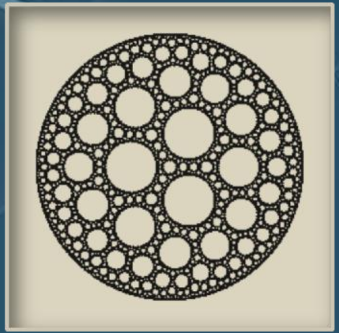
КОМБИНАТОРИКА



{ определение – правила равенства, суммы и произведения – принцип включений – исключений – обобщение правила произведения – общее правило произведения – выборки – перестановки и сочетания – перестановки и сочетания с повторениями – бином ньютона – примеры }

Определение

- *Комбинаторика* - раздел дискретной математики, в котором изучаются объекты, составленные из элементов конечных множеств.

В комбинаторике решается перечислительная задача о числе выборок, получаемых из элементов заданного конечного множества по некоторым правилам и при некоторых условиях.

Pascal Blaise
(1623–1662)

Треугольник Паскаля

Комбинаторный смысл биномиальных коэффициентов состоит в том, что они представляют собой число различных *k - членных комбинаций* из *n - элементного множества* без повторений.

Бином Ньютона $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Определения из теории множеств

- $|A|$ – число элементов (мощность) конечного множества A
- $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ – прямое декартово произведение множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
- Элементами декартова произведения являются последовательности $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots, x_n \in A_n$

  При $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A$ получается декартова степень A^n множества A.

  Если элементы множества A считать буквами алфавита, то элементы декартовой степени можно рассматривать как слова, они в этом случае записываются в виде $\{x_1 x_2 \ldots x_n\}$.
- 2^A – множество всех подмножеств множества A
- Буквой E обозначают двухэлементное множество $\{0,1\}$.

Правила равенства, суммы и произведения

Пусть A и B - конечные множества, f - функция, определенная на A со значениями в B .

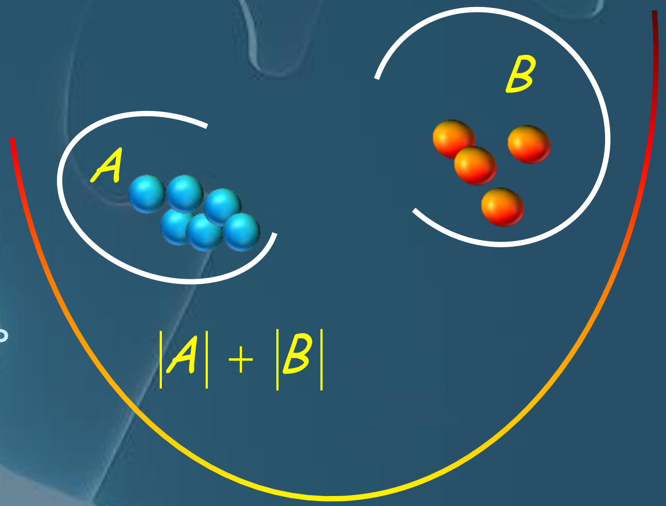
- f называется *биекцией* или взаимно однозначным отображением, если выполняются условия:

1) каждому одному элементу из A соответствует один элемент множества B (функция, удовлетворяющая этому условию, называется *инъекцией*);
2) для любого $y \in B$ существует такой $x \in A$,что $f(x) = y$ (такая функция называется *сюръекцией*).

- Если существует биекция из A в B , то говорят также, что между A и B имеется взаимно однозначное соответствие.

Правила равенства, суммы и произведения

- **Правило равенства**
  Если между конечными множествами A и B есть взаимно однозначное соответствие, то $|A| = |B|$.
- **Правило суммы**
  Если A и B конечные множества и $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$.
- **Правило произведения**
  Для любых конечных множеств A и B имеет место равенство $|A \times B| = |A||B|$.



Правила суммы и произведения обобщаются на случай любого числа слагаемых или сомножителей. Для правила суммы обобщение очевидно: мощность объединения любого числа попарно непересекающихся множеств равна сумме их мощностей.

