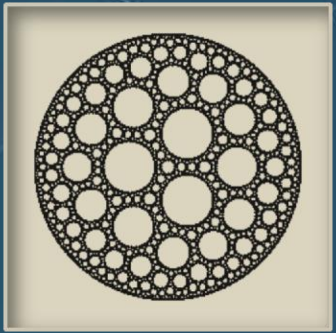
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ



[основной прием интегрирования иррациональностей - типы интегралов содержащих иррациональность - интегралы, содержащие дробно-линейную функции - интегралы, содержащие суммы и разности квадратов – примеры]

Горячев В.Д. Лекции по математическому анализу

Основной прием интегрирования иррациональностей

$$\int R(x, \sqrt{f(x)})dx$$

При интегрировании функций содержащих иррациональные выражения, основной прием - это использование подстановок, позволяющих избавиться от корней и приводящих подынтегральную функцию к виду рациональной функции

- $$\int R(x, \sqrt{f(x)})dx \Rightarrow \int R(t)dt$$

Типы интегралов, содержащих иррациональность

- $$\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}},\ldots,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_m}{s_m}}\right]dx$$
- $$\int R(x,\sqrt{a^2-x^2})dx$$
- $$\int R(x,\sqrt{x^2-a^2})dx$$
- $$\int R(x,\sqrt{a^2+x^2})dx$$
- $$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad a>0$$
- $$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \quad c>0$$
- $$\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx \qquad ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_1,x_2\in\Re$$

Интегралы, содержащие дробно-линейную функцию

- $$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_m}{s_m}}\right]dx$$

Для интегрирования используется подстановка:

- $$\frac{ax+b}{cx+d} = t^B$$

где B – наименьшее общее кратное чисел $s_1, s_2, \dots, s_m$

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^B \Leftrightarrow ax+b = cx\cdot t^B + d\cdot t^B \Leftrightarrow x = \frac{d\cdot t^B - b}{a - c\cdot t^B} = r(t)$$

$$\int R(r(t), t^{v_1}, t^{v_2}, \dots, t^{v_m})r'(t)dt = \int \rho(t)dt, \quad v_m \in Z$$

Пример

@ $$\int \frac{dx}{x(\sqrt[3]{x}+\sqrt[5]{x^2})} = \left\langle x = t^{15},\ dx = 15t^{14}dt \right\rangle = 15\int \frac{dt}{t^6+t^7}$$

$$15\int \frac{dt}{t^6+t^7} = 15\int \frac{((1+t)-t)dt}{t^6(1+t)} = 15\left(\int \frac{dt}{t^6} - \int \frac{dt}{t^5(1+t)}\right) =$$

$$= 15\left(\int \frac{dt}{t^6} - \int \frac{dt}{t^5} + \int \frac{dt}{t^4(1+t)}\right) = 15\left(\int \frac{dt}{t^6} - \int \frac{dt}{t^5} + \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^3} + \int \frac{dt}{t^2} - \int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{1+t}\right) =$$

$$= 15\left(-\frac{1}{5t^5} + \frac{1}{4t^4} - \frac{1}{3t^3} + \frac{1}{2t^2} - \frac{1}{t} + \ln\left|\frac{1+t}{t}\right|\right) =$$

$$= -\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{15}{4\sqrt[15]{x^4}} - \frac{5}{\sqrt[5]{x}} + \frac{15}{2\sqrt[15]{x^2}} - \frac{15}{\sqrt[15]{x}} + 15\ln\left|\frac{1+\sqrt[15]{x}}{\sqrt[15]{x}}\right| + c$$

Интегралы, содержащие суммы и разности квадратов

- $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})dx$ подстановка $x = a\sin(t)$
- $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$ подстановка $x = a\sec(t)$
- $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})dx$ подстановка $x = a\,tg(t)$

Например в случае: $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx \Leftrightarrow \left\langle x = a\sec t,\ x = \frac{a}{\cos t},\ dx = \frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt \right\rangle \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int R\left(\frac{a}{\cos t}, a\,tgt\right)\frac{a\sin t}{\cos^2 t}dt = \int \rho(\sin t, \cos t)dt$$

Пример

@ $\int x^2\sqrt{4+x^2}\,dx$

Решение

$$\int x^2\sqrt{4+x^2}\,dx \Leftrightarrow \left\langle x = 2tgt,\ dx = \frac{2}{\cos^2 t}dt \right\rangle \Leftrightarrow$$

$$= 16\int (tg^2 t\sqrt{1+tg^2 t}\,\frac{1}{\cos^2 t})dt = 16\int (tg^2 t\,\frac{1}{\cos t}\,\frac{1}{\cos^2 t})dx = 16\int \frac{\sin^2 t}{\cos^5 t}dt =$$

$$= 16\int \frac{\sin^2 t\cdot\cos t}{\cos^6 t}dt = 16\int \frac{\sin^2 t\,d(\sin t)}{\cos^6 t} = 16\int \frac{u^2 du}{(1-u^2)^3} \Rightarrow \int R(u)du$$

$$\int x^2\sqrt{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}x(x^2+2)\sqrt{x^2+4} - 2\sinh^{-1}(\frac{x}{2}) + c$$