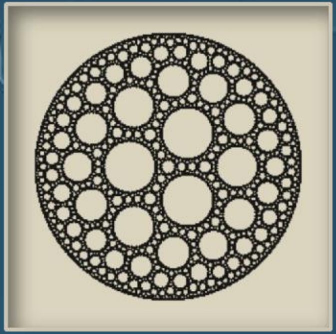
ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

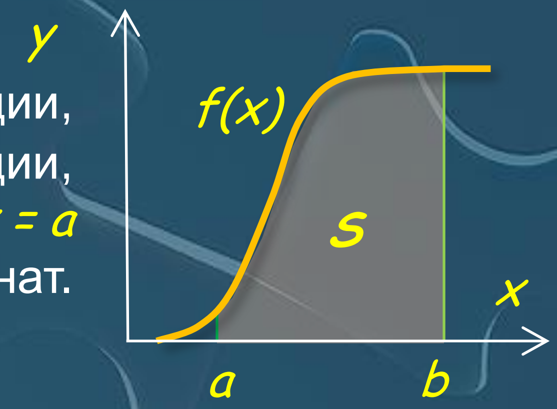


[вычисление площадей плоских фигур - вычисление площади фигуры в полярной системе координат - вычисление объема тел - вычисление длины дуги - вычисление площади поверхности тела вращения – примеры]

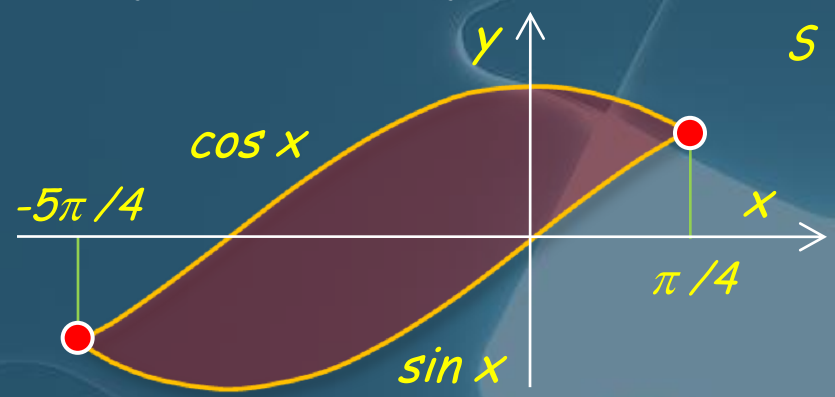
Вычисление площадей плоских фигур

$$S = \int_a^b |f(x)|dx$$

S – площадь криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции, снизу осью абсцисс x, двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, параллельными оси ординат.



Пример: вычислить площадь фигуры, ограниченной косинусоидой и синусоидой

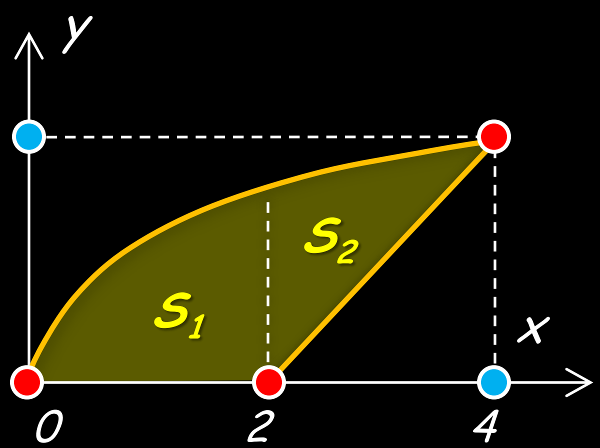


$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \qquad S = \int_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx =$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_{-\frac{5\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

Пример

@ *Найти площадь фигуры, ограниченной прямой, параболой и осью x*



$$y = x - 2 \quad y = \sqrt{x}$$

Точки пересечения кривых : (0;0), (2;0), (4;2)