Принцип включений - исключений

- Принцип включений - исключений

Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - конечные множества, тогда

$$\left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_i |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|$$

- Общее правило произведения

Пусть упорядоченный набор ($x_1, x_2, \ldots, x_k$) формируется в результате последовательного выбора элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, причем для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ *и любых* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ элемент x_i *можно выбрать* k_i *способами. Тогда весь набор может быть выбран* $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ *способами.*

Обобщение правила произведения

- Теорема

Для любых конечных множеств $A_1, A_2, \ldots A_k$ имеет место равенство

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k| = |A_1| \cdot |A_2| \cdots |A_k|$$

Доказательство

При $k = 2$ это справедливо.
Для большего числа сомножителей равенство доказываем индукцией по k.

Элементами множества $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ являются наборы вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, где $x_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, k$.

Каждый такой набор можно рассматривать как состоящий из двух частей: элемента произведение множеств от A_1 до A_{k-1} и x_k из A_k. Таким образом, имеется взаимно однозначное соответствие между пересечением множеств от A_1 до A_{k-1} и прямым произведением двух множеств: $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}$ и A_k.

Обобщение правило произведения

По правилу равенства: $\left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k\right| = \left|\left(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}\right) \times A_k\right|$.

По правилу произведения для двух сомножителей:

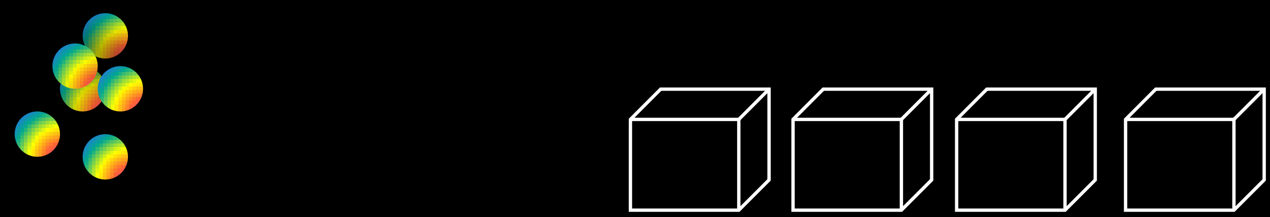
$$\left|\left(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}\right) \times A_k\right| = \left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_{k-1}\right| \cdot \left|A_k\right|$$

По предположению индукции: $\left|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k\right| = \left|A_1\right| \cdot \left|A_2\right| \cdots \left|A_k\right|$

$\square$

@ *Есть m различных шаров и n различных урн. Найти число способов раскладки шаров по урнам .*

Решение



Каждый шар может занимать одно из n *мест, то есть* n *– число* способов размещения одного шара по n *урнам.*

Воспользуемся правилом произведения.

Получим, что число способов раскладки шаров по урнам будет равно n^m .

$$\left|\overbrace{N\times N\times\ldots\times N\times N}^{m}\right| = |N|^{|M|} = n^m$$

Пример

@ *Сколько существует различных четырехзначных чисел, в записи которых используются только нечетные цифры ?*

Решение

Представим, что мы начали выписывать все такие четырехзначные числа. Для начала напишем первую цифру. Поскольку нечетных цифр всего пять (1, 3, 5, 7, 9), то она может быть любой из пяти. Если мы написали первой цифрой 1, то к ней можно приписать любую из тех же пяти цифр и получить числа 11, 13, 15, 17, 19..

Аналогично рассматриваем ситуации с числами, которые начинаются с цифры 3 и другие случаи. Затем анализируем случаи записи, в которых учтены первые комбинации первых двух нечетных цифр в сочетании с третьей (нечетной) цифрой, .. и так доходим до четырехзначных цифр.

Поскольку на каждом из четырех мест может стоять любая из пяти цифр, то всего существует $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$ *таких четырехзначных чисел.*

Пример

@ *Сколько существует четырехзначных чисел, все цифры которых нечетные, причем хотя бы одна из них равна 5 ?*

Решение

Основная сложность задачи состоит в том, что не ясно, какая из цифр по счету является 5, условию задачи удовлетворяют и те числа, в которых цифр 5 несколько. Выяснено, что число четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равно 625.

Найдем теперь количество четырехзначных чисел, в которых все цифры нечетны, но нет ни одной цифры 5. Это четырехзначные числа, в записи которых встречаются только четыре цифры: 1, 3, 7, 9. Начнем проводить рассуждения как в первой задаче. На первом, втором, третьем и четвертом месте может находиться любая из четырех цифр. Значит всего таких чисел может быть $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$.

Количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, равно 625; количество четырехзначных чисел, которые состоят из цифр 1, 3, 7, 9 равно 256; тогда количество четырехзначных чисел, все цифры которых нечетны, причем хотя бы одна из них 5, равно $625 - 256 = 369$.

Пример

@ *Сколько может быть четырехзначных чисел, делящихся на 5, если у них все цифры различные ?*

Решение

Пусть $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ – множество цифр, $a = a_1 a_2 a_3 a_4$ – четырехзначное число, где $a_1 \in A \setminus \{0\}$, $a_4 \in \{0, 5\} \setminus \{a_1\}$ $a_2 \in A \setminus \{a_1, a_4\}$ $a_3 \in A \setminus \{a_1, a_2, a_4\}$.

Если $a_4 = 0$ тогда цифра a_1 может быть выбрана 9 способами, цифра a_2 может быть выбрана 8 способами, а a_3 – 7 способами. По правилу произведения получаем, что число a может быть получено $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ способами.

Если $a_4 = 5$ тогда $a_1 \in A \setminus \{0, 5\}$ т.е. цифра a_1 может быть выбрана 8 способами, цифра a_2 может быть выбрана также 8 способами, а a_3 – 7 способами. По правилу произведения получаем, что число a может быть получено $8 \cdot 8 \cdot 7 = 448$ способами.

Таким образом, используя правило суммы, получаем, что существует $504 + 448 = 952$ четырехзначных числа, делящихся на 5, у которых все цифры различные.

Выборки

- В простейших комбинаторных задачах требуется подсчитать число способов выбрать *k элементов из n – элементного множества. То, что* получается в результате выбора, называется *выборкой из n по k или (n,k) - выборкой*.

Понятие выборки отличается от понятия подмножества. Отличие состоит в том, что в выборках может допускаться повторение элементов. Это означает, что в выборку может входить несколько экземпляров одного и того же элемента. Говорят, что рассматриваются *выборки с повторениями*.

Выборки могут быть *упорядоченными* или *неупорядоченными*.

Упорядоченность означает, что выборки, состоящие из одних и тех же элементов, но расположенных в разном порядке, считаются *различными*.

Если же такие выборки считаются *одинаковыми*, то говорят, что рассматриваются *неупорядоченные* выборки.

Упорядоченные выборки называют *перестановками (или размещениями)*, *неупорядоченные – сочетаниями.*

Таким образом, имеется четыре основных типа выборок:

перестановки (без повторений),

перестановки с повторениями,

сочетания (без повторений)

сочетания с повторениями.

Подсчитаем число выборок каждого типа. Множеством, из которого делается выбор, будем считать множество чисел $I_n = \{ 1, 2, \ldots , n \}$.

- Перестановки с повторениями.

Перестановки с повторениями из n по k – это последовательности длины k, состоящие из элементов множества I_n, *то* есть элементы множества I_n^k.

По правилу произведения следует:

Число (n,k) – перестановок с повторениями равно n^k

Перестановки

- Перестановки из n по k обозначим $P_{n,k}$

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Размещения

Доказательство

В качестве первого элемента перестановки может быть выбран любой из n *элементов множества* I_n. *Поскольку повторения* недопустимы, второй элемент можно выбрать $n-1$ *способами, третий* $n-2$ способами и т.д.

Применяя обобщенное правило произведения, получаем

$$P_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

При $k = n$ получим формулу для числа перестановок всех n элементов

$$P_{n,n} = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

□

Пример

@ *Сколько может 2-перестановок из четырех объектов, пронумерованных как 1, 2, 3, 4 ?*

