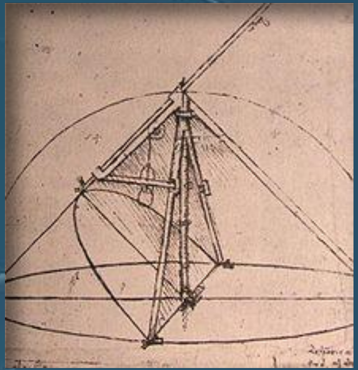
КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА



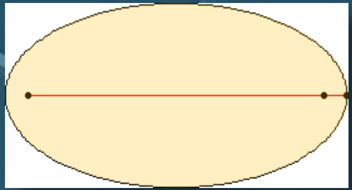
{ эллипс – гипербола – парабола – исследование формы – параметрические уравнения – эксцентриситет, фокальные радиусы и параметр – директрисы – полярное уравнение эллипса и гиперболы – плоские фигуры второго порядка – преобразование координат – примеры }

Вывод уравнения эллипса

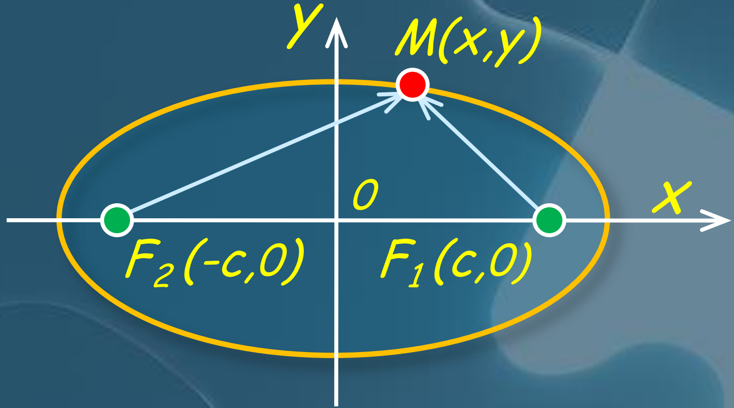
- *Эллипс* - множество всех точек плоскости, для каждой из которых сумма расстояний от двух точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная, равная $2a$

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$



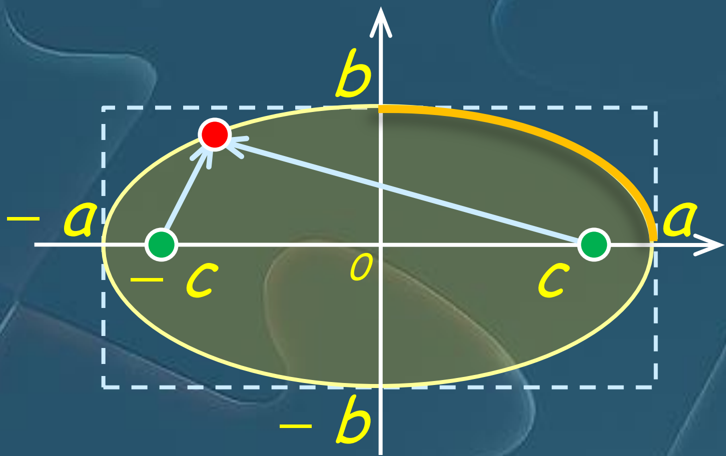
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

$$c < a \qquad b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

Исследование формы



Координаты точек эллипса ограничены :

$$|x| \le a, \quad |y| \le b$$

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}, \quad x \le a$$

$$\left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \sqrt{(x\frac{c}{a} + a)^2} = \left|a + \frac{c}{a}x\right|$$