Первое решение :

$$S = \int_0^2 \sqrt{x}dx + \int_2^4 (\sqrt{x} - x + 2)dx =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_0^2 + \left(\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Big|_2^4 = \frac{10}{3}$$

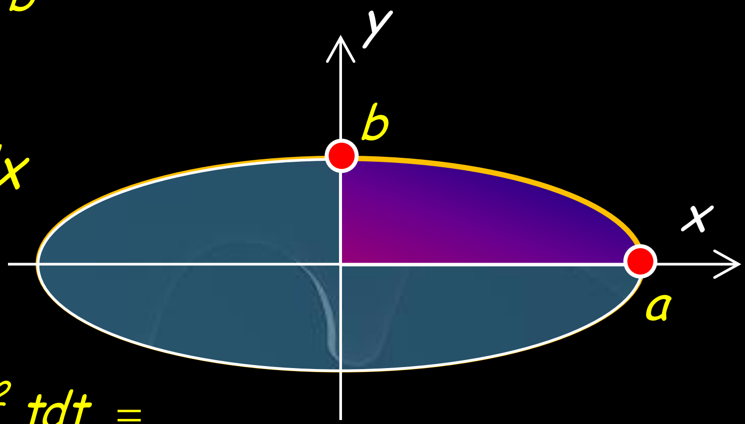
Второе решение :

$$S = \int_0^2 (y + 2 - y^2)dy = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \frac{10}{3}$$

Пример

Найти площадь эллипса с полуосями a и b

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad S=4\frac{b}{a}\int_0^a\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

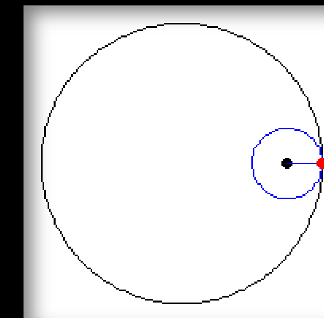


$$S=4\frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-(a\sin t)^2}\,a\cos t\,dt=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+\cos 2t)}{2}dt=2ab\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi ab$$

Пример

@ *Найти площадь астроиды :* $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$



Используем уравнение астроиды в параметрической форме

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$S = -4\int_a^0 y(t)\,dx(t) \Rightarrow S = -4\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin^3 t\; a3\cos^2 t(-\sin t)\,dt = 12a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,\sin^2 t\,dt = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1-\cos 4t}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2t}{2}\right)dt =$$

$$= \frac{3}{4}a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t - \cos 2t + \cos 4t\cos 2t)\,dt = \frac{3}{8}\pi a^2$$

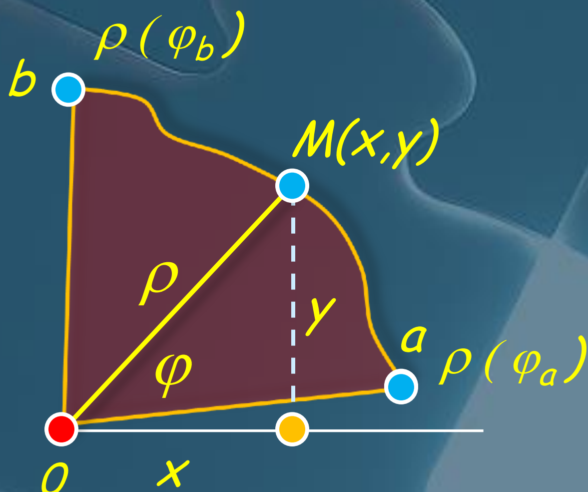
Площадь фигуры в полярной системе координат

