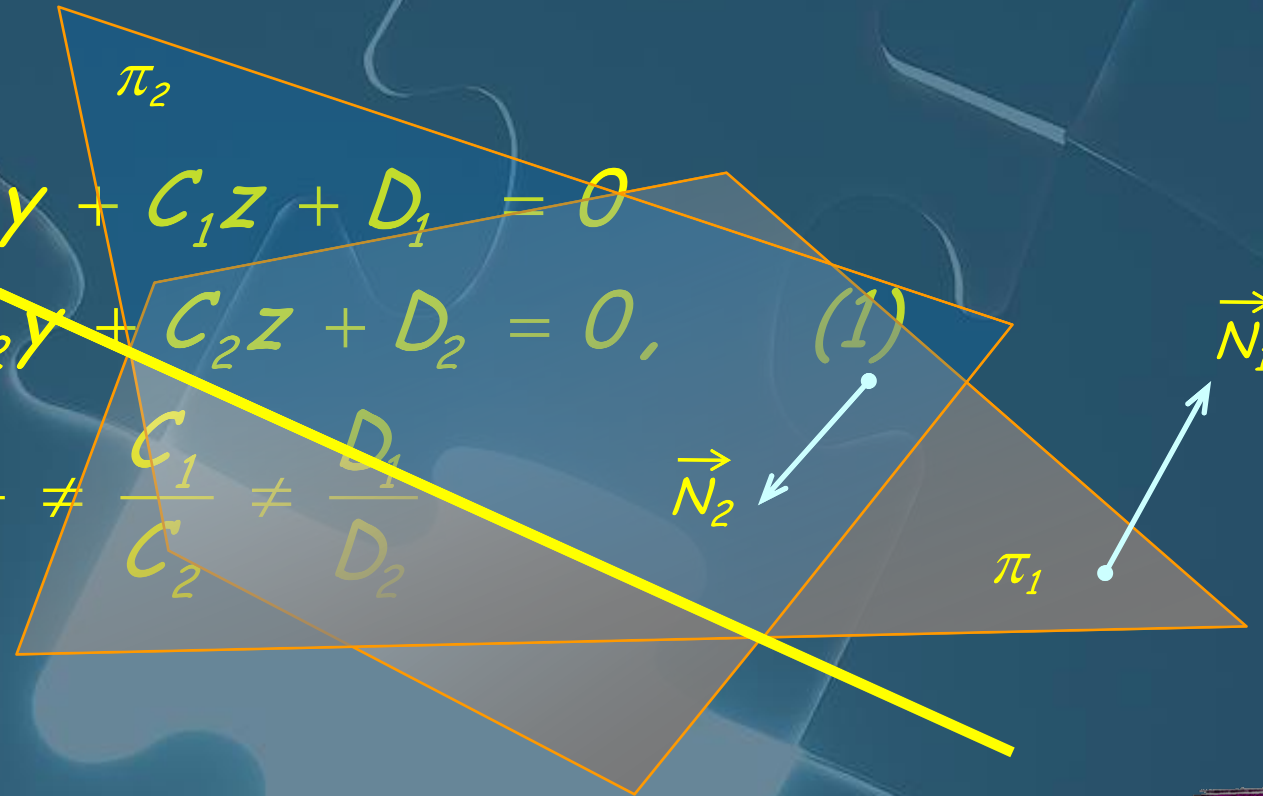
{ прямая как пересечение двух плоскостей – векторно-параметрическое уравнение прямой – уравнение прямой, проходящей через две заданные точки – уравнение плоскости, проходящей через заданную точку параллельно двум заданным векторам – взаимное расположение прямой и плоскости – взаимное расположение двух прямых в пространстве – расстояние от точки до прямой в пространстве – угол между двумя плоскостями – угол между двумя прямыми – угол между прямой и плоскостью – примеры }

Прямая как пересечение двух плоскостей

- Прямую в пространстве можно представить как линию пересечения двух плоскостей. В аффинной системе координат ее можно задать системой двух линейных уравнений :