Фокальные радиусы

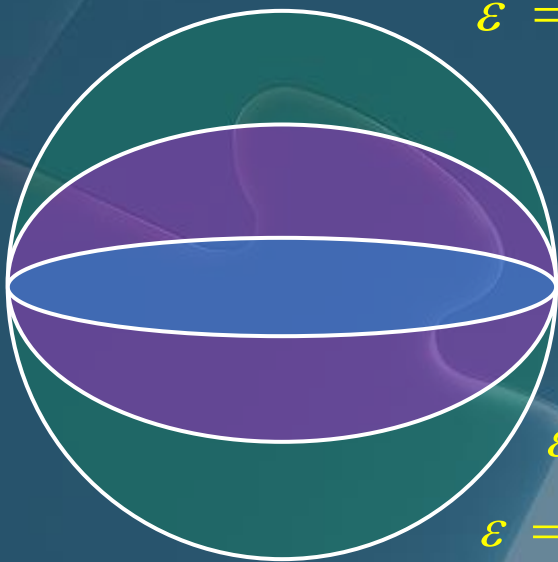
$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \sqrt{(-x\frac{c}{a} + a)^2} = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$$

Эксцентриситет. Фокальный параметр.

- Уравнение эллипса в параметрической форме

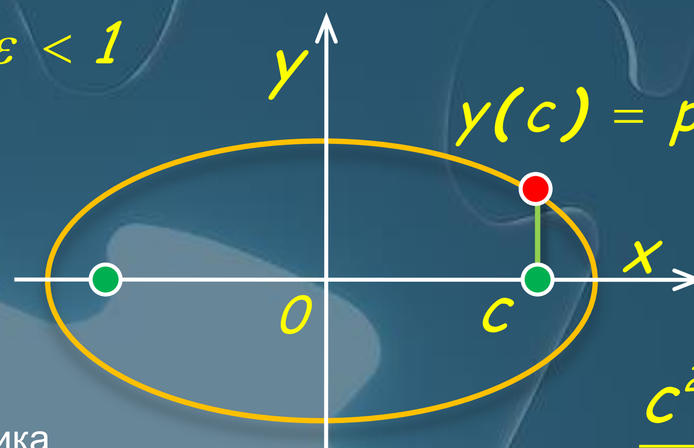
$$\varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$\begin{cases} x = a\cos(t) \\ y = b\sin(t) \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$



Эксцентриситетом эллипса называется число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$

$$0 \le \varepsilon < 1$$



$$y(c) = p$$

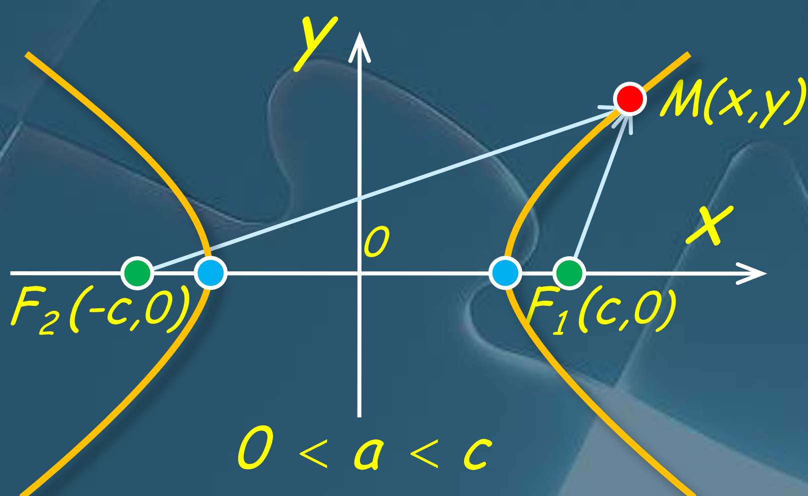
$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$\frac{c^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$$

Эксцентриситет — числовая характеристика конического сечения, показывающая степень его отклонения от окружности.

Вывод уравнения гиперболы

- *Гипербола* - множество всех точек плоскости, для каждой из которых абсолютная величина разности расстояний от двух точек, называемых фокусами F_1 и F_2, есть величина постоянная, равная $2a$



$0 < a < c$

$$\left| \left| \overrightarrow{F_1M} \right| - \left| \overrightarrow{F_2M} \right| \right| = 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