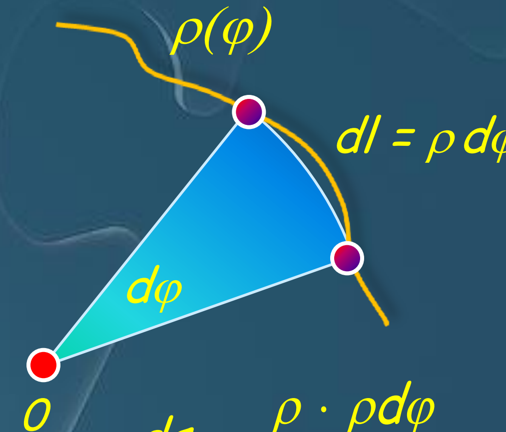
$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \rho^2(\varphi)\,d\varphi$$

$$x = \rho\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

$$x^2 + y^2 = \rho^2$$

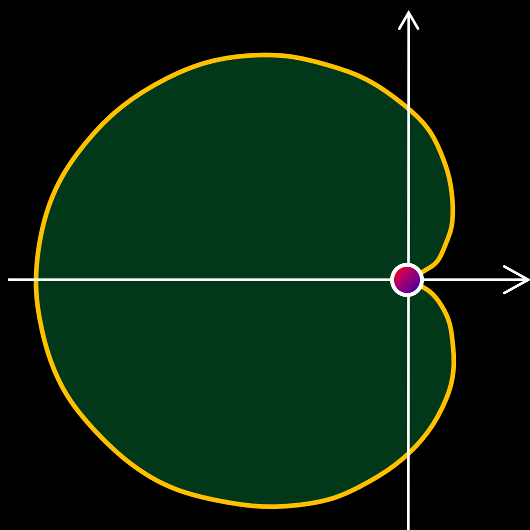
$$tg\varphi = \frac{y}{x}$$



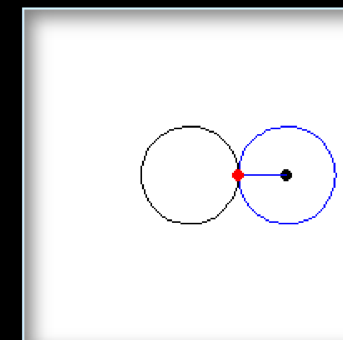


$$ds = \frac{\rho\cdot\rho d\varphi}{2}$$

@ Найти площадь кардиоиды $\rho = 1 - \cos\varphi$



$$S = \frac{1}{2}\int_{\varphi_a}^{\varphi_b} \rho^2 d\varphi$$



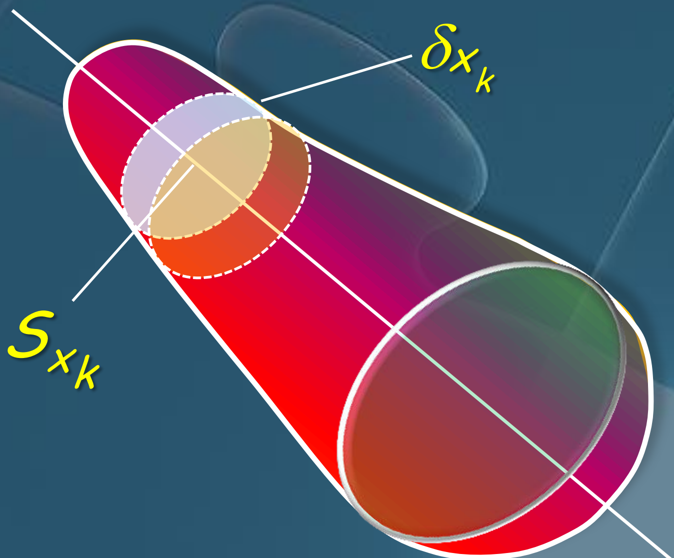
$$S = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^2 d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (1 - 2\cos\varphi + \cos^2\varphi) d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi - 2\sin\varphi + \frac{1}{2}\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\right)\Bigg|_{0}^{2\pi} = \frac{3\pi}{2}$$

Вычисление объема тел

В общем случае для этих целей используются двойной или тройной интеграл. В частном случае, если известны площади параллельных сечений вдоль выбранного направления, можно получить расчетную формулу для объема.