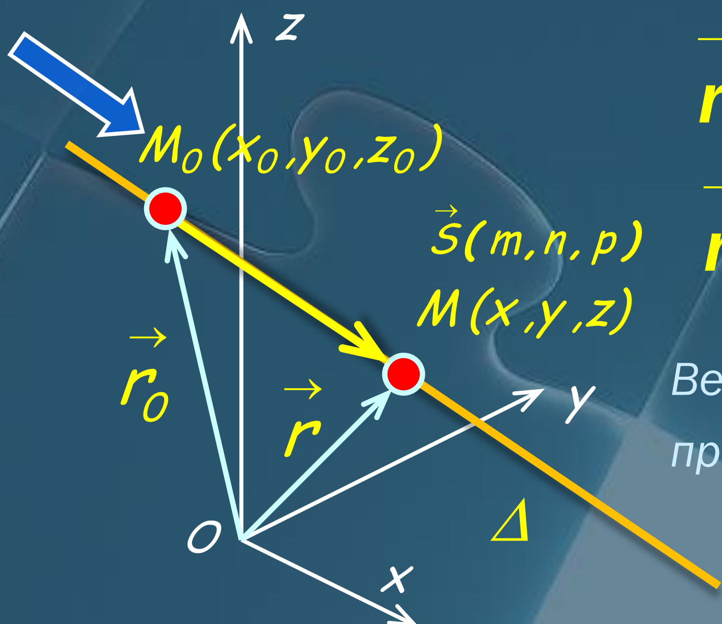
$$\begin{aligned} \pi_1:&\quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2:&\quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \qquad (1) \end{aligned}$$

$$\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$$



Параметрические и канонические уравнения прямых

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \overrightarrow{M_0M}(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \parallel \vec{s}(m, n, p)$$



$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{s}t$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}t$$

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

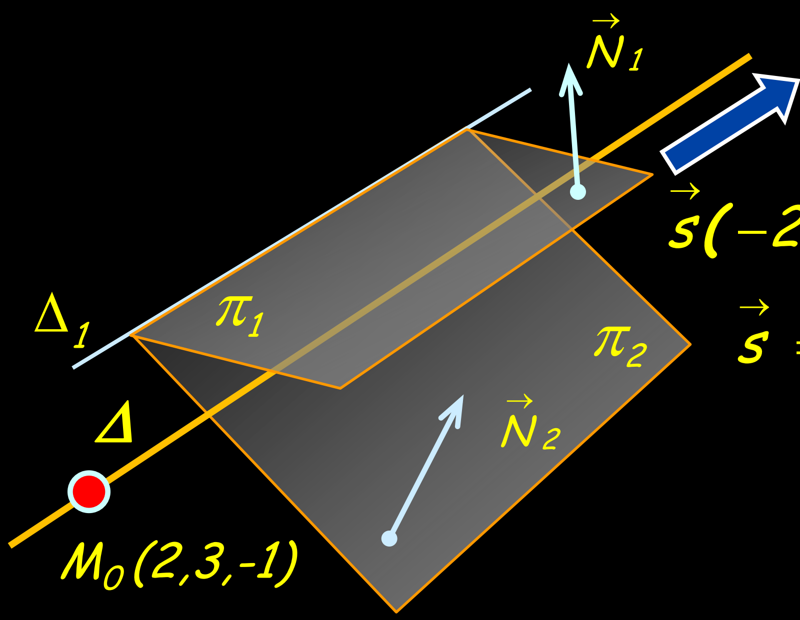
Векторное параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку M_0 параллельно вектору $\vec{s}$

Канонические уравнения $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}, \quad m, n, p \neq 0$$

Пример

@ *Составить уравнение прямой, проходящей через точку* $M_0(2,3,-1)$ *и параллельной прямой* Δ_1:

$$\begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + 2y + 2 = 0 \end{cases}$$



$\vec{s}(-2,1,3)$

Решение

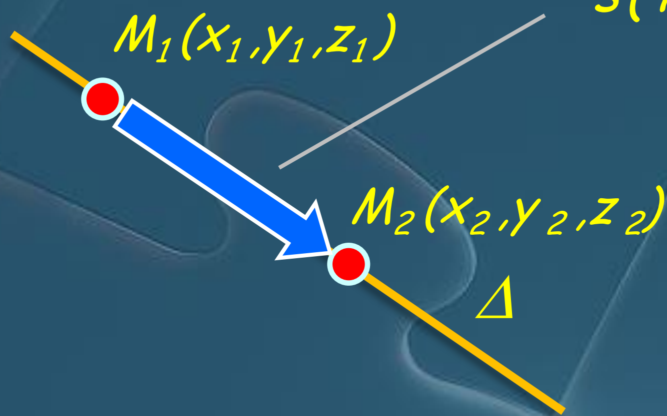
$$\vec{s} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{3}$$