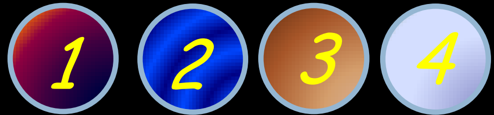
Решение

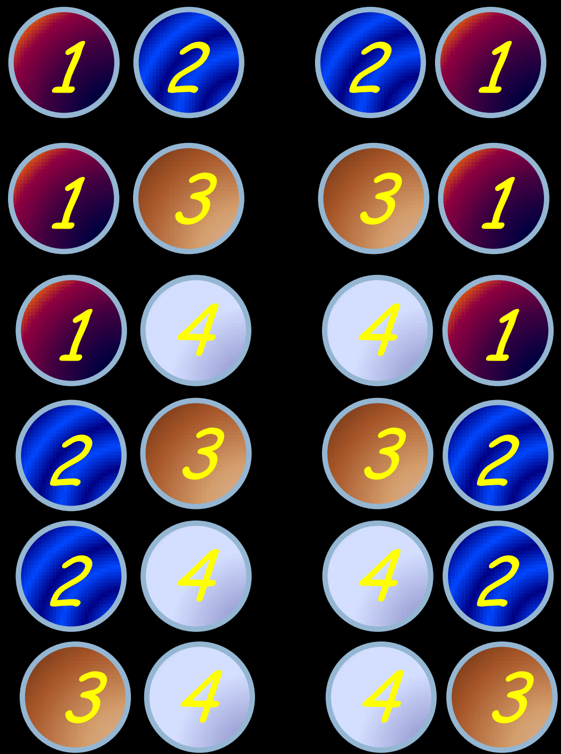
$$P_{4,2} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)\Big|_{\substack{n=4\\k=2}}$$

$$P_{4,2} = \frac{n!}{(n-k)!}\Big|_{\substack{n=4\\k=2}}$$

$$P_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$$

$$P_{4,2} = 12$$





Сочетания

- Сочетания (без повторений) из n по k

Сочетания из n по k, *то есть неупорядоченные выборки без* повторений, это просто k – *элементные подмножества* n – *элементного множества.*

Число (n,k) – сочетаний обозначим как $C_n^k \Rightarrow \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Доказательство

Выписывая элементы *(n,k)* – сочетания в некотором порядке, получаем *(n,k)* – перестановку. Поскольку k элементов можно упорядочить $k!$ способами , то из каждого сочетания можно образовать $k!$ различных перестановок. Из всех $\binom{n}{k}$ сочетаний таким образом получится $k!\binom{n}{k}$ перестановок. Ясно, что каждая перестановка будет при этом получена точно один раз.

$$P_{n,k} = k!\binom{n}{k} \Rightarrow \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad \square$$

Перестановки и сочетания с повторениями

- Число перестановок с повторениями, которые получаются из n элементов находится по формуле

$$P_{n,(n_1,n_2,\ldots,n_k)} = \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\ldots\cdot n_k!}$$

- Число (nk) - сочетаний с повторениями находится по формуле

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = C(n+k-1,k) = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}$$

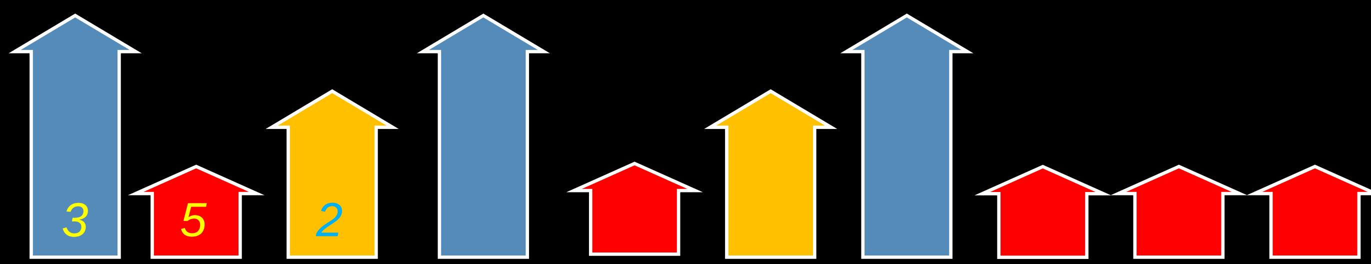
Пример

@ Каким числом способов можно застроить улицу из 10 домов, если 3 дома пятиэтажные, 5 – двухэтажные и 2 - четырехэтажные ?