$$\delta V_k \approx S(x_k)\delta x_k$$

$$r_k \le M_k\delta x_k - m_k\delta x_k = (M_k - m_k)\delta x_k \to 0$$

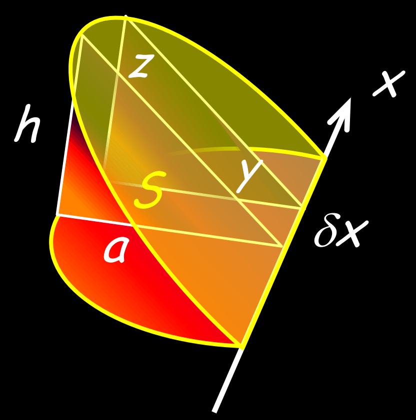
$$dV = S(x)dx$$

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Пример

@ *Найти объем цилиндрического отрезка с радиусом основания* a *и высотой* h

$$z = \frac{hy}{a}, \quad x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow$$

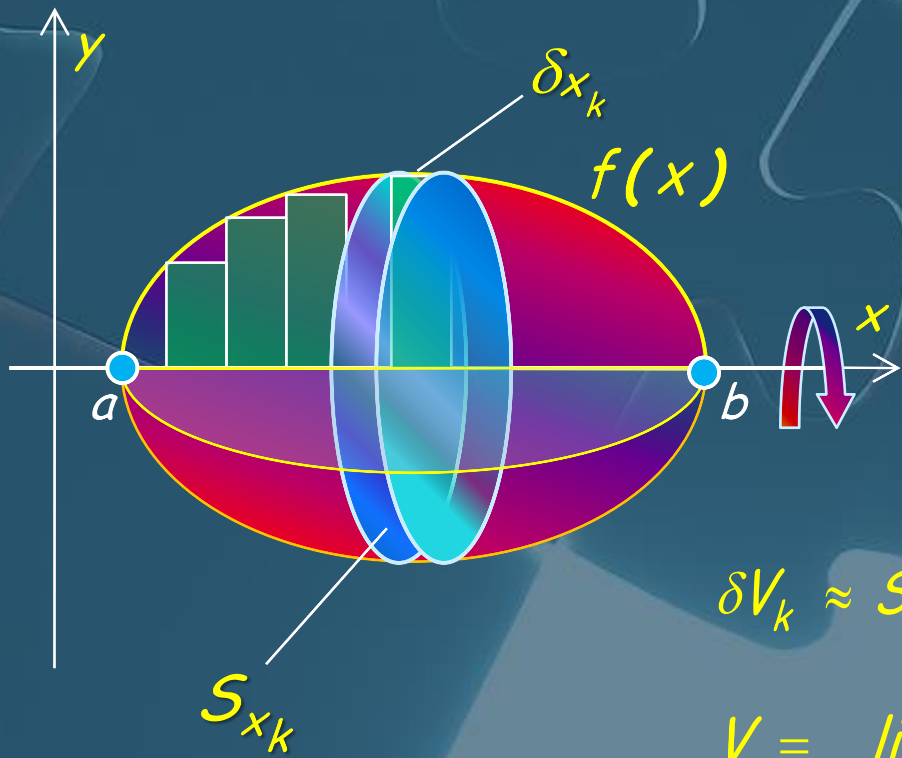


$$z = \frac{h}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Rightarrow S = \frac{yz}{2}$$

$$S(x) = \frac{h(a^2 - x^2)}{2a}$$

$$V = \int_{-a}^{a} \frac{h(a^2 - x^2)}{2a} dx = \frac{h}{a}\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{2}{3}a^2 h$$