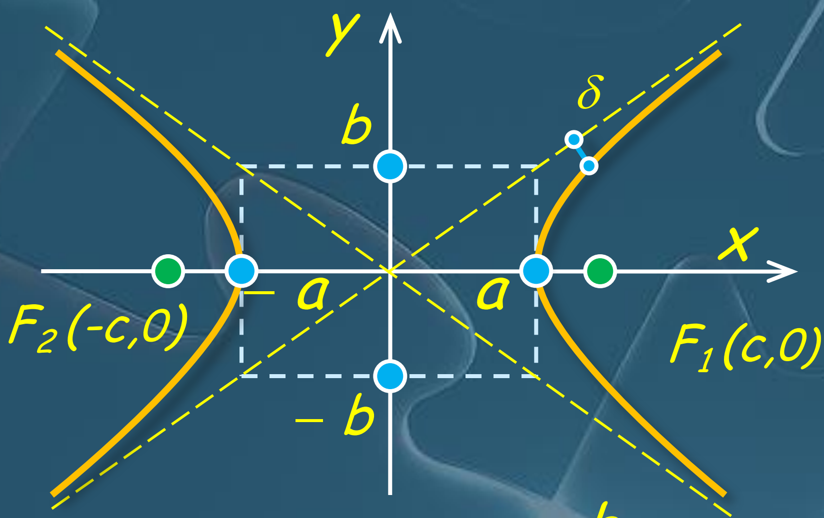
$$(c^2 - a^2)x - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1 \qquad b^2 = c^2 - a^2 \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Исследование формы. Параметрические уравнения.

Точки гиперболы располагаются вне полосы, ограниченной прямыми

$$x = -a \qquad x = a$$



$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \le -a \vee x \ge a$$

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\delta \le \lim_{x\to\infty}(Y - y) = \lim_{x\to\infty}\frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0$$

$$\begin{cases} x = a\,ch(t) \\ y = b\,sh(t) \end{cases}, \quad -\infty \le t \le \infty \qquad -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

фокальная ось - y

Эксцентриситет. Фокальные радиусы и параметр.

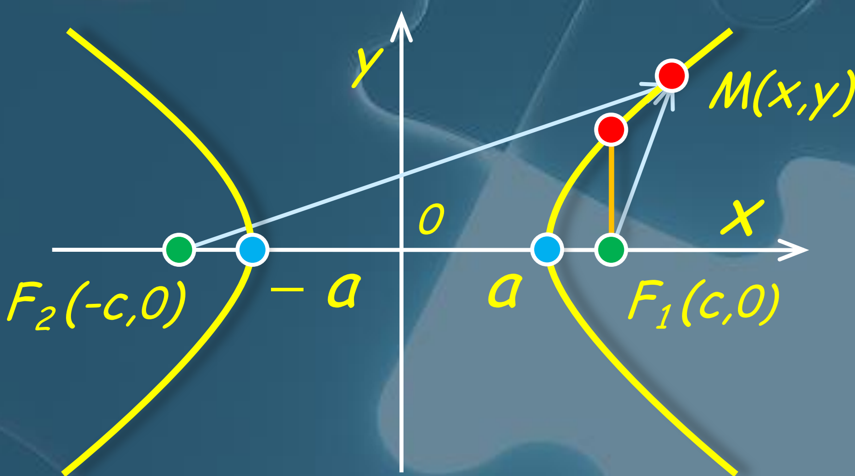
- Эксцентриситетом гиперболы называется число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ $\quad \varepsilon > 1$