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки

Пусть заданы две различные точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ прямой Δ.

$$\vec{s}(m,n,p) = \overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Параметрические уравнения прямой

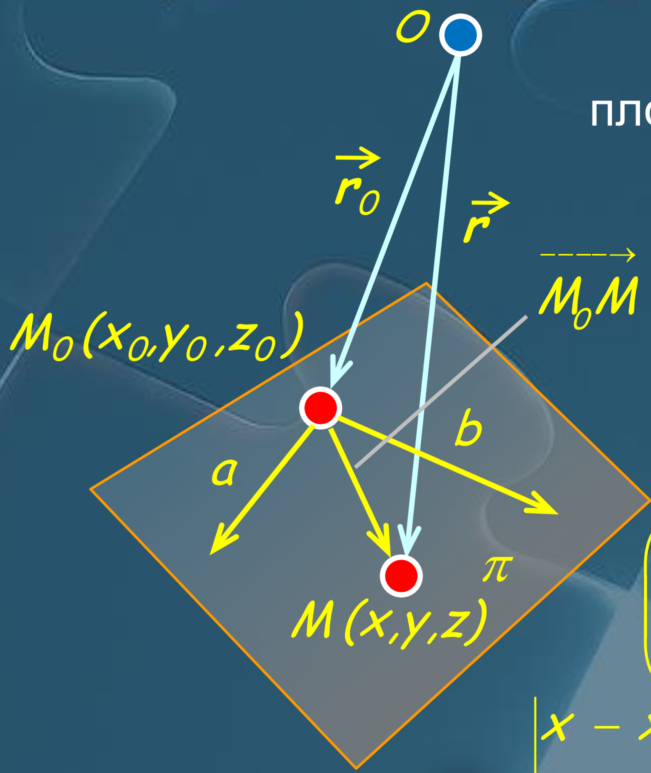
$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t$$
$$y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$
$$z = z_1 + (z_2 - z_1)t$$

исключая параметр t, получим

Канонические уравнения прямой, проходящей через две заданные точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку, параллельно двум заданным векторам



Пусть даны точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$, принадлежащая плоскости π и два неколлинеарных вектора $\vec{a}\,(m_a,n_a,p_a)$ и $\vec{b}\,(m_b,n_b,p_b)$, параллельных этой плоскости.

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$$

Для того, чтобы точка M_0 принадлежала плоскости π необходимо и достаточно, чтобы векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и $\vec{r} - \vec{r}_0$ были компланарны, что равносильно равенству нулю их смешанного произведения.

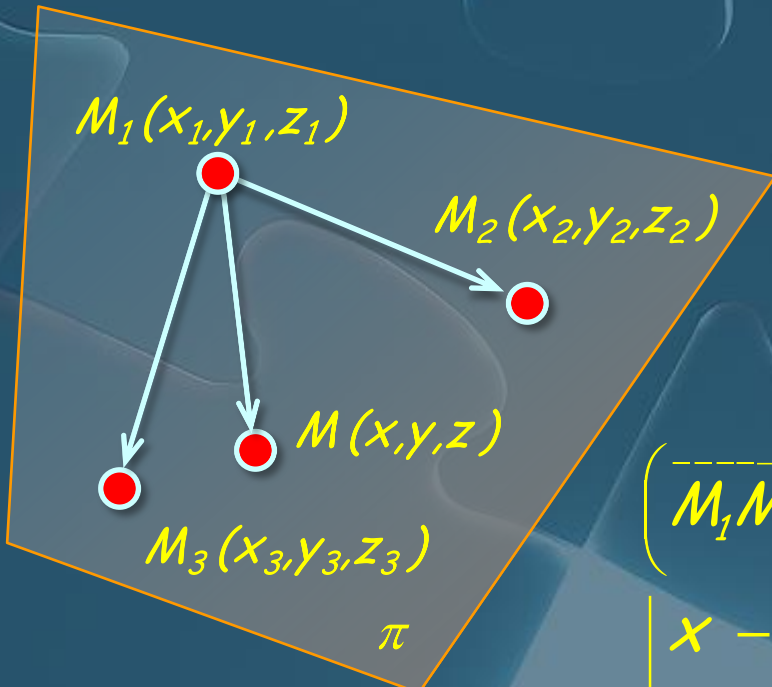
$$\left((\vec{r} - \vec{r}_0), \vec{a}, \vec{b} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_a & n_a & p_a \\ m_b & n_b & p_b \end{vmatrix} = 0$$