Вычисление объема тел вращения



$$V_x = \pi\int_a^b f^2(x)dx$$

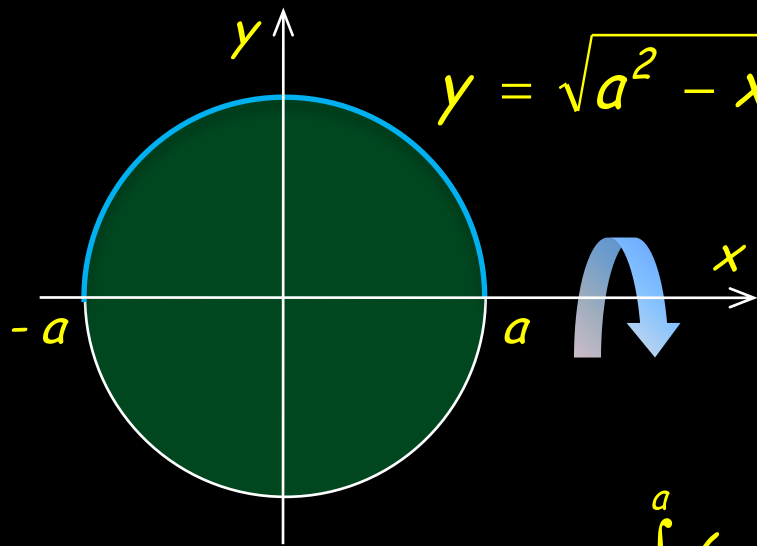
$$V_y = \pi\int_c^d f^2(y)dy$$

$$\delta V_k \approx S(x_k)\delta x_k \qquad \delta V_k = \pi f^2(x_k)\delta x_k$$

$$V = \lim_{\max\delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} V_k = \lim_{\substack{\max\delta x\to 0\\ n\to\infty}}\sum_{k=1}^{n}\pi f^2(x_k)\delta x_k$$

Пример

@ *Найти объем шара радиуса a*

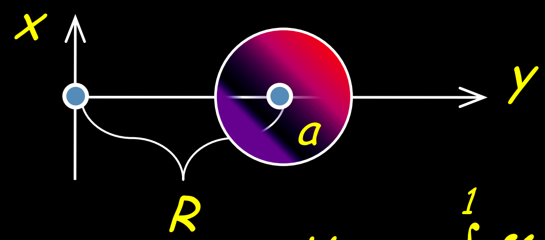


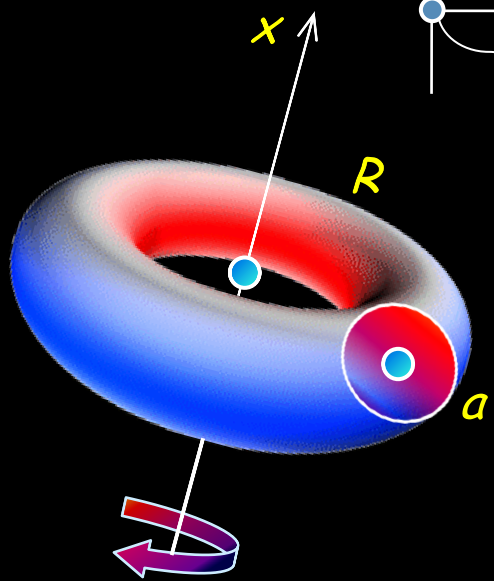
$$y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$V_x = \pi \int_{-a}^{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2) dx = 2\pi\left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^a = \frac{4}{3}\pi a^3$$