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \varepsilon x + a$$

$$r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \varepsilon x - a$$

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

$$r_1 = -(\varepsilon x + a)\ ,\quad r_2 = -(\varepsilon x - a)$$

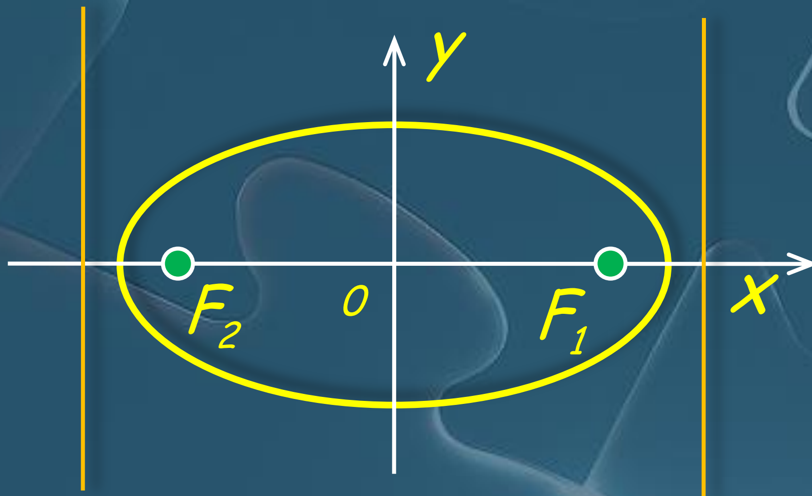


$$y(c) = p \qquad p = \frac{b^2}{a}$$

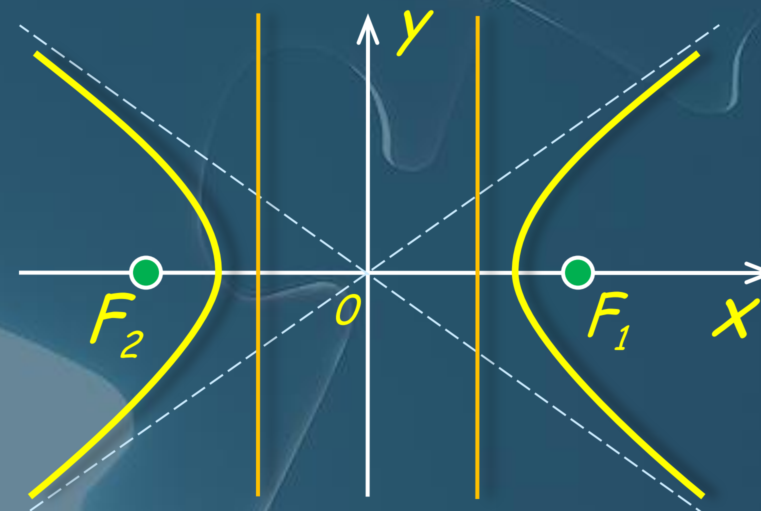
$$\frac{c^2}{a^2} - \frac{p^2}{b^2} = 1$$

Директрисы эллипса и гиперболы

Директрисами эллипса называется две прямые, параллельные малой оси эллипса



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$$



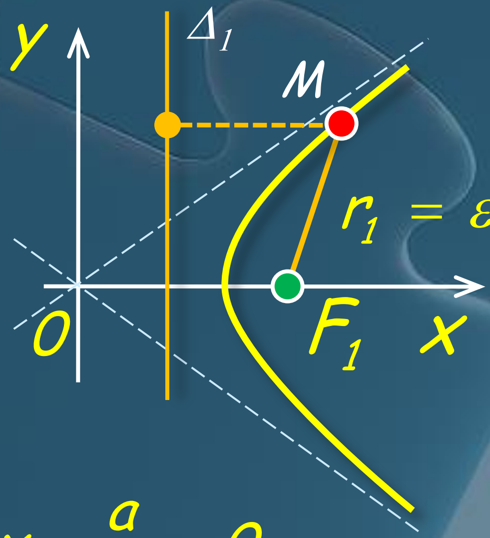
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$$

Директрисами гиперболы называется две прямые, параллельные мнимой оси

Директрисы эллипса и гиперболы

- Теорема 1. Отношение расстояния r любой точки эллипса (гиперболы) от фокуса к её расстоянию d от соответствующей директрисы есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса (гиперболы) ε: $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$

(Фокус и директриса считаются соответствующими, если они расположены с одной стороны от центра)



$$r_1 = \varepsilon x - a$$

Уравнение правой директрисы имеет нормальный вид

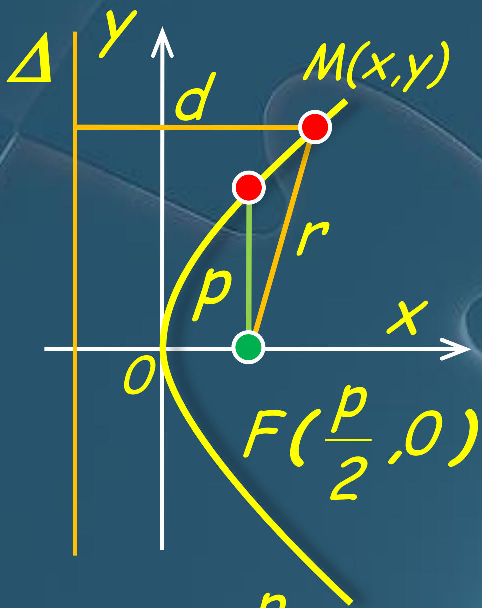
$$x - \frac{a}{\varepsilon} = 0$$

$$d = x - \frac{a}{\varepsilon} \qquad \frac{r_1}{d} = \frac{\varepsilon x - a}{x - \dfrac{a}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