Векторное параметрическое уравнение плоскости

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{b}$$



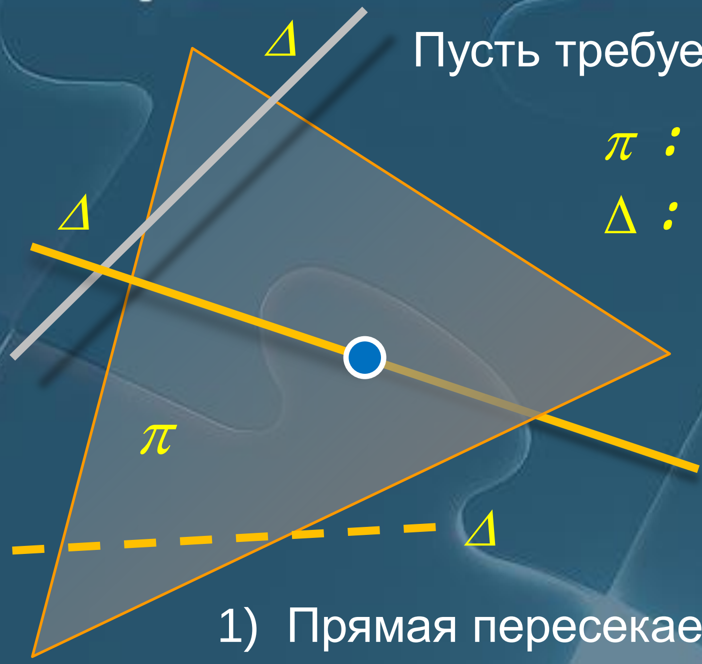
Если заданы три точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$, не лежащие на одной прямой , то уравнение плоскости, проходящей через эти точки, можно получить из условия компланарности векторов

$\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_1M}$.

$$\left(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}\right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Взаимное расположение прямой и плоскости



Пусть требуется определить взаимное положение плоскости π и прямой Δ

$$\pi: \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1)$$

$$\Delta: \; x = x_0 + mt, \; y = y_0 + nt, \; z = z_0 + pt \quad (2)$$

Подставляя x, y, z из уравнений (2) в (1), получим

$$(Am + Bn + Cp)t + Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Значения t из этого равенства определяют точки прямой Δ, принадлежащие плоскости π.

1) Прямая пересекает плоскость в одной точке : $Am + Bn + Cp \neq 0$
2) Прямая параллельна плоскости и не лежит в ней :

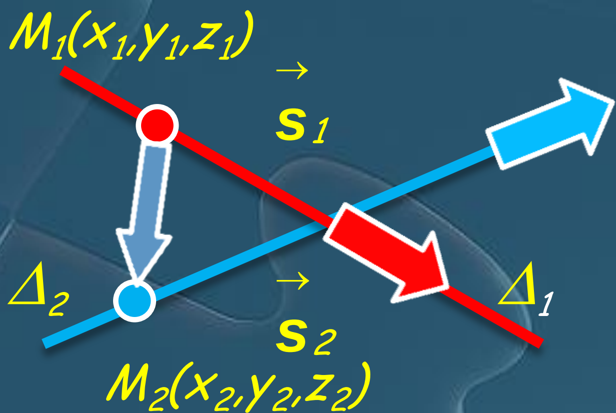
$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$$

3) Прямая принадлежит плоскости :

$$Am + Bn + Cp = 0, \quad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

- Пусть требуется определить взаимное расположение двух прямых Δ_1 и Δ_2



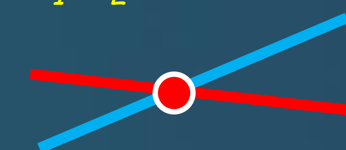
$$\Delta_1 : \vec{r} = \vec{r}_1 + \vec{s}_1 t \qquad \Delta_2 : \vec{r} = \vec{r}_2 + \vec{s}_2 t$$