@ *Найти объем тора с радиусами* $R = 2$ и $a = 1$



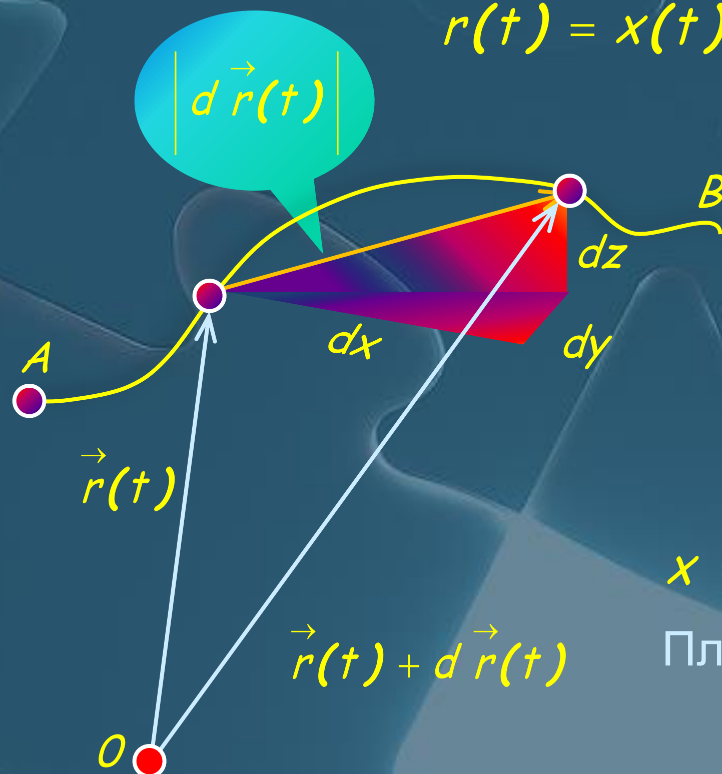


$$V_x = \pi \int_{-1}^{1} \{(2 + \sqrt{1 - x^2})^2 - (2 - \sqrt{1 - x^2})^2\} dx =$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx \Rightarrow \langle x = \sin t,\ dx = \cos t dt \rangle \Rightarrow$$

$$= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 16\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi^2$$

Вычисление длины дуги



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

$$d\vec{r}(t) = dx(t)\vec{i} + dy(t)\vec{j} + dz(t)\vec{k}$$

$$|dl| = \left| d\vec{r} \right| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$L = \int_{(L)} dl = \int_{t_A}^{t_B} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$$

$$x = t,\ y = f(x) \Rightarrow \qquad L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2}\, dx$$

Плоская кривая

$$\rho = \rho(\varphi) \Rightarrow \qquad L = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\phi$$

Формула для длины дуги в полярной системе координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos\varphi \\ y = \rho \sin\varphi \end{cases}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\cos\varphi - \rho\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\sin\varphi + \rho\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt}$$

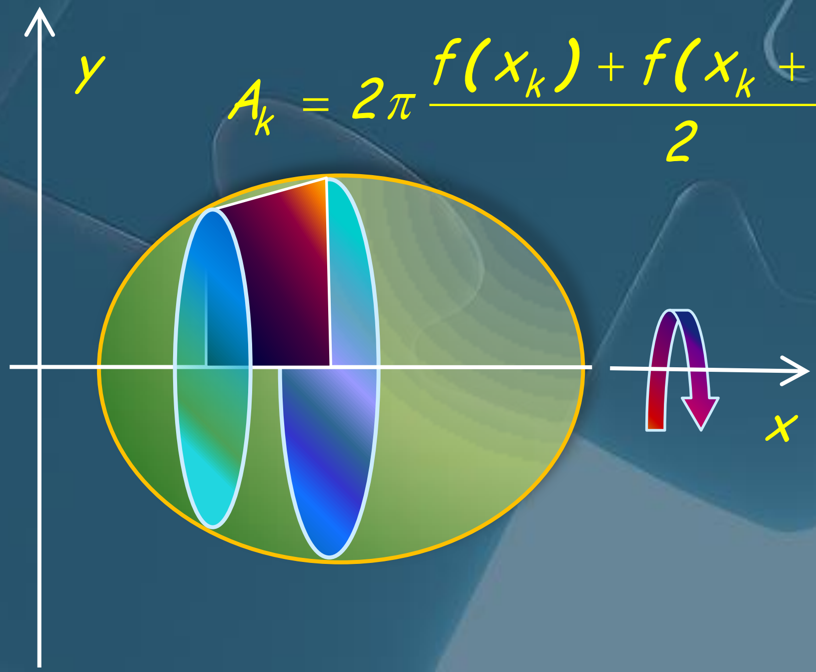
$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 = \left(\dfrac{d\rho}{dt}\right)^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 - 2\rho\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\phi}{dt}\sin\varphi\cos\varphi \\ \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 = \left(\dfrac{d\rho}{dt}\right)^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2 + 2\rho\dfrac{d\rho}{dt}\dfrac{d\phi}{dt}\sin\varphi\cos\varphi \end{cases} +$$