Эллипсом (гиперболой) называется множество всех точек плоскости, для которых отношение расстояния от заданной точки, называемой фокусом, к расстоянию от заданной прямой, называемой директрисой, есть постоянная величина ε

Вывод уравнения параболы

- *Параболой* называется множество всех тех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от точки F , называемой фокусом, и прямой Δ , называемой директрисой параболы.



$$x = -\frac{p}{2}$$

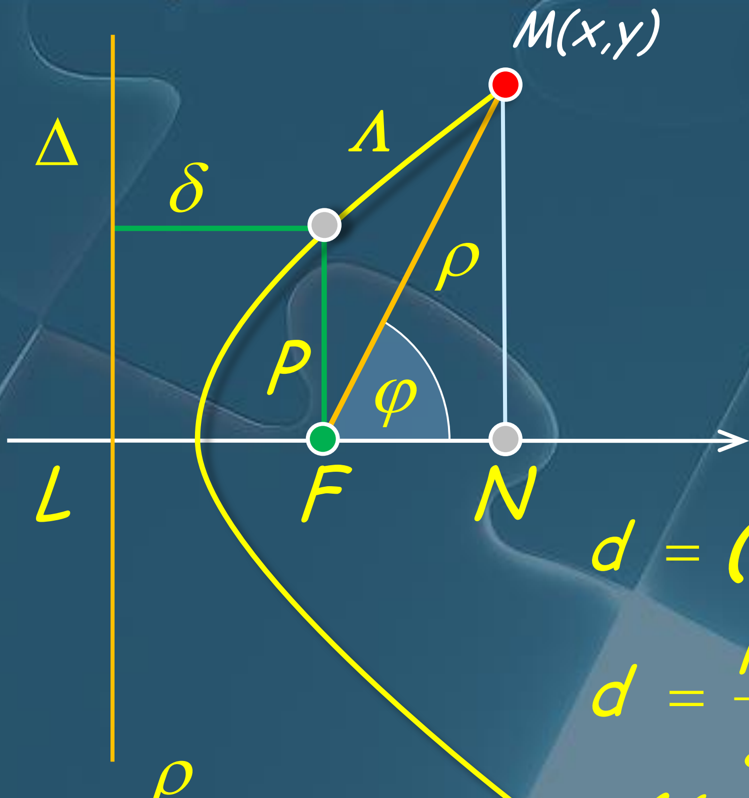
$$\frac{r}{d} = \varepsilon = 1 \qquad r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = d = \frac{p}{2} + x$$

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2$$

$$y\left(\frac{p}{2}\right) = \sqrt{2p\frac{p}{2}} = p \qquad y^2 = 2px$$

$$y^2 = -2px \qquad x^2 = 2py \qquad x^2 = -2py$$

Уравнения в полярной системе координат



- Пусть Λ – эллипс, гипербола или парабола. F – её фокус, Δ – односторонняя с ним директриса, ε – эксцентриситет, P - фокальный параметр, δ - расстояние фокуса от директрисы.