Решение

$$P_{10,(3,5,2)}\left|\begin{array}{l} n = 10 \\ n_1 = 3 \\ n_2 = 5 \\ n_3 = 2 \end{array}\right. = \frac{10!}{3!\cdot 5!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1} = \frac{5\cdot 3\cdot 4\cdot 7\cdot 6}{1} = 2520$$

$$P_{10,(3,5,2)} = 2520$$

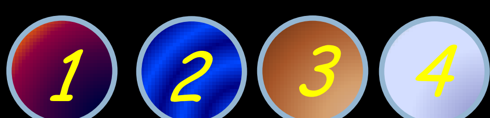


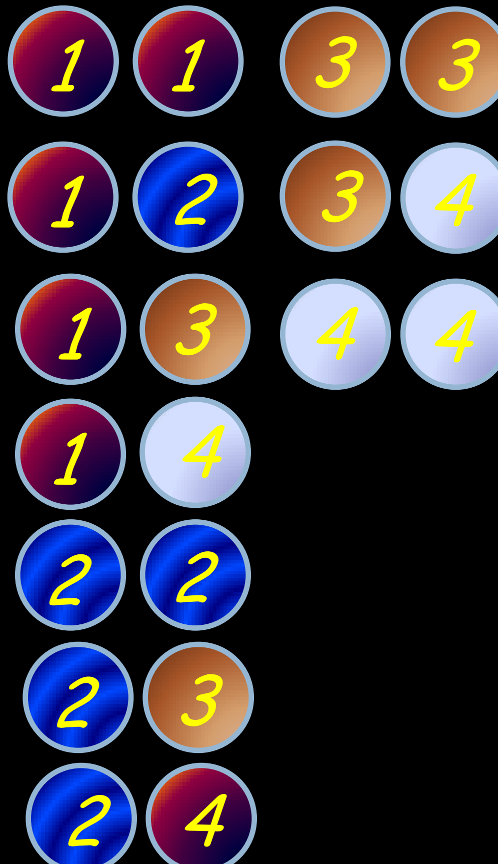
@ *Найти число сочетаний с повторениями по 2 из четырех элементов, пронумерованных как 1, 2, 3, 4 ?*

Решение

$$\left.\binom{n+k-1}{k}\right|_{\substack{n=4\\k=2}} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(3)!}$$

$$\binom{5}{2} = 10$$





- Бином Ньютона

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}a^k\ b^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$(a+b)^n=b^n+nab^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}a^2b^{n-2}+\ldots+$$

$$+\frac{n!}{k!(n-k)!}a^kb^{n-k}+\ldots+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+na^{n-1}b+a^n$$

$$(a+b)^4=b^4+4ab^3+6a^2b^2+4a^3b+a^4$$

Свойства сочетаний

- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

$$(a+b)^4 = b^4 + 4ab^3 + 6a^2b^2 + 4a^3b + a^4$$

$$\binom{4}{0} = \binom{4}{4} = 1 \quad \binom{4}{1} = \binom{4}{3} = 4 \quad \binom{4}{2} = \binom{4}{2} = 6$$

- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

$$\binom{4}{1} = \binom{3}{0} + \binom{3}{1} = 1 + 3 = 4$$

- $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$

$$\binom{4}{1} = \frac{4}{1}\binom{3}{0} = 4$$

- $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$

$$\binom{4}{2}\binom{2}{1} = 6 \cdot 2 = \binom{4}{1}\binom{3}{1} = 4 \cdot 3$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$1$$

$$1 \quad 1$$

$$1 \quad 2 \quad 1$$

$$1 \quad 3 \quad 3 \quad 1$$

Пример

@ Из колоды (52 карты) вынули 10 карт. Найти вероятность того, что выбран ровно один туз.

Решение

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

10 карт можно выбрать $\binom{52}{10}$ числом способов.

1 туз можно выбрать 4 способами (число мастей - 4)

Оставшиеся карты можно выбрать $\binom{48}{9}$ числом способов.

$$P(A) = \frac{4C_{48}^{9}}{C_{52}^{10}} \quad P(A) = \frac{4 \cdot 48!10!42!}{9!39!52!} = \frac{4 \cdot 10 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}$$

$$P(A) = 0.424$$

Пример

@ *Из колоды (52 карты) вынули 10 карт. Найти вероятность того, что выбрано не менее двух тузов.*

Решение

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

10 карт можно выбрать $\binom{52}{10}$ *числом способов.*

Для выборки не менее двух тузов отнимем от общего числа способов число способов выборки без тузов и с одним тузом

$$P(A) = \frac{C_{52}^{10} - C_{48}^{10} - 4C_{48}^{9}}{C_{52}^{10}}$$

$$P(A) = 1 - \frac{42 \cdot 41 \cdot 40 \cdot 39}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52} - \frac{4 \cdot 10 \cdot 42 \cdot 41 \cdot 40}{49 \cdot 50 \cdot 51 \cdot 52}$$

$$P(A) = 0.1626$$