1) Прямые параллельны: $\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2$

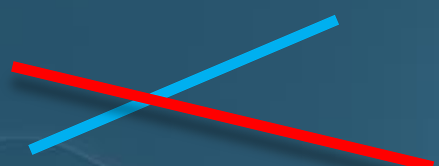
2) Прямые совпадают:

$$\vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \quad \vee\ \vec{s}_1 \parallel \overrightarrow{M_1M_2} \quad \vee\ \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$$

3) Прямые пересекаются в одной точке: $\left(\overrightarrow{M_1M_2}, \vec{s}_1, \vec{s}_2\right) = 0$

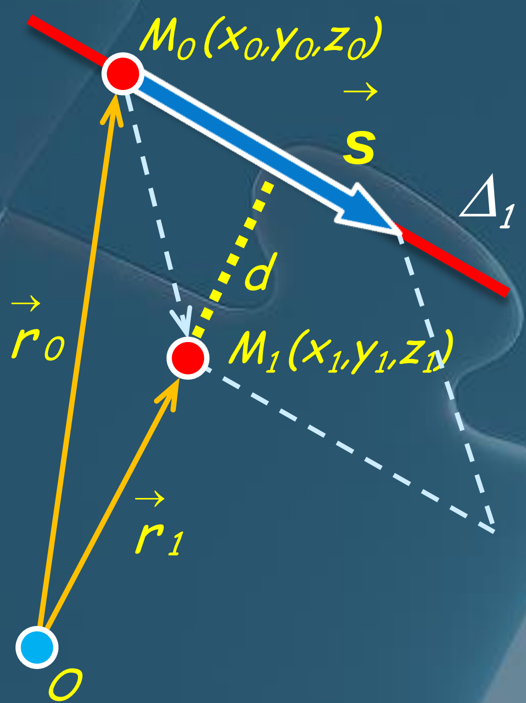


4) Прямые скрещиваются:



$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

Расстояние от точки до прямой в пространстве



Расстояние от точки M_1 до прямой Δ в пространстве можно определить как высоту параллелограмма, построенного на направляющем векторе $\vec{s}$ и разности радиусов векторов точки M_1 и точки M_0, через которую проходит прямая Δ.

$$\Delta: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s}\,t$$

Расчетная формула:

$$d = \frac{\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\times\vec{s}\right|}{\left|\vec{s}\right|}$$

$$\overrightarrow{M_0M_1} = \vec{r}_1 - \vec{r}_0$$

$$\left|(\vec{r}_1 - \vec{r}_0)\times\vec{s}\right| = \left|\vec{s}\right| d$$

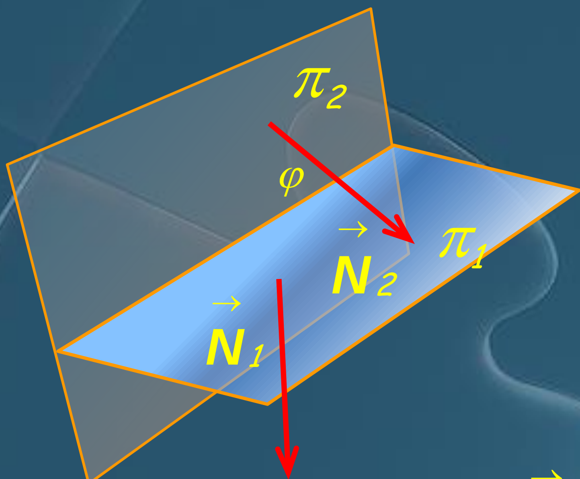
Угол между двумя плоскостями

- Угол между двумя плоскостями φ равен углу между векторами $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$.

Если заданы уравнения двух пересекающихся плоскостей :

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$



то угол между двумя плоскостями определяется по формуле

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

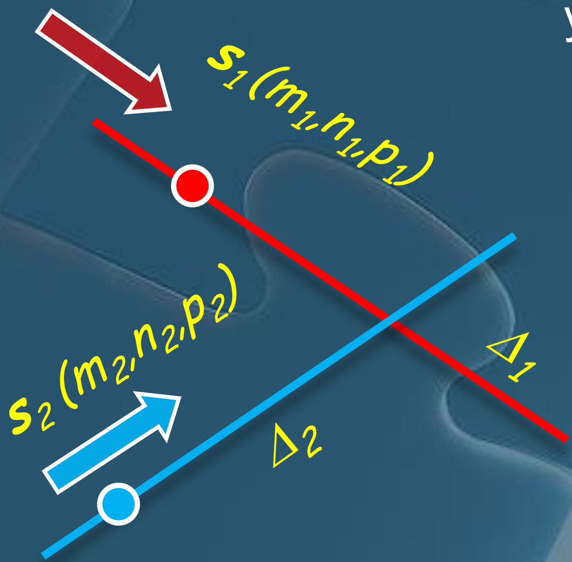
$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$$