$$\frac{P}{\delta} = \varepsilon \qquad \delta = \frac{P}{\varepsilon}$$

$$d = (LN) = (LF) + (FN) = \delta + \rho\cos\varphi$$

$$d = \frac{P}{\varepsilon} + \rho\cos\varphi$$

$$\frac{\rho}{d} = \varepsilon$$

$$\rho(1 - \varepsilon\cos\varphi) = P$$

$$\rho = \frac{P}{(1 - \varepsilon\cos\varphi)}$$

Пример

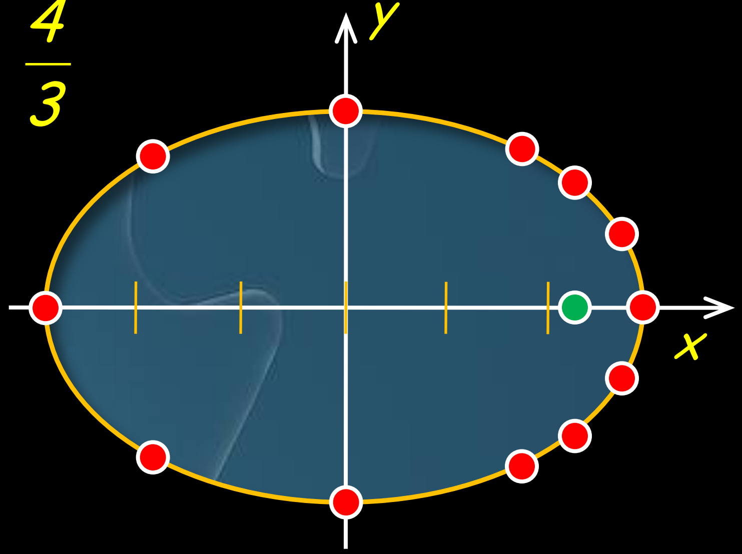
@ *Представить уравнение эллипса в полярной системе координат* $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$

Решение

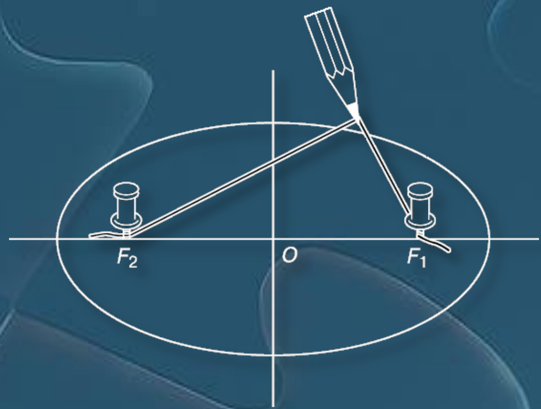
$$c = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5} \quad P = \frac{b^2}{a} = \frac{2^2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\delta = \frac{P}{\varepsilon} = \frac{4}{\sqrt{5}} \quad \varepsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\rho = \frac{4}{3 - \sqrt{5}\cos\varphi}$$



