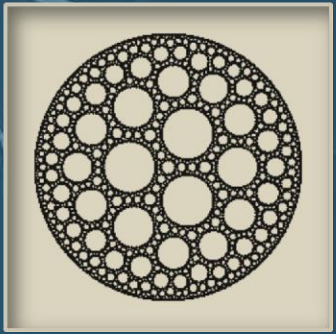
ИНТЕГРИРОВАНИЕ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ



[определение рациональной функции - простейшие рациональные дроби - интегрирование простейших рациональных дробей – пример - разбиение правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей - алгоритм интегрирования рациональных функций]

Определение рациональной функции

- **Рациональной функцией** $R(x)$ называется функция, равная отношению двух многочленов:

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}$$

где m, n – целые положительные числа; a_i и b_i – действительные числа. Если $m < n$, то $R(x)$ – называется правильной дробью, если $m > n$ или $m = n$, то $R(x)$ – называется неправильной дробью.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы некоторого многочлена (целая рациональная функция) и правильной дроби. Для этого используется правило деления многочленов.

- $\dfrac{x^4+1}{x^2+1}\langle m = 4, n = 2, m > n\rangle$ $\quad \dfrac{x^4+1}{x^2+1} = x^2 - 1 + \dfrac{2}{x^2+1}$

Простейшие рациональные дроби

Простейшие рациональные дроби делятся на четыре типа:

- Первый тип $\dfrac{A}{x-a}$
- Второй тип $\dfrac{A_\mu}{(x-a)^\mu}$

a - есть действительный корень кратности μ: $(x-a)^m=0,\quad m=2,\ldots,\mu$

- Третий тип $\dfrac{Cx+D}{x^2+px+q}$
- Четвертый тип $\dfrac{C_\nu x+D_\nu}{(x^2+px+q)^\nu}$

нет действительный корней: $(x^2+px+q)^n=0,\quad n=2,\ldots,\nu$

- $\dfrac{2}{(3x-1)^3}$ $\quad (3x-1)^3=0\Rightarrow 3^3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^3=0\Rightarrow x_1=x_2=x_3=\dfrac{1}{3}$

$$\frac{2}{(3x-1)^3}=\frac{A}{(3x-1)}+\frac{B}{(3x-1)^2}+\frac{C}{(3x-1)^3}$$

В этом примере: одна дробь первого типа, две – второго.

Интегрирование простейших рациональных дробей

- Первый тип $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + c$
- Второй тип $\int \frac{A_\mu}{(x-a)^\mu}dx = \frac{A_\mu}{(1-\mu)(x-a)^{\mu-1}} + c, (\mu > 1)$
- Третий тип $\int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx$

$$\int \frac{Cx+D}{x^2+px+q}dx = \frac{C}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{D-\frac{Cp}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + c$$

- Четвертый тип

Первый интеграл – табличный

$$\int \frac{C_\nu x + D_\nu}{(x^2+px+q)^\nu}dx = \frac{C_\nu}{2}\int \frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^\nu} +$$

$$+\left(D_\nu - \frac{C_\nu p}{2}\right)\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^\nu}$$

Второй интеграл берут понижая степень ν

Этот прием будет показан при решении примера.

Пример

@ $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} \Rightarrow \left\langle x^2+1=0,\ x_{1,2}=\pm\sqrt{-1}=\pm i \right\rangle \Rightarrow$$

$$= \int \frac{((x^2+1)-x^2)dx}{(x^2+1)^2} = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{x^2dx}{(x^2+1)^2} =$$

$$= arctgx - \frac{1}{2}\int \underbrace{x}_{U}\,\underbrace{\frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}}_{dV} =$$

$$= arctgx - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{x^2+1} + \int \frac{dx}{x^2+1}\right) \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} arctgx + \frac{1}{2}\frac{x}{x^2+1} + c$$

Разбиение ПРД на сумму простейших дробей

- Находятся корни многочлена, стоящего в знаменателе дроби $Q_m(x)/P_n(x)$: $P_n(x=0)$

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)},\ P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0 \Rightarrow P_n(x) =$$

$$= a_0(x-a)^k \cdots (x-b)^l \cdots (x^2+px+q)^r \cdots (x^2+p_1x+q_1)^s \cdot\cdot = 0,$$

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,\ \frac{p_1^2}{4} - q_1 < 0, \ldots,\quad k + \ldots + l + .. + 2r + \ldots + 2s + .. = n$$

- Дробь $Q_m(x) / P_n(x)$ представляется в виде суммы дробей первого, второго, третьего и четвертого типов, с учетом кратности действительных и комплексных корней.

- Дроби складываются. Собранные в группы комбинации коэффициентов у степеней x в числителе приравниваются соответствующим коэффициентам у степеней x многочлена $Q_m(x)$. Решается полученная система уравнений для неизвестных коэффициентов. Исходная рациональная дробь представляется как сумма простейших дробей.

Пример

@ Разложить дробь $\dfrac{4}{x^3+4x}$ на простейшие дроби

$$\frac{4}{x^3+4x} \Rightarrow x^3+4x=0 \Leftrightarrow x(x^2+4)=0 \Leftrightarrow x_1=0, x_{2,3}=\pm 2i$$

Простой корень

Пара мнимых корней

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+4}$$

$$\frac{A}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+4}=\frac{A(x^2+4)+x(Cx+D)}{x(x^2+4)}=\frac{(A+C)x^2+Dx+4A}{x(x^2+4)}=\frac{4}{x(x^2+4)}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ D=0 \\ 4A=4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} A=1 \\ D=0 \\ C=-1 \end{matrix}$$

$$\frac{4}{x^3+4x}=\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+4}$$

Алгоритм интегрирования рациональных дробей

- Разложить подынтегральную функцию – выделить целую рациональную функцию и правильную рациональную дробь
- Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших дробей
- Проинтегрировать целую рациональную функцию
- Проинтегрировать сумму простейших дробей по известным алгоритмам

$$\int R(x)dx = \int \left(R^{\oplus}(x) + \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}\right)dx = \int R^{\oplus}(x)dx + \int \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}dx =$$

$$= \int R^{\oplus}(x)dx + \int \sum \left(\frac{A}{x-a}, \frac{A_\mu}{(x-a)^\mu}, \frac{Cx+D}{x^2+px+q}, \frac{C_\nu x + D_\nu}{(x^2+px+q)^\nu}\right)dx$$

Пример интегрирования рациональной функции

@ $\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$ $\quad \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} \Rightarrow (x-2)(x^2+1)^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1=2, x_{2,3}=\pm i, x_{4,5}=\pm i$

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}+\frac{Ex+F}{(x^2+1)^2}$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2C+D=0 \\ 2A+C-2D+E=2 \\ -2C+D-2E+F=2 \\ A-2D-2F=13 \end{cases}$$

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\int\frac{dx}{x-2}-\int\frac{x+2}{x^2+1}dx-\int\frac{3x+4}{(x^2+1)^2}dx$$

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}dx=\frac{3-4x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1}-4arctgx+c$$