$$|dl| = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt$$

$$L = \int_{t_A}^{t_B}\sqrt{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \rho^2}\,dt = \int_{\phi_A}^{\phi_B}\sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\,d\varphi$$

Вычисление площади поверхности тела вращения

Площадь конического кольца



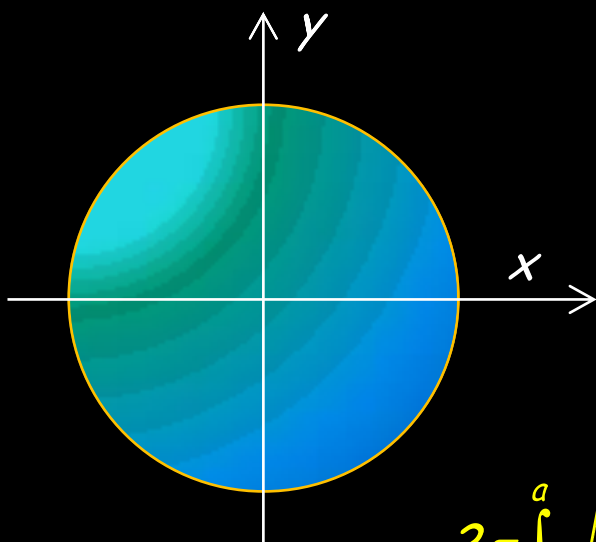
$$A_k = 2\pi \frac{f(x_k) + f(x_k + \delta x_k)}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_k + \delta x_k)}{2}\right)^2} \delta x_k$$

$$A = \lim_{\substack{\max \delta_x \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx$$

Пример

@ *Найти площадь сферы радиуса* a



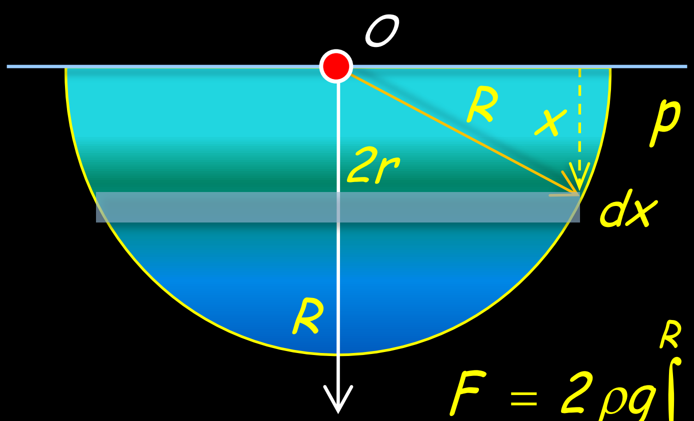
$$A = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(\frac{df}{dx}\right)^2}\,dx$$

$$A = 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}\right)^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}\,dx = 2\pi\int_{-a}^{a}a\,dx = 4\pi a^2$$

Пример инженерной задачи

@ *Найти силу давления воды на стенку шлюза в форме полукруга радиуса R, диаметр которого совпадает с поверхностью воды*



$$p = \rho g x$$

$$ds = 2r\,dx = 2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$dF = \rho g x\,ds = 2\rho g x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$$

$$F = 2\rho g\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = -\rho g\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,d\left(R^2 - x^2\right) =$$

$$= \frac{2\rho g}{3}\left(R^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_R^0 = \frac{2}{3}\rho g R^3$$