Угол между двумя прямыми

Величина угла между двумя прямыми Δ_1 и Δ_2 равна углу между направляющими векторами $s_1(m_1,n_1,p_1)$ и $s_2(m_2,n_2,p_2)$ этих прямых



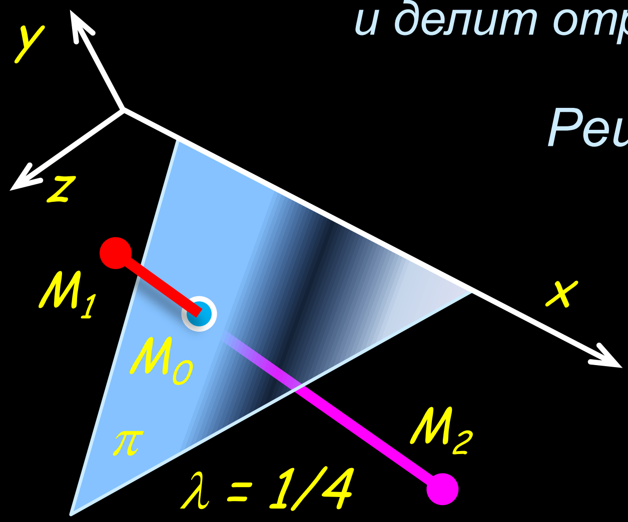
$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности прямых

$$m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$$

Пример

@ Составить уравнение плоскости, которая проходит через ось Ox и делит отрезок M_1M_2 с вершинами $M_1(-2,2,4)$ и $M_2(5,0,-1)$ в отношении $1:4$



Решение

$$M_0 \Rightarrow ?$$

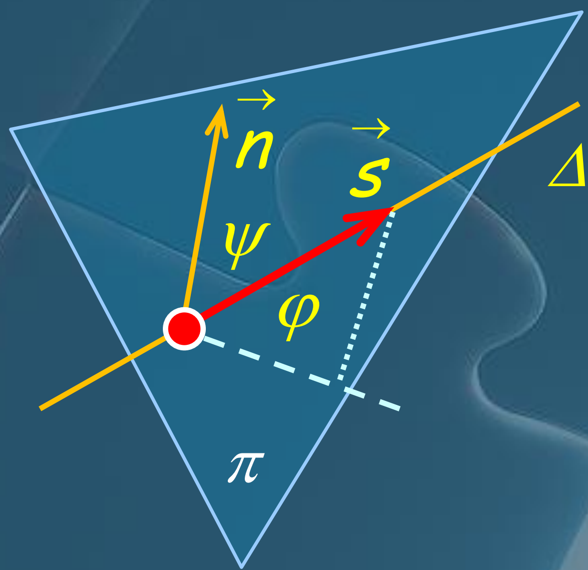
$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} = \dfrac{-2 + (1/4)5}{(5/4)} = -\dfrac{3}{5} \\ y_0 = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} = \dfrac{2 + (1/4)0}{(5/4)} = \dfrac{8}{5} \\ z_0 = \dfrac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} = \dfrac{4 + (1/4)(-1)}{(5/4)} = 3 \end{cases}$$

$$\pi : By + Cz = 0 \quad \Rightarrow \quad B\frac{8}{5} + C3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{8}{5}, \quad B = -3$$

$$-15y + 8z = 0$$

Угол между прямой и плоскостью

- Для нахождения угла φ между прямой Δ и плоскостью π используется формула определения синуса угла между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой, с введением (дополнительного до прямого) угла Ψ.



$$\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi \quad \Rightarrow \quad \cos\psi = \frac{\vec{S}\cdot\vec{N}}{\left|\vec{S}\right|\left|\vec{N}\right|}$$

$$\sin\varphi = \left|\cos\Psi\right| = \frac{\left|Am + Bn + Cp\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$