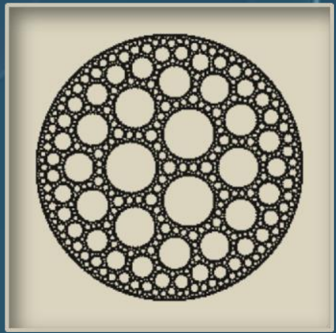
ИНТЕГРИРОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ



[интегралы, содержащие корни из квадратичных функций: первая подстановка Эйлера - вторая подстановка Эйлера - третья подстановка Эйлера, дифференциал бинома - примеры]

Основной прием интегрирования иррациональностей

$$\int R(x, \sqrt{f(x)})dx$$

При интегрировании функций содержащих иррациональные выражения, основной прием - это использование подстановок, позволяющих избавиться от корней и приводящих подынтегральную функцию к виду рациональной функции

- $$\int R(x, \sqrt{f(x)})dx \Rightarrow \int R(t)dt$$

Подстановки Эйлера

- $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \quad a > 0$

- $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \quad c > 0$

- $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx \qquad ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \Re$

Интегралы, рационально выражаемые через корень от квадратичной функции

- $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ — $a > 0$

Первая подстановка Эйлера $\sqrt{ax^2 + bx + c} = -x\sqrt{a} + t$

$$ax^2 + bx + c = ax^2 - 2xt\sqrt{a} + t^2$$

$$x = \frac{t^2 - c}{b + 2t\sqrt{a}} \Rightarrow \quad dx = \frac{2t(b + 2t\sqrt{a}) - (t^2 - c)2\sqrt{a}}{(b + 2t\sqrt{a})^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = -x\sqrt{a} + t = \frac{c - t^2}{b + 2t\sqrt{a}}\sqrt{a} + t$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(t)dt$$

Интегралы, рационально выражаемые через корень от квадратичной функции

- $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$
- $c > 0$

Вторая подстановка Эйлера $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 - 2xt\sqrt{c} + c$$

$$x = \frac{2t\sqrt{c} + b}{t^2 - a} \Rightarrow dx = \frac{2\sqrt{c}(t^2 - a) - (2t\sqrt{c} + b)2t}{(t^2 - a)^2}dt$$

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c} = \frac{2t^2\sqrt{c} + bt}{t^2 - a} - \sqrt{c}$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx = \int R(t)dt$$

Интегралы, рационально выражаемые через корень от квадратичной функции

- $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$
- $ax^2+bx+c=0 \Rightarrow x_1, x_2 \in \Re$

$$x_1=\alpha, x_2=\beta$$

Третья подстановка Эйлера $\sqrt{ax^2+bx+c}=(x-\alpha)t$

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)=a(x-\alpha)^2t^2$$

$$x=\frac{a\beta-\alpha t^2}{a-t^2} \qquad dx=\frac{-2\alpha t(a-t^2)+2t(a\beta-\alpha t^2)}{(a-t^2)^2}dt$$

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx=\int R(t)dt$$

Пример

@ $\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}dx \quad a = 1 > 0$ Применим первую подстановку Эйлера

Решение

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}dx \Rightarrow \left\langle \sqrt{x^2+x} = -x+t \Leftrightarrow x^2+x = x^2-2xt+t^2 \right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\langle x = \frac{t^2}{1+2t}, \quad dx = \frac{2t(1+2t)-2t^2}{(1+2t)^2}dt = \frac{2(t^2+t)}{(1+2t)^2}dt \right\rangle \Rightarrow$$

$$= \int \left(\frac{-t^2}{1+2t} + t \right) \frac{(1+2t)}{t^2} \frac{2(t^2+t)}{(1+2t)^2} dt = 2\int \frac{(t+1)^2}{(1+2t)^2}dt = \int R(t)dt$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2+x}}{x}dx = \sqrt{x(x+1)}\left(\frac{\sinh^{-1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}} + 1 \right) + c$$

Интегрирование дифференциального бинома, подстановки Чебышева

- $\int x^m (a+bx^n)^p dx \qquad m, n, p \in R \quad a, b$ - любые числа

Теорема П.Л. Чебышева.
Дифференциальный бином интегрируется в элементарных функциях в следующих трех случаях:

1. p - целое число

2. $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число

3. $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое число

1. $p \in Z \qquad x = t^r, \quad r$ - наименьшее кратное знаменателей дробей m и n

Пример

@ $\int \sqrt{x^3}\,(1+4\sqrt[3]{x})^2\,dx$

Решение

Применим первую подстановку Чебышева $p = 2 \to$ *целое число*

$$I = \int x^{\frac{3}{2}}(1+4x^{\frac{1}{3}})^2\,dx \quad \Rightarrow \langle x = t^6 \rangle \Rightarrow \langle dx = 6t^5 dt \rangle$$

$$I = \int t^9 (1+4t^2)^2\, 6t^5\, dt = 6\int t^{14}(1+4t^2)^2\, dt$$

Интегрирование дифференциального бинома, подстановки Чебышева

- $\int x^m (a + bx^n)^p dx \qquad m, n, p \in R \quad a, b$ - любые числа

Теорема П.Л. Чебышева.

Дифференциальный бином интегрируется в элементарных функциях в следующих трех случаях:

1. p - целое число

2. $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число

3. $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое число

$$2. \quad \frac{m+1}{n} \in Z, \quad (a + bx^n) = t^s, \quad s \text{ - знаменатель дроби } p = \frac{q}{s}$$

@ $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$$

Решение

Применим вторую подстановку Чебышева $\frac{m+1}{n} \to$ *целое число* $\left\langle \frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2 \right\rangle$

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx \quad \Rightarrow 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3 \Rightarrow x^{\frac{1}{4}} = (t^3-1) \Rightarrow dx = 4(t^3-1)^3 3t^2dt$$

$$I = \int \frac{12t^3(t^3-1)^3}{(t^3-1)^2}dt = 12\int t^3(t^3-1)dt \; = \frac{3}{7}(t^7-t^4)+c$$

- $\int x^m (a + bx^n)^p dx \qquad m, n, p \in R \quad a, b$ - любые числа

Теорема П.Л. Чебышева.
Дифференциальный бином интегрируется в элементарных функциях в следующих трех случаях:

1. p - целое число

2. $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число

3. $\dfrac{m+1}{n} + p$ - целое число

3. $\dfrac{m+1}{n} + p \in Z$

Пример

@ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

Решение

Применим третью подстановку Чебышева $\dfrac{m+1}{n}+p \to$ *целое число* $\left\langle \dfrac{m+1}{n}+p=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}=0 \right\rangle$

$$I=\int (1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx \Rightarrow 1+x^{-4}=t^4 \Rightarrow x=(t^4-1)^{-\frac{1}{4}} \Rightarrow dx=-(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}t^3dt$$

$$I=\int \frac{-(t^4-1)^{-\frac{5}{4}}t^3}{\dfrac{t}{(t^4-1)^4}}dt \quad =-\int \frac{t^2}{(t^4-1)}dt$$