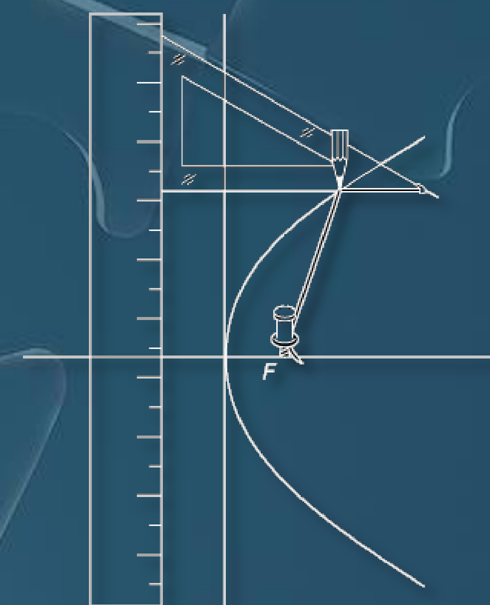
Механические построения кривых



Эллипс

Гипербола

Парабола

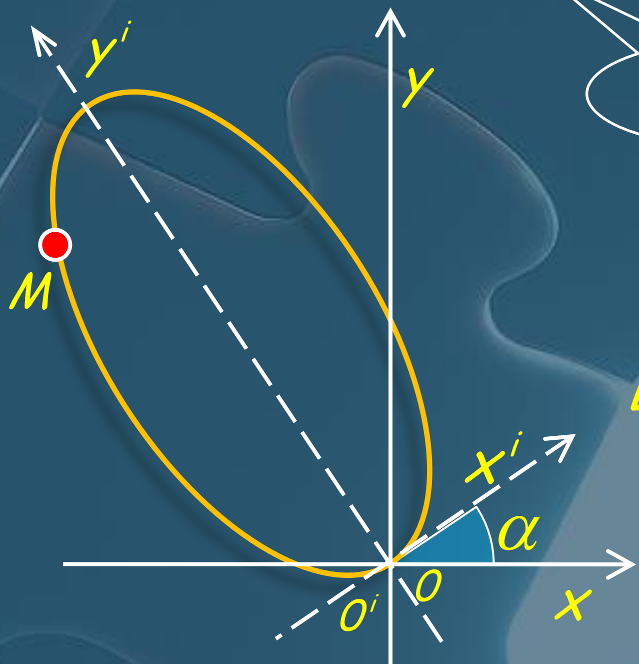


Плоские фигуры второго порядка

- $$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0$$

$$B' = 0$$



$$x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + a$$

$$y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + b$$

Полагая a и b в формулах преобразования нулю

$$A' = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$$

$$B' = -A\sin\alpha\cos\alpha + B\cos 2\alpha + C\sin\alpha\cos\alpha$$

$$C' = A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{A - C}{2B}$$

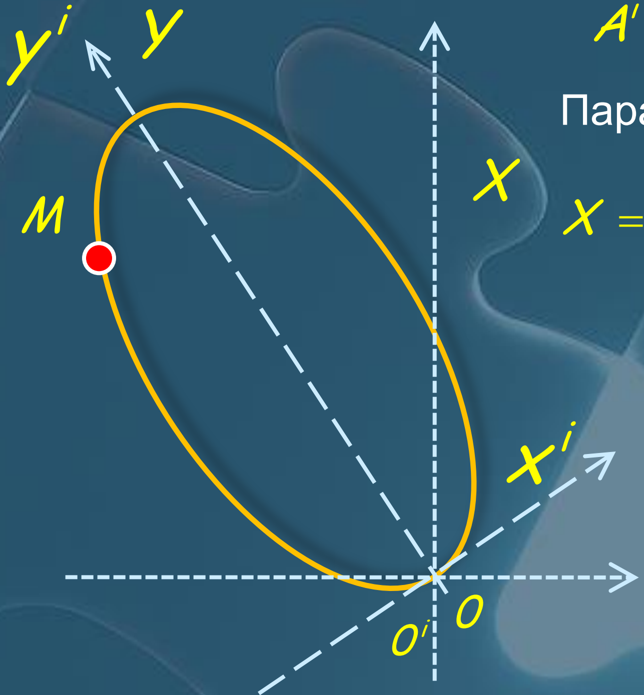
$$x0y \Rightarrow x'0'y'$$

Плоские фигуры второго порядка

$$A' x'^2 + C' y'^2 + 2D' x' + 2E' y' + F' = 0$$

$$A'\left(x'^2 + 2\frac{D'}{A'}x'\right) + C'\left(y'^2 + 2\frac{E'}{C'}y'\right) + F' = 0$$

$$A'\left(x' + \frac{D'}{A'}\right)^2 + C'\left(y' + \frac{E'}{C'}\right)^2 + F'' = 0$$



Параллельный сдвиг координатных осей

$$X = x' + \frac{D'}{A'} \qquad Y = y' + \frac{E'}{C'} \qquad F'' = -F' + \frac{D'^2}{A'^2} + \frac{E'^2}{C'^2}$$

$$A' X^2 + C' Y^2 = F''$$

$$\frac{X^2}{\frac{F''}{A'}} + \frac{Y^2}{\frac{F''}{C'}} = 1 \qquad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$A' > 0,\ C' > 0,\ F'' > 0$$

Пример

@ *Привести к каноническому виду уравнение кривой 2-го порядка*

$$x^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

$$ctg2\alpha = \frac{A - C}{2B} = \frac{1-1}{2} = 0 \qquad \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$3x'^2 + y'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0 \qquad x = \frac{x' - y'}{\sqrt{2}}$$

$$3x'^2 + (y' - \sqrt{2})^2 = 2 \qquad y = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

$$X = x'$$

$$Y = y' - \sqrt{2}$$

$$\frac{X^2}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} + \frac{Y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1$$